

LISTA COMPLEMENTAR 2ª PROVA.

① $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 , $\nabla^2 f = x^2 + y^2 + z^2$.

Calcular $\int_S \nabla f \cdot \vec{n} \, dS$.

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\vec{n}$ exterior a S .

Solução

Seja W o sólido limitado por S .

Teor. Gauss $\Rightarrow \int_S \nabla f \cdot \vec{n} \, dS = \int_W \nabla^2 f \, dV$

$$= \int_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

Em coord. esféricas temos

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$J = \rho^2 \sin \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

$$W_{\rho\phi\theta}: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Dai

$$\int_S \nabla f \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \rho^4 \sin \phi \, d\phi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^4 (-\cos \phi \Big|_0^\pi) \, d\rho$$

$$\int_S \nabla f \cdot \vec{n} \, ds = 2\pi \int_0^1 \rho^4 (-[-1] - 1) \, d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^1 \rho^4 \, d\rho = \frac{4\pi}{5}$$

② $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 , $\nabla^2 f = x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) = \frac{1}{3}$.

calcular $\int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS$, onde

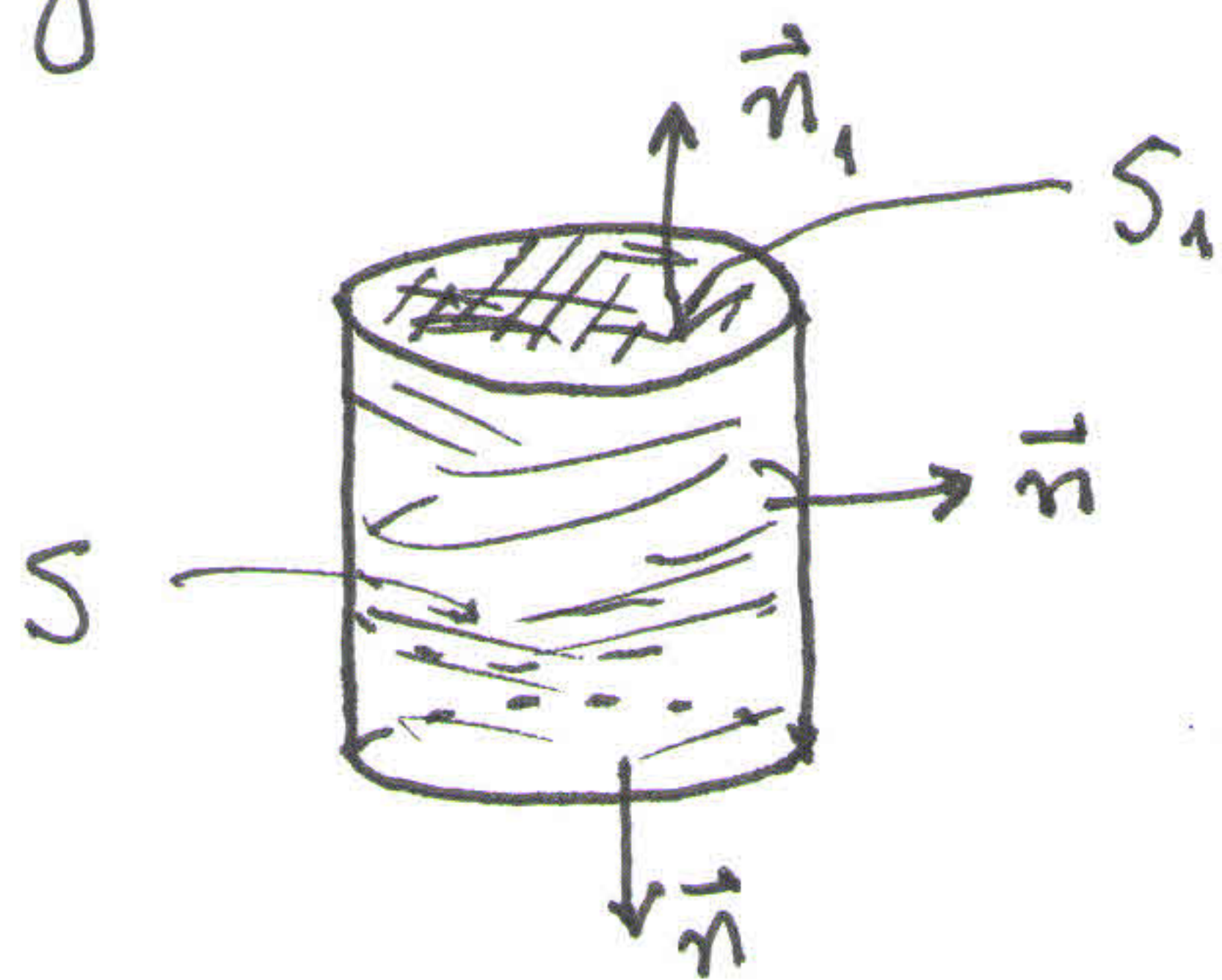
$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1, & z = 0 \end{cases} \quad \vec{n} \text{ exterior a } S$$

Solução

S é uma "lata" cilíndrica com fundo ($x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$) e sem tampa.

