

3. Integrais de Linha

3.1	Integral de Linha de um Campo Escalar	40
3.2	Aplicações da Integral de linha de Campos Escalares	43
3.3	Campos de Vetores	44
3.4	Alguns Operadores Diferenciais	46
3.5	Campos Conservativos	48
	3.5.1 Determinação do Potencial de um Campo Conservativo	
3.6	Integral de Linha de um Campo Vetorial	50
3.7	O teorema de Green	55

Neste capítulo estudaremos integrais de de campos, escalares e vetoriais, sobre uma curva C .

3.1 Integral de Linha de um Campo Escalar

Dada uma função contínua $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e uma curva $C \subset A$ queremos definir $\int_C f ds$

A função f como definida acima diz-se um **Campo Escalar sobre** $A \subset \mathbb{R}^3$

Seja $\alpha : I = [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma parametrização da curva C . suponhamos que α é de classe C^1 , ou seja, as funções $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas. Seja $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\Delta t = t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dessa forma, temos dividido o intervalo $[a, b]$ em n -subintervalos I_1, I_2, \dots, I_n todos com o mesmo comprimento Δt . A curva C fica dividida em n sub-arcos C_1, C_2, \dots, C_n de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$; onde $\Delta s_j \approx \|\alpha'(t_j^*)\| \Delta t$, para algum $t_j^* \in I_j = [t_{j-1}, t_j]$

Consideramos a soma

$$\sum_{j=1}^n f(\alpha(t_j^*)) \Delta s_j = \sum_{j=1}^n f(\alpha(t_j^*)) \|\alpha'(t_j^*)\| \Delta t$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\alpha(t_j^*)) \|\alpha'(t_j^*)\| \Delta t$ existe e não depende da escolha da partição do intervalo $[a, b]$ nem dos pontos $t_j^* \in I_j$ dizemos que esse número é a integral de linha do campo escalar f sobre a curva α , escrevemos:

$$\int_C f ds = \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\alpha(t_j^*)) \|\alpha'(t_j^*)\| \Delta t$$

Observações:

(1) Se f é contínua, sabemos que o limite acima existe. Logo,

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

(2) Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e C é uma curva em $A \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I = [a, b]$ com α de classe C^1 , então

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

(3) Para $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e C curva em $A \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I = [a, b]$ de classe C^1 , a situação é completamente análoga:

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

(4) Se $f \equiv 1$, então

$$\int_C f ds = \int_C ds = \text{comprimento de } C.$$

(5) Se a curva C é C^1 por partes, ou seja a parametrização $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua e existe uma partição do intervalo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de modo que $\alpha|_{(t_{j-1}, t_j)} : (t_{j-1}, t_j) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 , então

$$\int_C f ds = \sum_{j=1}^k \int_{C_j} f ds, \quad \text{onde } C_j = \alpha((t_{j-1}, t_j))$$

(6) Se C^- representa a curva C percorrida no sentido contrário, então

$$\int_{C^-} f ds = \int_C f ds$$

Ou seja, a integral de linha não depende da orientação da curva C ;

(7) A integral de linha não depende da parametrização da curva C .

Exemplo 3.1 Calcular $\int_C f ds$, onde C é parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ com $t \in [0, 1]$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 1 + xyz$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^1 f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ f(\alpha(t)) &= f(t^2, t^3, 0) = 1 + t^2 \cdot t^3 \cdot 0 = 1 \\ \alpha'(t) &= (2t, 3t^2, 0), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2} dt \quad \begin{cases} u &= 4 + 9t^2 \\ du &= 18t dt \\ t=0 &\Rightarrow u=4 \\ t=1 &\Rightarrow u=13 \end{cases} \\ &= \int_4^{13} \frac{1}{18} \sqrt{u} du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{13} \\ &= \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 4\sqrt{4}) = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8).\end{aligned}$$

Exemplo 3.2 Calcular $\int_C f ds$, onde C é a hélice parametrizada por $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), at)$ com $a > 0$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}$

Solução:

$$f(\gamma(t)) = e^{a^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t) + at - a^2} = e^{at}$$

