



Cálculo Diferencial e Integral I

Lista de Exercícios N^o 1

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 3$, $f(\sqrt{3}) = 2$ e $f(x+y) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Calcule $f(3+2\sqrt{3})$.

2 Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 2x - 1$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Encontre a expressão que define a função g .

3 Sejam f e g funções reais tais que $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 1$. Encontre a expressão que define a função f .

4 Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ a função definida por $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. Verifique que f é uma bijeção e encontre sua inversa.

5 Resolva as seguintes desigualdades:

(a) $(2x+3)(x+1) \leq 0$, (b) $\frac{2x-3}{x-1} > 5$, (c) $\frac{x^2-9}{x+1} \leq 0$, (d) $(x-1)(x+2)(x-3) \leq 0$,

(e) $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x+4)} \geq 0$, (f) $\left| \frac{x}{1-2x} \right| \leq 4$, (g) $|1-2x| < |x-4|$, (h) $\left| \frac{x+2}{x} \right| \leq 9$.

6 Lembre que, no caso de funções reais, entendemos o domínio de uma função ($D(f)$) como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a função está definida. Nos casos abaixo, para as funções definidas por $f(x)$, determine $D(f)$.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, (b) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, (c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$, (d) $f(x) = (x^2+x)^{\frac{3}{2}}$.

7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela fórmula abaixo. Verifique se f é par ou ímpar.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$; (b) $f(x) = \cos(2x)$; (c) $f(x) = 3x^3 - 3x^2$ (d) $f(x) = x^3 - 3x$.

8 Verifique se as funções abaixo são injetivas e/ou sobrejetivas. Em cada caso, determine $Im(f)$.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3$; (b) $f : [1, 4] \rightarrow [2, 17]$, $f(x) = x^2 + 1$; (c) $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

9 Mostre que as funções abaixo são bijetivas e determine a sua função inversa.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$; (b) $f : \left[-\infty, \frac{-1}{2}\right] \rightarrow \left[\frac{-25}{4}, +\infty\right]$, $f(x) = x^2 - x - 6$

10 Expresse as funções seguintes como a soma de uma função par e uma função ímpar.

(a) $f(x) = |x| + |x-1|$; (b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.