Seja S_1 a tampa da lata, $S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$

e sejam $\tilde{S} = S \cup S_1$ e W o sólido limitado por $\tilde{S}$



$$\text{Gauss} \Rightarrow \int_{\tilde{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS = \int_{\tilde{S}} \nabla f \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= \int_W \nabla^2 f \, dV$$

$$\int_W \nabla^2 f \, dV = \int_W (x^2 + y^2) \, dV.$$

Em coord. cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$J = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$W_{r,\theta,z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_W (x^2 + y^2) dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dz d\theta dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{2\pi}{4} = \pi/2.$$

Então

$$\int_{\tilde{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \pi/2$$

Agora

$$\int_{\tilde{S}} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds + \int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds,$$

$$\text{então } \int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \frac{\pi}{2} - \int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds \quad e$$

$$\int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \int_{S_1} \nabla f \cdot \vec{n}_1 ds$$

em S_1 temos $z=1$

e $\vec{n}_1 = \vec{k}$, logo

$$\nabla f \cdot \vec{n}_1 = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) \text{ em } S_1$$

Dai

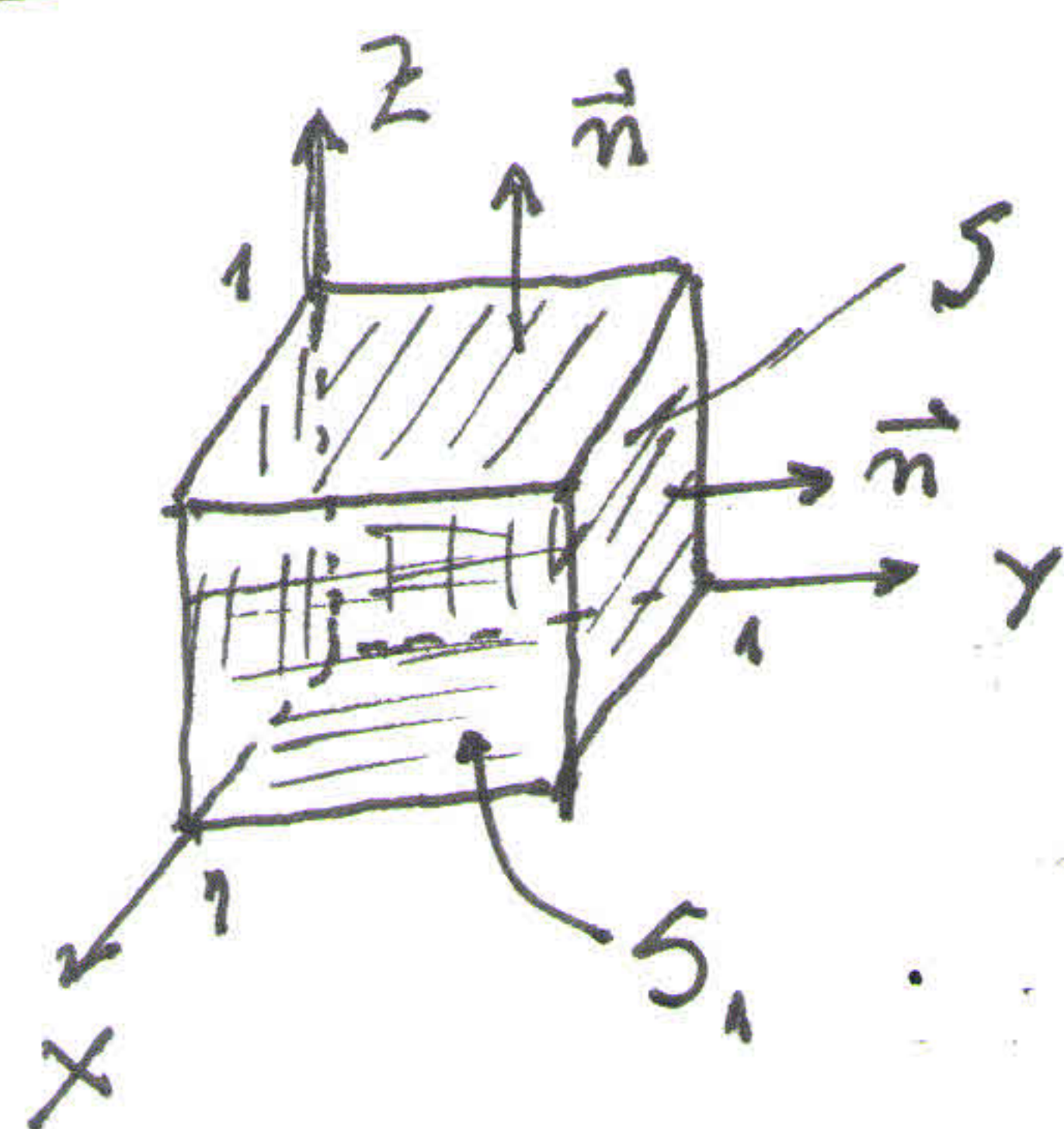
$$\int_{S_1} \nabla f \cdot \vec{n}_1 dS = \int_{S_1} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) dS = \int_{S_1} \frac{1}{3} dS$$