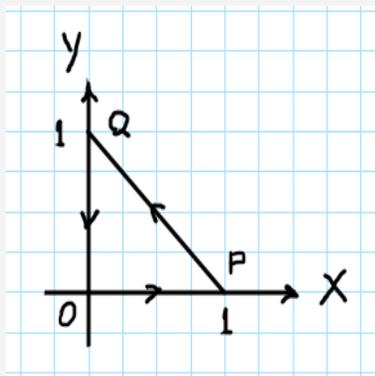
$$\gamma'(t) = (a \sin(t), a \cos(t), a), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^{4\pi} e^{at} \cdot a\sqrt{2} dt = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{4\pi} \\ &= \sqrt{2} (e^{4\pi a} - 1).\end{aligned}$$

Exemplo 3.3 Calcular $\int_C (x-y) ds$, onde C é o triângulo de vértices $O = (0, 0)$, $P = (1, 0)$ e $Q = (0, 1)$

Solução:



Vamos pensar $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde C_1 , C_2 e C_3 são parametrizadas, respectivamente, por: $\alpha_1(t) = (t, 0)$, $\alpha_2(t) = (1 - t, t)$ e $\alpha_3(t) = (0, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$. Dessa forma, $\int_C f ds = \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} f ds$.

$$\alpha_1(t) = (t, 0), \quad \alpha_1'(t) = (1, 0), \quad \|\alpha_1'(t)\| = 1 \quad \int_{C_1} (x - y) ds = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha_2(t) = (1 - t, t), \quad \alpha_2'(t) = (-1, 1), \quad \|\alpha_2'(t)\| = \sqrt{2} \quad \int_{C_2} (x - y) ds = \sqrt{2} \int_0^1 (1 - t - t) dt = 0.$$

$$\alpha_3(t) = (0, 1 - t), \quad \alpha_3'(t) = (0, -1), \quad \|\alpha_3'(t)\| = 1 \quad \int_{C_3} (x - y) ds = \int_0^1 (-1 + t) dt = -\frac{1}{2}.$$

Daí, $\int_C (x - y) ds = \frac{1}{2} + 0 + -\frac{1}{2} = 0$.

Note que a orientação escolhida para o triângulo não interfere no resultado final.

3.2 Aplicações da Integral de linha de Campos Escalares

Suponhamos que a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ representa um arame “muito fino” de densidade $f = f(x, y, z)$ no ponto $(x, y, z) \in C$. Então valem as seguintes fórmulas:

- (1) **Comprimento do arame** (comprimento da curva C)

$$L(C) = \int_C ds$$

- (2) **Massa do arame**

$$M = \int_C f ds$$

- (3) **Centro de Massa**, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x f(x, y, z) ds \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y f(x, y, z) ds \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z f(x, y, z) ds$$

- (4) **Momento de Inércia com relação a uma reta l**

$$I_l = \int_C d^2(x, y, z) \cdot f(x, y, z) ds, \quad \text{onde } d(x, y, z) \text{ é a distância do ponto } (x, y, z) \in C \text{ à reta } l.$$

(5) Valor Médio de f ao Longo de C

$$\bar{M} = \frac{1}{L(C)} \int_C f ds$$

Por exemplo, se f representa a temperatura, a média de temperatura no arame é dada por \bar{M} .

Exemplo 3.4 Calcular a massa de um arame fino que tem o formato da hélice $\alpha(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t), 4t)$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, se a densidade de massa é $f(x, y, z) = \frac{kx}{1+y^2}$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Solução:

$$M = \int_C f ds = \int_C \frac{kx}{1+y^2} ds = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos(t)}{1+9 \sin^2(t)} \cdot 5 dt = 5k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos(t)}{1+(3 \sin(t))^2} dt$$

$$(\alpha'(t) = (-3 \sin(t), 3 \cos(t), 4), \quad \|\alpha'(t)\|^2 = 9 \sin^2(t) + 9 \cos^2(t) + 16 = 25 \quad \therefore \|\alpha'(t)\| = 5)$$

$$\text{Fazendo: } \begin{cases} u = 3 \sin(t) & | & t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ du = 3 \cos(t) dt & | & t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 3 \end{cases} \quad \text{Obtemos:}$$

$$M = 5k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos(t)}{1+(3 \sin(t))^2} dt = 5k \int_0^3 \frac{du}{1+u^2} = 5k \arctan(u) \Big|_0^3 = 5k \arctan(3).$$

3.3 Campos de Vetores

Definição 3.5 Um campo de vetores em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Em geral, $A \subset \mathbb{R}^n$ será um subconjunto aberto.

