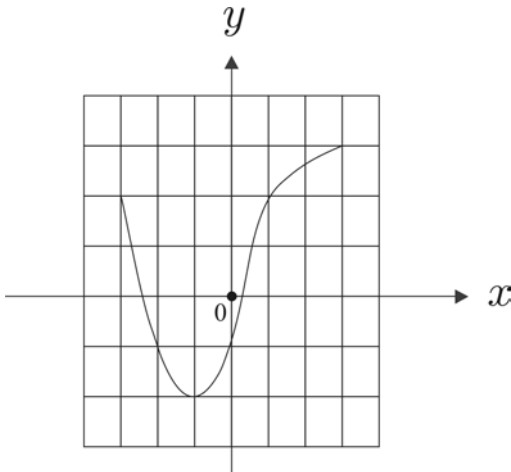


UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
2ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2005.1

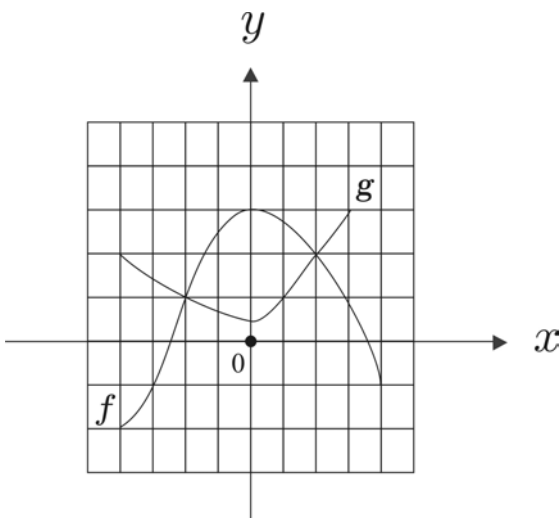
1. Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{4 - \left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right|}$.
2. Se x e y são dois números reais quaisquer, mostre que
 - a) $|xy| = |x||y|$
 - b) $|x + y| \leq |x| + |y|$
3. Se $f(x) = |x^3 - 2x^2 + 3x - 4|$, para $x \in [-3, 2]$, encontre um número real k , tal que $f(x) \leq k$.
4. Se $x \in (1, 4)$, mostre que $f(x) = \left| \frac{x + 2}{x} - 5 \right| < 6$.
5. Considere a função f definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
 - a) Verifique que $f(x) = (x + 2)^2 + 1$.
 - b) Esboce o gráfico de f .
 - c) Qual o menor valor de $f(x)$? Para qual x esse valor é assumido?
6. Verifique que $\sqrt{1 + x^2} - |x| = \frac{1}{|x| + \sqrt{1 + x^2}}$ e, então, conclua que à medida que x cresce, o valor da diferença $\sqrt{1 + x^2} - |x|$ aproxima-se de zero.
7. Seja $y = f(x)$ a função dada a partir da equação $x^2 + y^2 = 4$, para $y \geq 0$.
 - a) Determine uma fórmula que defina explicitamente y como função de x .
 - b) Determine o domínio de f .
 - c) Esboce o gráfico de f .
8. Uma caixa retangular sem tampa, com volume de 2m^3 , tem uma base quadrada. Expresse a área S da superfície da caixa como uma função do comprimento x de um lado da base.
9. À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Sabendo-se que a temperatura do solo é de 20°C e que a temperatura a 1km de altura é de 10°C , expresse a temperatura T , em $^\circ\text{C}$, como uma variável dependente da altura h , medida em km , supondo que um modelo baseado em uma função *afim* seja apropriado. Qual a temperatura a uma altura de $2,5\text{km}$?

10. Suponha que a figura abaixo represente graficamente uma função $y = f(x)$.



- Determine $f(-1)$.
- É correta a estimativa $f(2) \in (2, 3)$?
- Para quais valores de x tem-se $f(x) = 2$?
- Para quantos valores de x tem-se $f(x) = 0$?
- Qual o domínio de f ?
- Qual a imagem de f ?