$$= \frac{1}{3} \text{área}(S_1) = \frac{1}{3} \cdot \pi$$

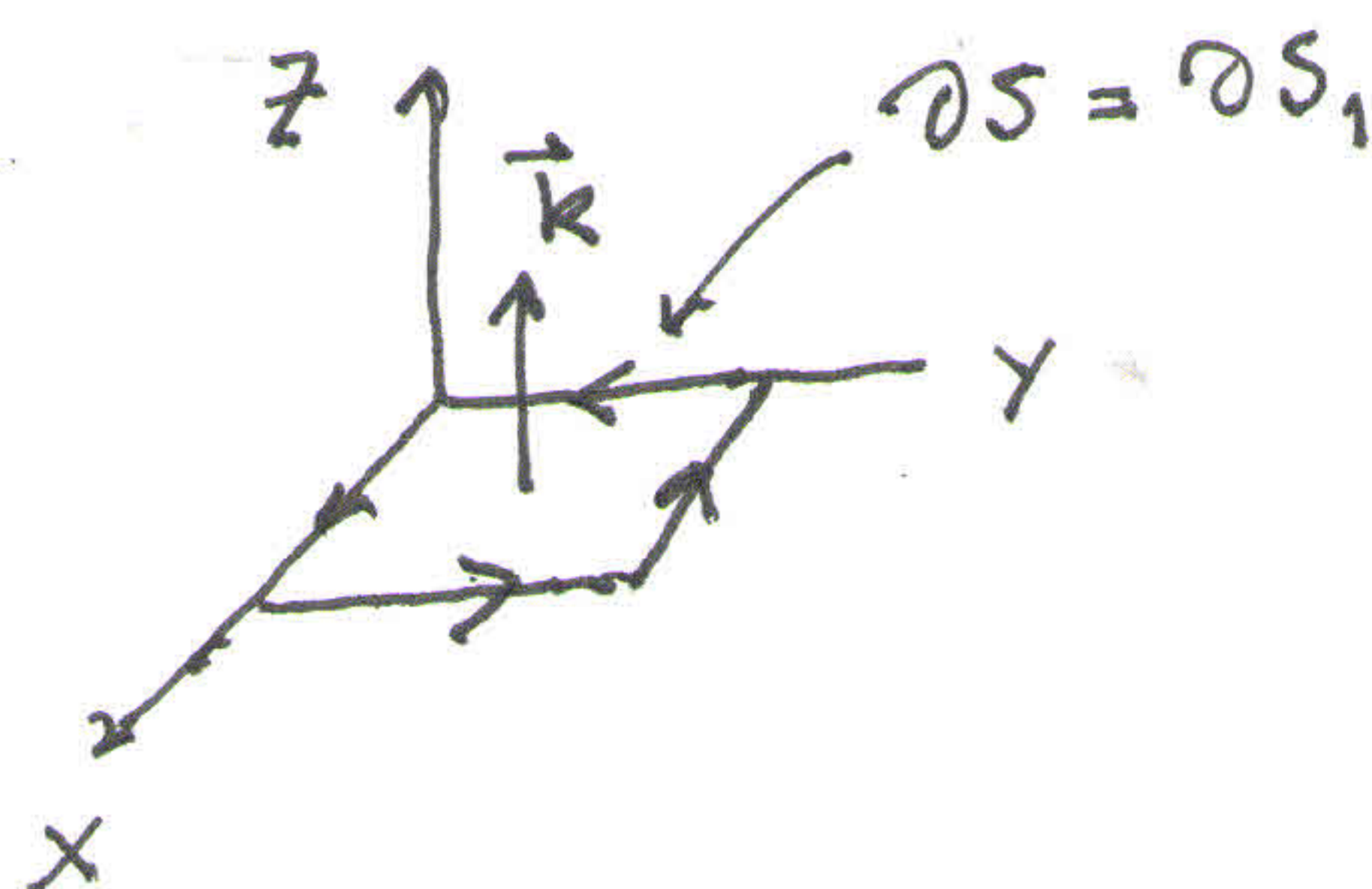
Assim,

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

(3)



$$S_1: \begin{cases} z=0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



$\vec{n}$ é exterior a S , então $C = \partial S$ tem orientação anti horário (quando vista de cima)

$$\vec{F} = (y-z)\vec{i} + (\ln(1+y^2) + yz)\vec{j} + (-xz + z^{20})\vec{k}$$

calcular $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução

stokes

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 dS$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y-z & \ln(1+y^2) + yz & -xz + z^{20} \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{-1} \vec{i} - (-z+1) \vec{j} + (-1) \vec{k}$$

$$= -\vec{i} + (z-1) \vec{j} - \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 &= (-j\vec{i} + (z-1)\vec{j} - \vec{k}) \cdot \vec{k} \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

Logo,
$$\int_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS = \int_{S_1} -1 \, dS = -\text{área}(S_1) = -1$$

$\therefore \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS = -1$

④ C parametrizada por $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 4-4\cos t)$
 $t \in [0, 2\pi]$