Definição 3.6 Dizemos que o campo de vetores $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo, diferenciável, ou de classe C^k no ponto $p \in A$, se todas as suas funções coordenadas $F_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são, respectivamente, contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $p \in A$.

\vec{F} é contínuo, diferenciável, ou de classe C^k em A , se ele é contínuo, diferenciável, ou de classe C^k em todos os pontos de A .

Para o caso particular em que $n = 2$ ou $n = 3$, usaremos as seguintes notações:

$n = 2$

$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

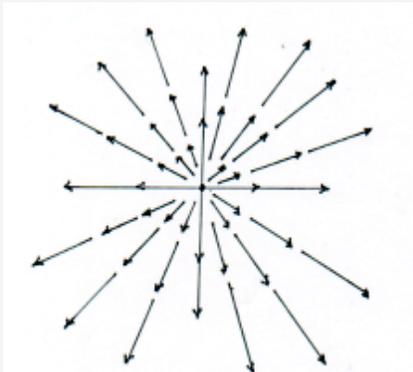
Aqui \vec{i} e \vec{j} denotam respectivamente, os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ em \mathbb{R}^2 .

$n = 3$

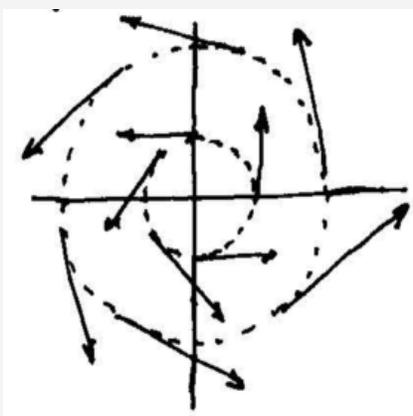
$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

onde, neste caso, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Exemplo 3.7 O campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é representado abaixo



Exemplo 3.8 $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ tem a seguinte representação geométrica



Exemplo 3.9 O campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= \frac{k}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z) \\ &= \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k} \end{aligned}$$

é dito *Campo Radial de Quadrado Inverso*, ele não está definido na origem e quanto mais afastado da origem menor é a norma de \vec{F}

$$\|\vec{F}(x, y, z)\| = \frac{|k|}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{|k|}{\|(x, y, z)\|^2}$$

A norma de \vec{F} é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto (x, y, z) à origem.

O campo elétrico gerado por uma partícula carregada é um campo radial de quadrado inverso. De fato,

Lei de Coulomb: A força entre duas partículas eletricamente carregadas é diretamente proporcional ao módulo de suas cargas e é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

A força que atua numa partícula de carga q na posição $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, devido a uma carga Q situada na origem é um campo radial de quadrado inverso, com $k = \epsilon Qq$, $\epsilon > 0$.

Outro campo radial de quadrado inverso aparece quando consideramos a lei de gravitação universal de Newton, esta afirma que se uma partícula fixa de massa m_0 está localizada na origem, então a força exercida sobre uma partícula de massa m localizada no ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um campo radial de quadrado inverso, com $k = -Gmm_0$, onde G é a constante gravitacional, $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Exemplo 3.10 Dada uma função escalar diferenciável (Campo Escalar) $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o gradiente de f , ∇f é um campo vetorial chamado Campo Gradiente.

