



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

<http://www.mat.ufpb.br>

Lista de Exercícios Nº 6 : Cálculo III

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 Em cada item abaixo, use o teorema de Stokes para transformar $\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$ em uma integral de linha e calcule essa integral.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2y \vec{i} + 2y^3z \vec{j} + 3z \vec{k}$, S é a superfície parametrizada por $\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r)$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e normal $\vec{n}$ apontando para fora. Resp. $\frac{\pi}{4}$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{k}$, S é a superfície parametrizada por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, com $u^2 + v^2 \leq 1$ e normal $\vec{n}$ apontando para cima. Resp. 0.

2 Sejam $\vec{F}(x, y, z) = (2x + e^z) \vec{i} + (3y - ze^x) \vec{j} + (z - 2) \vec{k}$ e S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ acima do plano XY . Se o fluxo de $\vec{F}$ através de S na direção da normal exterior $\vec{n}$ é igual a $2\pi a^3$, determine o valor de a (raio da esfera). Resp. 1.

3 Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x + f(y, z)) \vec{i} + (x - y + z) \vec{j} + (z^4 - 3a^2) \vec{k}$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 . Seja S uma lata cilíndrica dada por $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, $a \geq 0$. com fundo $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$, e sem tampa. Se o fluxo de $\vec{F}$ através de S , de dentro para fora é igual a πa^3 , calcule o valor de a . Resp. $\frac{1}{3}$.

4 Use o teorema de Gauss para determinar o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S orientada positivamente, onde:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 + y^2) \vec{i} + (y^2 - 2zy) \vec{j} + (4x - 2yx) \vec{k}$ e S é a fronteira do sólido W dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 3$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin z) \vec{i} + (y^3 + z \sin x) \vec{j} + z^3 \vec{k}$, S é o bordo do sólido W limitado pelo plano $z = 0$ e os hemisférios $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z) \vec{i} + (x^2y + \sin z) \vec{j} + e^y \vec{k}$, S é a fronteira do sólido W limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

5 Calcule

$$I = \oint_C (e^{\frac{-x^3}{3}} - yz) dx + (e^{\frac{-y^3}{3}} + xz + 2x) dy + (e^{\frac{-z^3}{3}} + 5) dz$$

onde C é a circunferência parametrizada por $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 2)$.

6 Calcule

$$\int_C (y^2 \cos(x) + z^3) dx - (4 - 2y \sin(x)) dy + (3xz^2 + 2) dz$$

onde C é a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.