$$\vec{F} = (z-y)\vec{i} + \ln(1+y^2)\vec{j} + [y + \ln(1+z^2)]\vec{k}$$

Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

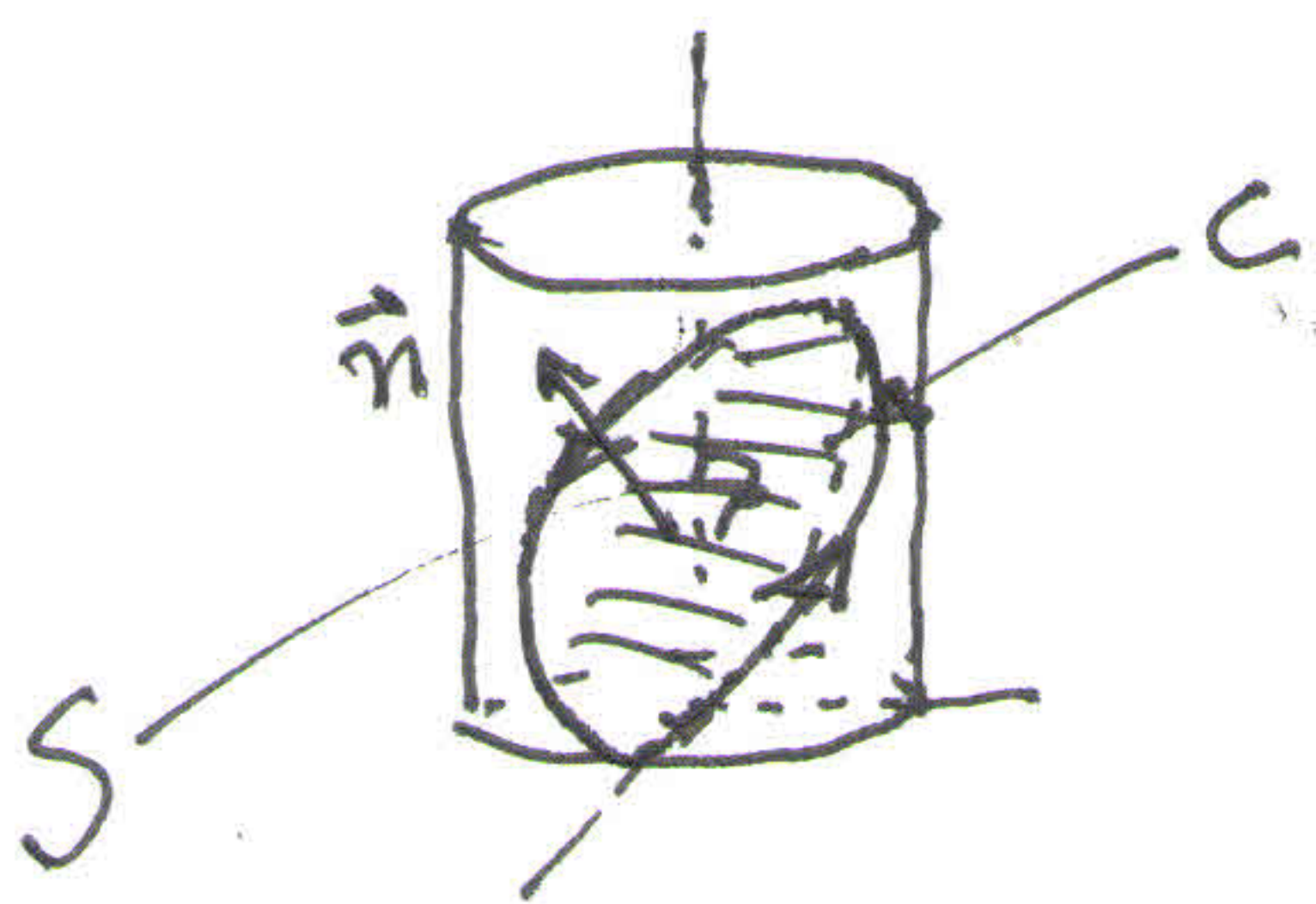
Solução

$$C: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 4-4\cos t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Note que da parametrização de C temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 4 - 4x \end{cases}$$

ou seja, C é interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $z = 4 - x$ orientada no sentido anti horário (certo ??...)



Seja S a parte do plano $z = 4 - x$ limitada por C .

Pela orientação de C temos, $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$

Podemos pensar S como gráfico da função $z = f(x, y) = 4 - x$ definida em $D: x^2 + y^2 \leq 16$. Assim temos:

$$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$$

$$\text{e} \quad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy.$$

$$\text{Stokes} \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-y & \ln(1+y^2) & y + \ln(1+z^2) \end{pmatrix} \\ &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

~~rot(F) = ...~~

$$\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_D 2 \, dx \, dy = 2 \, \text{área}(D)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 32\pi$$

5

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{F} = (e^{-\frac{x^3}{3}} - yz) \vec{i} + (e^{-\frac{y^3}{3}} + xz + 2x) \vec{j} + (e^{-\frac{z^3}{3}} + 5) \vec{k}$$

calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Solução

É claro que vc. não vai nem tentar calcular essa integral diretamente. Então....?

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{-\frac{x^3}{3}} - yz & e^{-\frac{y^3}{3}} + xz + 2x & e^{-\frac{z^3}{3}} + 5 \end{pmatrix}$$

$$= -x \vec{i} + \dots \neq \vec{0}$$

$\therefore \vec{F}$ não é conservativo.

Resta...? ... Stokes

É claro que C é interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 2$ orientada no sentido anti horário (quando vista de cima).

Seja S a superfície, no plano $z = 2$, limitada por C pela orientação de C , $\vec{n} = \vec{k}$

$$S: \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \quad ds = dx dy$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} ds \quad \text{rot}(\vec{F}) = * \hat{i} + ** \hat{j} + (2+2z) \hat{k}$$

(Faça a conta)

em S , $\text{rot}(\vec{F}) = (*, **, 6)$

$$\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} ds = \int_S 6 ds = 6 \text{ área}(S)$$

$$= 6 \cdot \pi //$$

⑥ $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

$$\oint_C (3y+z)dx + (x+4)dy + (2x+y)dz = \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi$$

Qual a orientação de C ?

Solução

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

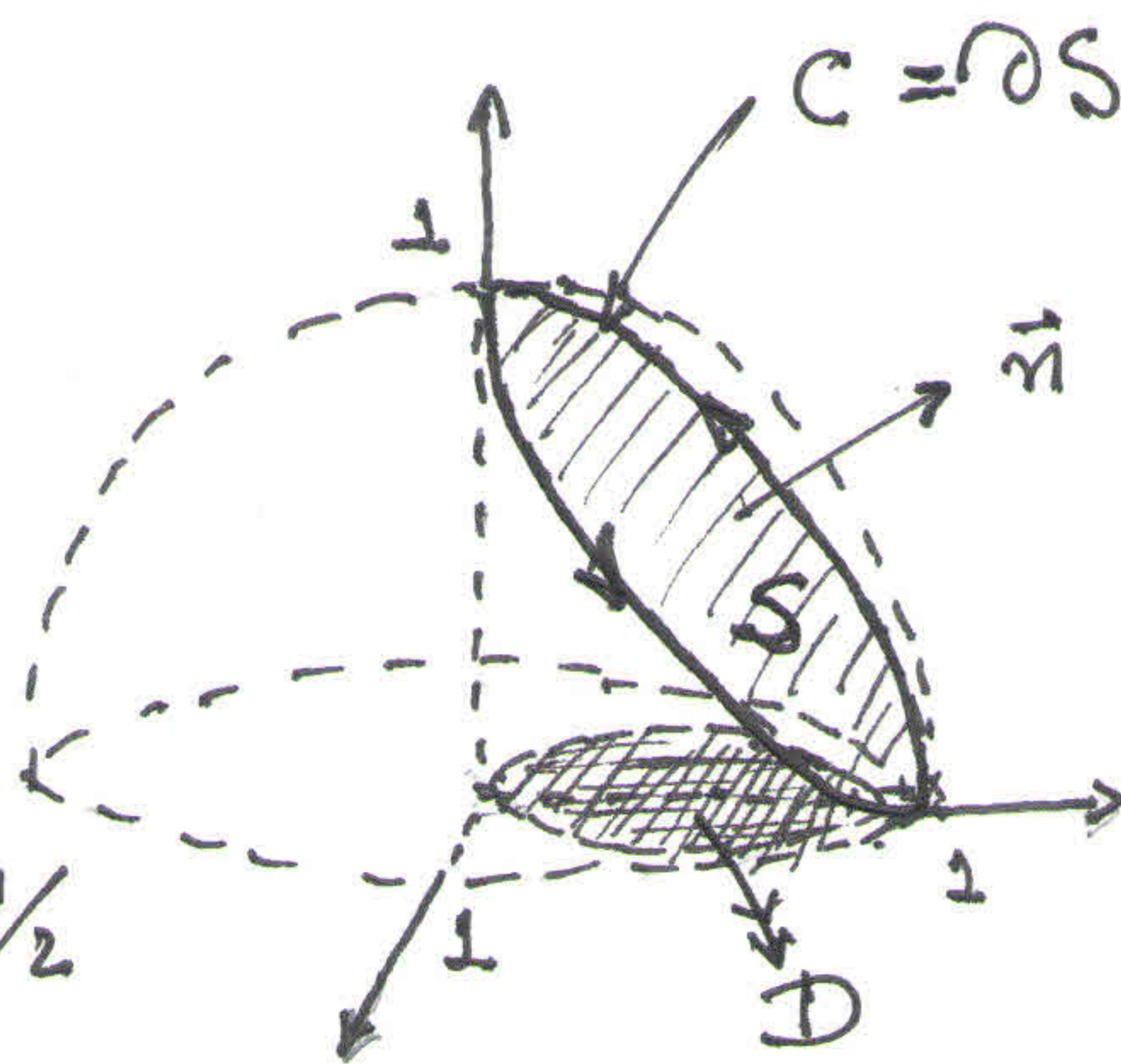
$$y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - y$$

