



Lista de Exercícios Nº 4 : Cálculo III
Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 Determine adivergência e o rotacional dos campos de vetores dados abaixo.

(a) $F(x, y, z) = (xyz^2, xy^3z, xyz^3)$ (b) $F(x, y, z) = (e^x \cos y, e^x \sin y, e^z)$

(c) $F(x, y, z) = (\cos xy, \cos yz, \sin xz)$ (d) $F(x, y, z) = (\sin y \cos x, \cos xz, \cos yz)$

2 Sejam $F(x, y, z) = (ye^x, xe^y, z^2)$ e $G(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule:

(a) $\nabla \times (F \times G)$ (b) $(\nabla \times F) \times G$ (c) $(\nabla \times F) \times (\nabla \times G)$.

3 Determine se os campos abaixo são conservativos, caso afirmativo, encontre um potencial.

(a) $F(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy, e^z + x^2)$ (b) $F(x, y, z) = (xy \cdot e^x, e^z)$

(c) $F(x, y, z) = (e^x, 2e^y, 3e^z)$

(d) $F(x, y, z) = (6xy + z^3, 3x^2 - z, 3xz^2 - y)$

(e) $F(x, y, z) = (1 + y \sin xz, 1 - \cos xz, z)$

(f) $F(x, y, z) = (\ln(xy), \ln(yz), \ln(xz))$.

4 Verifique as seguintes identidades:

(a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;

(b) $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \operatorname{grad}(f) \cdot F$;

(c) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot}(F) - F \cdot \operatorname{rot}(G)$.

5 Determine o valor das constantes a , b e c de modo que os campos abaixo sejam irrotacionais.

(a) $F(x, y, z) = (axy - z^3, (a - 2)x^2, (1 - a)xz^2)$;

(b) $F(x, y, z) = (x + 2y + az, bx - 3y - z, 4x + cy + 2z)$.

6 Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \frac{-1}{x^2 + y^2}$.

(a) Verifique que F é um campo conservativo e ache um potencial para F ;

(b) Verifique que $\operatorname{div}(F) = 0$.

7 Para uma função $f = f(x, y, z)$ de classe C^2 em um aberto de $\mathbb{R}^3$ definimos o Laplaciano de f como:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Verifique as seguintes identidades:

(a) $\Delta(f) = \text{div}(\text{grad}(f));$

(b) $\text{div}(f \text{grad}(f)) = f \Delta(f) - ||\text{grad}(f)||^2;$

(c) $\Delta(fg) = f \Delta(g) + g \Delta(f) + 2 \nabla(f) \cdot \nabla(g).$

8 Uma função $f = f(x, y, z)$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ diz-se harmônica sse $\Delta(f) = 0$. Verifique que as funções abaixo são harmônicas.

(a) $f(x, y, z) = xz + \ln(xy);$

(b) $f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \cos x;$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$

9 Verifique que todo campo de vetores da forma $F(x, y, z) = (A(x), B(y), C(z))$, onde A , B e C são funções diferenciáveis, é irrotacional.