Se $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, então $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

3.4 Alguns Operadores Diferenciais

Definição 3.11 Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ um campo vetorial definido num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$. Definimos:

1. Divergente de \vec{F} : É o campo escalar dado por

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

2. Rotacional de \vec{F} É o campo vetorial dado por

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Considere o operador diferencial vetorial dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Por exemplo, se f é uma função escalar (ou campo escalar), então

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad \text{é o gradiente de } f.$$

O “produto vetorial” de ∇ com o campo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é

$$\nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Ou seja,

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot}(\vec{F}).$$

O “Produto interno” de ∇ com o campo \vec{F} é

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \vec{F} \rangle &= \nabla \cdot \vec{F} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (P, q, r) \right\rangle \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div}(\vec{F}). \end{aligned}$$

Logo

$$\text{div}(\vec{F}) = \langle \nabla, \vec{F} \rangle.$$

Exemplo 3.12 Calcular o divergente e o rotacional do campo

$$\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$$

Solução:

$$\text{div}(\vec{F}) = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y} xz + \frac{\partial}{\partial z} xy = 0$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = (x-x) \vec{i} + (y-y) \vec{j} + (z-z) \vec{k} = \vec{0}$$

Se $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$, então $\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$



Exemplo 3.13 Para $\vec{F}(x, y) = (x \cos(y) + y \cos(x)) \vec{i} + (y \sin(x) - x \sin(y)) \vec{j}$ temos:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = (y \cos(x) - \sin(y) + x \sin(y) - \cos(x)) \vec{k}$$

Exercício 3.1 Sejam f e \vec{F} de classe C^2 . Verifique as seguintes propriedades:

- (1) $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$, ou $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$;
- (2) $\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0$, ou $\langle \nabla, \nabla \times \vec{F} \rangle = 0$;
- (3) $\text{div}(\nabla f) = \Delta f$, onde, $\Delta f = \nabla^2 f$ $\left(\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$;
- (4) $\nabla(f \cdot \vec{F}) = f \langle \nabla, \vec{F} \rangle + \langle \nabla f, \vec{F} \rangle$.

3.5 Campos Conservativos

Definição 3.14 Dizemos que o campo vetorial $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo conservativo (ou gradiente) se existe uma função escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , tal que $\nabla f = \vec{F}$.

A função f é chamada Potencial do Campo \vec{F} .

Exemplo 3.15 O campo $\vec{F}(x, y, z) = yze^{xyz}\vec{i} + xze^{xyz}\vec{j} + xye^{xyz}\vec{k}$ é conservativo já que para $f(x, y, z) = e^{xyz}$ temos $\nabla f = \vec{F}$.

Exemplo 3.16 $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$ é conservativo. De fato, se $f(x, y) = x^2y + y^3 + C$, com $C \in \mathbb{R}$ constante, então $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$. Logo, $\nabla f = \vec{F}$.

Proposição 3.17

(1) Para $n = 3$, se $\text{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$, então \vec{F} não é conservativo;

(2) Para $n = 2$, se $\vec{F} = (P, Q)$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, então \vec{F} não é conservativo.

Demonstração:

(1) Se \vec{F} é um campo conservativo, então $\vec{F} = \nabla f$ e do Exercício temos $\text{rot}(\vec{F}) = \text{rot}(\nabla f) = 0$.

(2) Se $\vec{F} = (P, Q)$ é conservativo, então $\vec{F} = \nabla f$ para alguma função C^2 . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Daí, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, mas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Logo, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} \implies \vec{F} \text{ não conservativo.}$$

□

Exemplo 3.18 $\vec{F}(x, y) = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ não é conservativo. De fato,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2. \quad \text{Logo,} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Note também que,

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = (2 - (-2)) \vec{k} = 4 \vec{k} \neq \vec{0}$$

Exemplo 3.19 $\vec{F}(x, y, z) = (2z - 3y)\vec{i} + (3x - z)\vec{j} + (y - 2x)\vec{k}$ não é conservativo. De fato,

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z - 3y & 3x - z & y - 2x \end{pmatrix} = \dots = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} \neq \vec{0}.$$

3.5.1 Determinação do Potencial de um Campo Conservativo

Caso $n = 2$:

Se $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^2 e suas funções coordenadas P e Q satisfazem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, então \vec{F} é conservativo. O potencial de F é dado por:

$$f(x, y) = \int P dx + \int \left(Q - \int \frac{\partial Q}{\partial y} dx \right) dy + C$$

Exemplo 3.20 $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$.