$$x^2 + y^2 + (1-y)^2 = 1$$

$$x^2 + 2y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} &= 1 \end{aligned} \right.$$



A projeção de C sobre o plano XY é a elipse 9

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Seja S a parte do plano $y+z=1$ limitada pela curva C vamos escolher $\vec{n}$ t.q. $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

i.e. $\vec{n} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

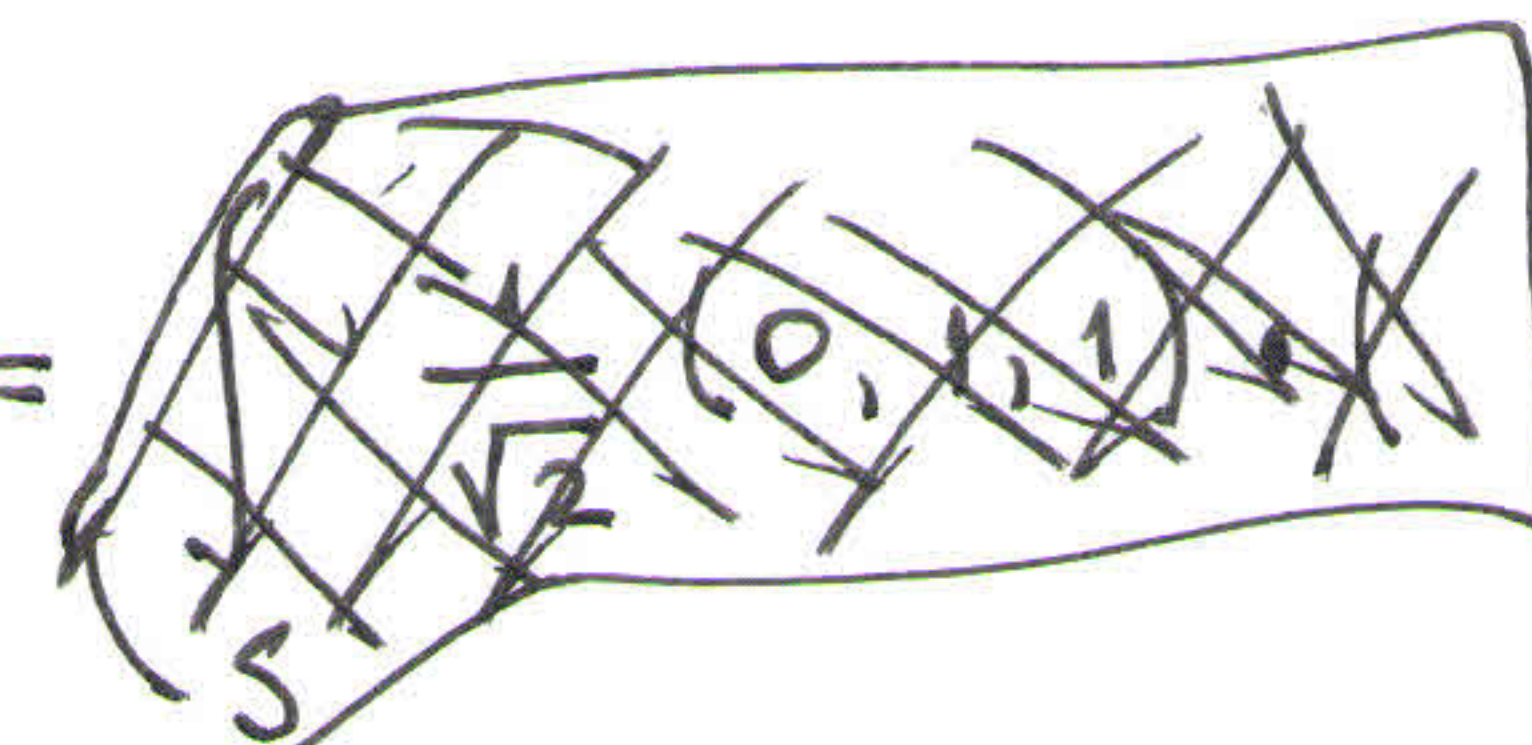
Note que a escolha de $\vec{n}$ implica numa escolha de orientação para a curva C .