11. Dados os gráficos das funções f e g , na figura abaixo,



- obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.
- para quais valores de x , $f(x) = g(x)$?
- estabeleça o domínio e a imagem de f .
- estabeleça o domínio e a imagem de g .
- para quantos valores de x , $f(x) = 0$?
- para quantos valores de x , $g(x) = 0$?

Se uma função f satisfaz $f(x) = f(-x)$, para todo x em seu domínio, então f é uma função *par*. Se f satisfaz $f(-x) = -f(x)$, para todo x em seu domínio, então f é uma função *ímpar*.

12. Com base na definição anterior, classifique cada uma das funções abaixo.

- a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = x^2$ c) $h(x) = 2x - x^2$ d) $k(x) = 1 - x^4$

13. Se f é uma função qualquer, definida em $\mathbb{R}$ ou em um intervalo $(-a, a)$, mostre que $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par.

As funções $f:A \rightarrow B$ e $g:A' \rightarrow B'$ são iguais, se $A = A'$ e se, para todo elemento $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

14. Com base na definição anterior, diga se $f = g$ em cada um dos casos abaixo.

- a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|^2$
 c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$ d) $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$

15. Qual a função quadrática f que satisfaz $f(0) = 5$, $f(-1) = 10$ e $f(1) = 6$?

Uma função f é dita *crescente* em um intervalo I , se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, para $x_1 < x_2$, então f é dita *não-decrescente* em I .

Uma função f é dita *decrescente* em um intervalo I , se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. Se $f(x_1) \geq f(x_2)$, para $x_1 < x_2$, então f é dita *não-crescente* em I .

16. Com base na definição acima, mostre que $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$, e decrescente, se $a < 0$.

17. Com relação ao gráfico apresentado na questão 10., identifique os valores de x para os quais f é uma função crescente.

Considere f e g duas funções tais que a imagem de f seja subconjunto do domínio de g ($Im(f) \subseteq D(g)$). Chamamos de *composta de g e f* , e denotamos por $g \circ f$, a função $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo x no domínio de f .

18. Nos casos abaixo, verifique que $Im(f) \subseteq D(g)$ para, assim, determinar a função $h(x) = g(f(x))$.

- a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$
 c) $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$ d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

19. Determine a função f de modo que $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in D(f)$, onde

a) $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

b) $g(x) = x^2 - 2x$, definida para $x \geq 1$.

20. Considere f uma função par e seja $h = g \circ f$. Mostre que h é uma função par. Supondo f uma função ímpar, podemos concluir que h também será?

Uma função f é dita *injetora*, se $\forall y \in Im(f), \exists! x \in D(f)$, com $y = f(x)$, ou, equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2)$ implicar $x_1 = x_2$. f será *sobrejetora*, se para qualquer y no contra-domínio de f , existir x no domínio de f , com $y = f(x)$.

Se uma função f é injetora e sobrejetora, diz-se, então, que f é *bijetora* e, como consequência, sendo

$$\begin{aligned} f: D(f) &\rightarrow Im(f) \\ x &\mapsto f(x) = y, \end{aligned}$$

existirá uma função

$$\begin{aligned} g: Im(f) &\rightarrow D(f) \\ y = f(x) &\mapsto g(y) = x \end{aligned}$$

chamada de *inversa* de f , denotada por $g = f^{-1}$.

21. Verifique que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 5$ é bijetora e determine sua inversa.

22. Se f^{-1} é a inversa da função do exercício anterior, qual é a função $f \circ f^{-1}$?

23. Dê domínio e contra-domínio adequados à função $f(x) = x^2$, de modo que a mesma seja invertível e defina essa inversa.

24. Considere a função $f(x) = \frac{k}{x}$, onde k é uma constante.

Faz-se necessário impor alguma condição sobre a constante k para que f admita uma inversa? Qual é essa inversa?

25. Considere $f: [1/2, +\infty) \rightarrow [b, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2 - x + 1$.

Qual o valor de b para que f seja invertível?

Qual é essa inversa?