\vec{F} está definido em todo \mathbb{R}^2 . Além disso, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int 2xy dx + \int \left(x^2 + 3y^2 - \int 2x dx \right) dy + C \\ &= x^2 y + x^2 y + y + 3 - x^2 y + C \\ &= x^2 y + y^3 + C. \end{aligned}$$

Também podemos proceder como segue-se, queremos encontrar $f(x, y)$ de modo que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xy$. Integrando com relação a x obtemos $f(x, y) = x^2 y + g(y)$, onde g é uma função que depende de y . Daí, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$, mas $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = x^2 + 3y^2$, logo $x^2 + g'(y) = x^2 + 3y^2$, daí $g'(y) = 3y^2$, portanto $g(y) = y^3 + C$.

Assim. $f(x, y) = x^2 y + g(y) = x^2 y + y^3 + c$.



Caso $n = 3$:

Se $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$, é um campo de classe C^2 e $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, então \vec{F} é conservativo. Um potencial para \vec{F} é dado por

$$f(x, y, z) = M(x, y, z) + N(x, y, z) + L(x, y, z) + C$$

onde,

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= \int P dx; \\ N(x, y, z) &= \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right) dy = \int \left(Q - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy; \\ L(x, y, z) &= \int \left(R - \frac{\partial}{\partial z} (M + N) \right) dz \end{aligned}$$

Exemplo 3.21 $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \cos(x) \vec{i} + (2y \sin(x) + e^{2z}) \vec{j} + 2ye^{2z} \vec{k}$.

\vec{F} está definido em todo \mathbb{R}^3 e

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 \cos(x) & 2y \sin(x) + e^{2z} & 2ye^{2z} \end{pmatrix} \\ &= (2e^{2z} - 2e^{2z}) \vec{i} + (0 - 0) \vec{j} + (2y \cos(x) - 2y \cos(x)) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Logo \vec{F} é conservativo.

$$M = \int y^2 \cos(x) dx = y^2 \sin(x) \quad \boxed{M = y^2 \sin(x)}$$

$$N = \int (2y \sin(x) + e^{2z} - 2y \sin(x)) dy = \int e^{2z} dy = ye^{2z} \quad \boxed{N = ye^{2z}}$$

$$L = \int (2ye^{2z} - (0 + 2ye^{2z})) dz = 0 \quad \boxed{L = 0}$$

Assim, o potencial de \vec{F} é $f(x, y, z) = y^2 \sin(x) + ye^{2z} + C$.



Também podemos fazer o seguinte:

Queremos $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f = \vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$, então $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = R$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = P = y^2 \cos(x) &\implies f = y^2 \sin(x) + g(y, z) \\ &\implies \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin(x) + \frac{\partial g}{\partial y} = Q = 2y \sin(x) + e^{2z} \\ &\implies \frac{\partial g}{\partial y} = e^{2z} \\ &\implies g = ye^{2z} + h(z) \end{aligned}$$

Daí, $f = y^2 \sin(x) + ye^{2z} + h(z)$, donde $\frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z} + \frac{dh}{dz} = R = 2ye^{2z}$.

Portanto, $\frac{dh}{dz} = 0$ e logo, $h = C = \text{cte}$. Assim, $f = y^2 \sin(x) + ye^{2z} + C$.

3.6 Integral de Linha de um Campo Vetorial

Suponha que uma partícula se move ao longo de uma curva C , sob a ação de um campo de forças \vec{F} . Qual é o trabalho realizado pela força \vec{F} , quando a partícula se desloca de um ponto $A \in C$ até um ponto $B \in C$?

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização de C e suponha que $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$.