Se $\vec{F} = (3y+z)\vec{i} + (x+4)\vec{j} + (2x+y)\vec{k}$, então

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y+z & x+4 & 2x+y \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

Pelo Teor. de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS =$$


$$= \int_D (1, -1, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1) \cdot \sqrt{2} \, dx \, dy$$

$$= \int_D -3 \, dx \, dy = -3 \, \text{área}(D) = -3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

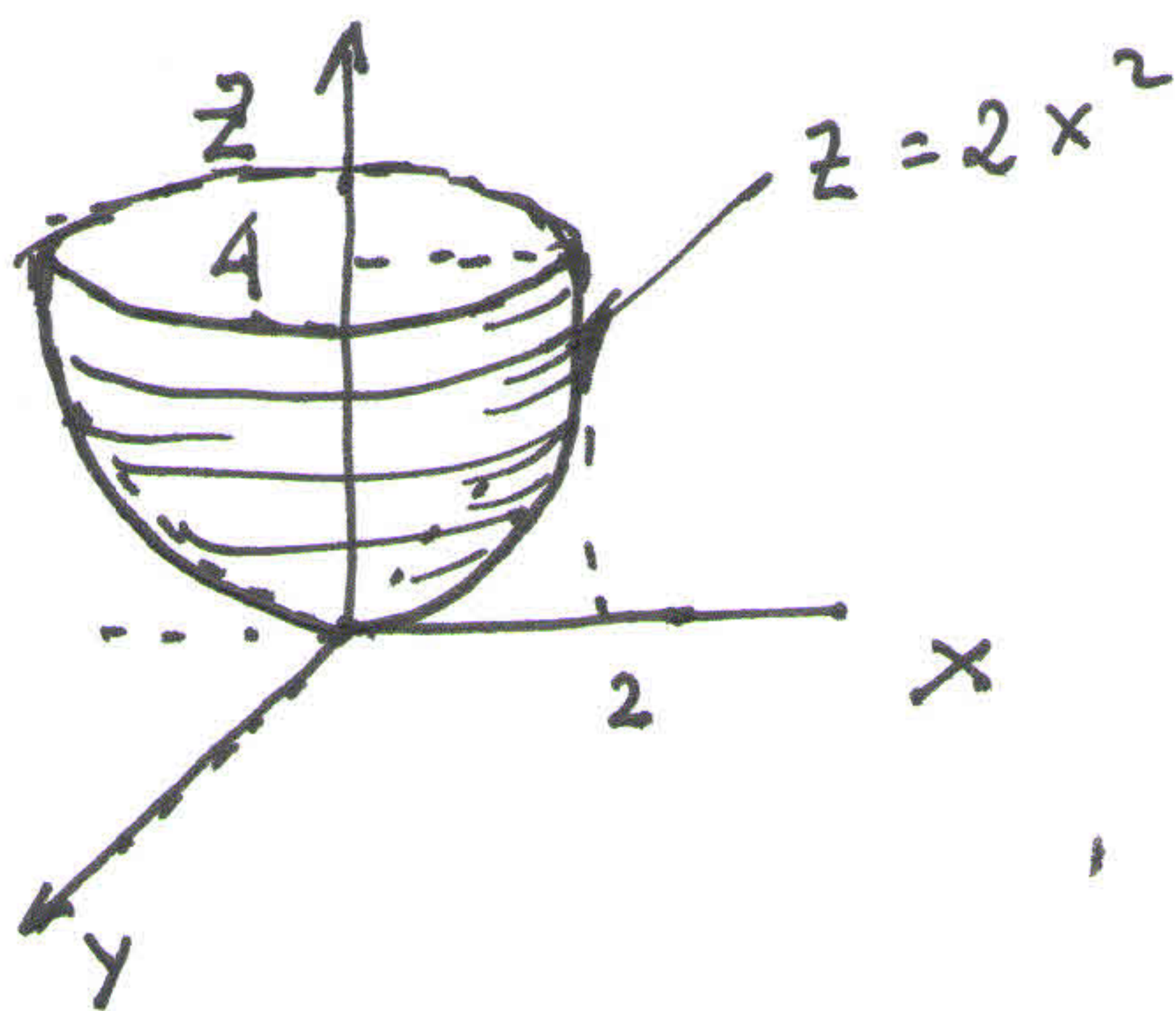
$$= -\frac{3}{4} \sqrt{2} \pi$$

Então, para termos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3}{4} \sqrt{2} \pi$ deveríamos tomar $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1)$ e a orientação de C seria ao contrário

$$(7) \quad C: \begin{cases} z = 2x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

A superf. de revolução obtida girando C em torno do eixo z . Parametrizar S e calcular $\text{área}(S)$

Solução



Podemos parametrizar C por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 2t^2, & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Assim, uma parametrização para S é

$$\begin{aligned} f(t, \theta) &= (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)) \\ &= (t \cos \theta, t \sin \theta, 2t^2), \quad t \in [0, 2] \\ &\quad \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

$$S: \begin{cases} f: D \rightarrow \mathbb{R}^3, f(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 2t^2) \\ D: \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{área}(S) = \int_S dS = \int_D \|f_t \times f_\theta\| dt d\theta.$$

$$f_t = (\cos \theta, \sin \theta, 4t)$$

$$f_\theta = (-t \sin \theta, t \cos \theta, 0)$$

$$f_t \times f_\theta = (-4t^2 \cos \theta, -4t^2 \sin \theta, t)$$

$$\begin{aligned} \|f_t \times f_\theta\| &= \sqrt{16t^4 \cos^2 \theta + 16t^4 \sin^2 \theta + t^2} \\ &= \sqrt{16t^4 + t^2} = t \sqrt{16t^2 + 1} \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{área}(S) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} t \sqrt{16t^2 + 1} d\theta dt$$

$$= 2\pi \int_0^2 t \sqrt{16t^2 + 1} dt$$

$$= \dots = \frac{\pi}{24} (65\sqrt{65} - 1)$$

8

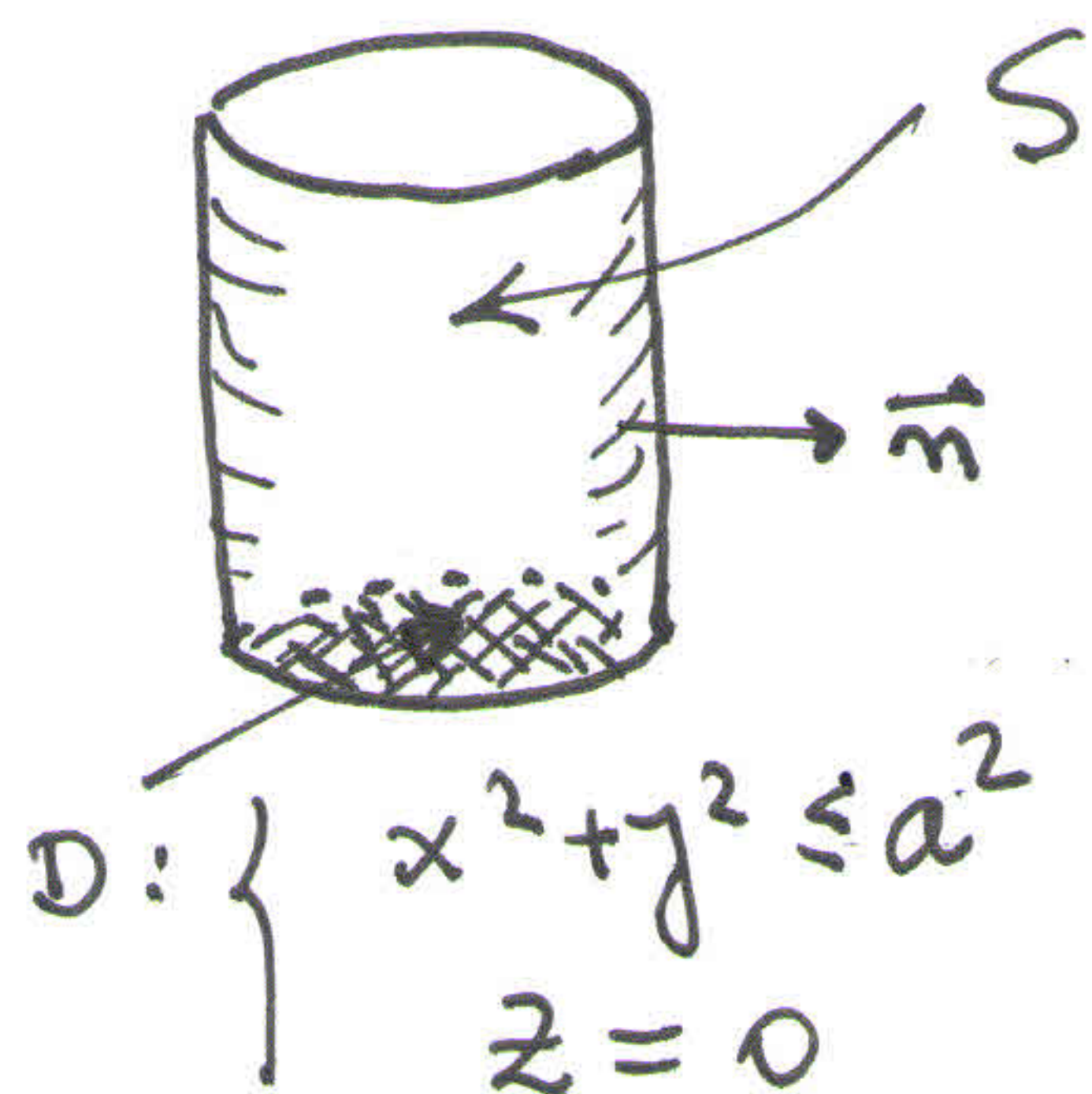
$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, & 0 \leq z \leq \sqrt{a} \\ x^2 + y^2 \leq a^2, & z = 0 \end{cases}$$

$$\underline{a > 0}$$

$$\vec{F} = (x + z \cos y) \vec{i} + (x - y + z) \vec{j} + (z^4 - 3a^2) \vec{k}$$

O fluxo de $\vec{F}$ através de S , de dentro para fora, é $a^3 \pi$.
calcular a .

Solução



S é uma "lata" cilíndrica com fundo e sem tampa.

$$\text{Seja } S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = \sqrt{a} \end{cases}$$

a "tampa" da lata

Tomemos $\tilde{S} = S \cup S_1$, como o fluxo através de S é de dentro para fora, o normal de S é exterior, assim o normal de S_1 tem que ser $\vec{k}$.

$$\text{Gauss} \Rightarrow \int_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_W \text{div}(\vec{F}) \, dV$$

onde W é o sólido limitado por $\tilde{S}$.

$$\text{div}(\vec{F}) = 1 - 1 + 4z^3 = 4z^3$$

Em coord. cilíndricas podemos descrever W como:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \\ dV &= r \, dr \, d\theta \, dz \end{aligned}$$

$$W: \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\int_W \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}} 4rz^3 dz d\theta dr$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} rz^4 \Big|_0^{\sqrt{a}} d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^a a^2 r dr = 2\pi \cdot a^2 \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$= \pi a^4$$

$$\therefore \int_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \pi a^4, \text{ mas}$$

$$\int_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \underbrace{\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds}_{a^3 \pi} + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = a^3 \pi + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

Em S_1 temos $\vec{n}_1 = \vec{k}$, logo em S_1 : $\vec{F} \cdot \vec{n} = z^4 - 3a^2$
e como (em S_1) $z = \sqrt{a}$, temos $\vec{F} \cdot \vec{n} = a^2 - 3a^2 = -2a^2$

Dai

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \int_{S_1} 2a^2 ds = -2a^2 \operatorname{área}(S_1) = -2a^2 \cdot \pi a^2$$

$$= -2\pi a^4$$

$$\therefore \begin{aligned} \pi a^4 &= a^3 \pi - 2\pi a^4 \\ a^3 + a^4 &= 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$\pi a^4 = a^3 \pi - 2\pi a^4 \Rightarrow 3\pi a^4 = a^3 \pi$$

$$\Rightarrow 3a = 1$$

$$\Rightarrow a = 1/3$$

⑨ $S = S_1 \cup S_2$ orientada positivamente

14

$$S_1: \begin{cases} z = 4 - 2x^2 - y^2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} z = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 1 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$\vec{F} = (-y + ze^x)\vec{i} + (x + \cos(yz))\vec{j} + xy\vec{k}$$

Calcular $\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds$

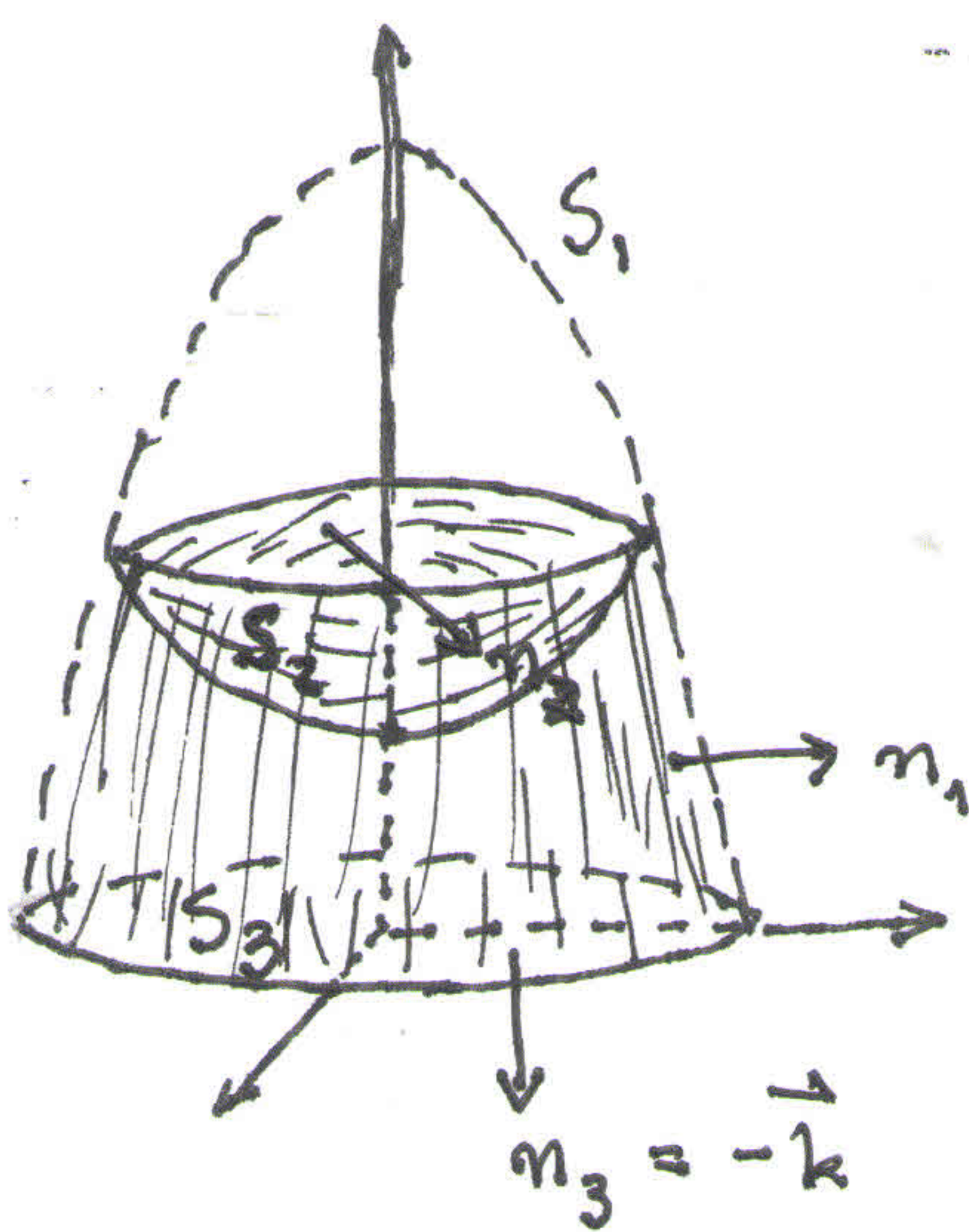
Solução:

Seja S_3 a superf.

$$S_3: \begin{cases} z = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

$$D: 2x^2 + y^2 \leq 4$$

orientada por $\vec{n}_3 = -\vec{k}$



Em $\tilde{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ podemos aplicar o Teor de Gauss

Denote por W o sólido limitado por $\tilde{S} = S \cup S_3$. Temos

$$\int_{\tilde{S}} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = \cancel{\int_W \text{div}(\text{rot}(\vec{F})) \, dV} \int_W \text{div}(\text{rot}(\vec{F})) \, dV$$

mas, $\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = 0$. Assim,

$$\int_{\tilde{S}} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = 0.$$

Agora $\int_{\tilde{S}} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = \int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds + \int_{S_3} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \dots = x\vec{i} + xx\vec{j} + 2\vec{k}$$

Dai

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{S_3} -2 \, dS = -2 \text{área}(S_3) \\ &= -2\pi\sqrt{2} \cdot 2 = \underline{\underline{-4\sqrt{2}\pi}} \end{aligned}$$

Logo

$$\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = - \int_{S_3} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = 4\sqrt{2}\pi //$$