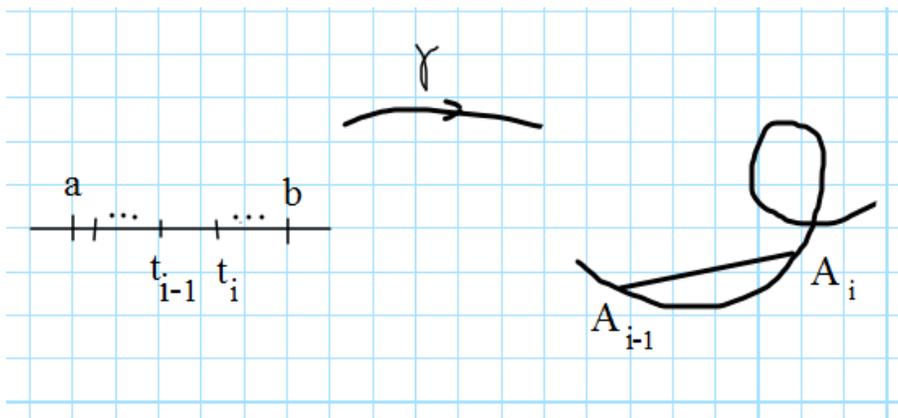
Se \vec{F} é constante e C é um segmento de reta, então sabemos que o trabalho é dado por

$$W = \langle \vec{F}, \overrightarrow{AB} \rangle.$$

No caso geral fazemos o que segue-se: dividimos o intervalo $[a, b]$ em n -subintervalos, do mesmo comprimento,

$$[t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, n; \quad \Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Isto nos dá n sub arcos $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = C_i$ e n segmentos $[A_{i-1}, A_i]$, com $A_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$.



Supondo que \vec{F} é constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$, o trabalho ao longo de C_i é aproximadamente

$$\begin{aligned} W_i &= \left\langle \vec{F}(\gamma(t_i)), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \right\rangle = \left\langle \vec{F}(\gamma(t_i)), (A_i - A_{i-1}) \right\rangle \\ &= P(x(t_i), y(t_i)) \Delta x + Q(x(t_i), y(t_i)) \Delta y \end{aligned}$$

onde,

$$\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1}) \quad \Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1})$$

Pelo teorema do valor médio temos

$$\Delta x = x'(t_i^*) \Delta t \quad \text{com } t_i^* \in]t_{i-1}, t_i[\quad \text{e} \quad \Delta y = y'(t_i^{**}) \Delta t \quad \text{com } t_i^{**} \in]t_{i-1}, t_i[$$

Assim,

$$W_i \simeq \left\{ P(x(t_i), y(t_i)) x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i)) y'(t_i^{**}) \right\} \Delta t$$

e logo,

$$W \simeq \sum_{i=1}^n (Px' + Qt') \Delta t := S_n$$

Definimos,

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} S_n$$

Claro, quando o limite existe e não depende da partição do intervalo $[a, b]$ nem da escolha de t_i^* nem de t_i^{**} no intervalo $]t_{i-1}, t_i[$

Ou seja,

$$W = \int_a^b \{P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\} dt$$

Isto sugere a seguinte definição,

Definição 3.22 Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 e tal que $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ um campo sobre C . Então a integral de linha do campo \vec{F} ao longo de C é definida por:

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Também denotada como :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$



$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (Pdx + Qdy + Rdz)$$

onde $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, $dz = z'dt$ $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Observações:

(1) Se C é regular por partes e $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$, com C_j , $j = 1, 2, \dots, k$ regular, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(2) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende da parametrização da curva C desde que não se inverta sua orientação. Se denotamos por C^- a curva C percorrida no sentido contrário, então:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemplo 3.23 Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e C é a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(t), \sin(t), t) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t)\cos(t) + \sin(t)\cos(t) + t) dt = \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

Exemplo 3.24 Calcular $\int_C -2xydx + (x^2 + y^2)dy$, onde C é a semi circunferência $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 & (a > 0) \\ y \geq 0 \end{cases}$ de $(a, 0)$ até $(-a, 0)$.

Solução: Uma parametrização para C é $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$.

$$\gamma(0) = (a, 0), \quad \gamma(\pi) = (-a, 0) \quad \begin{cases} dx = -a \sin(t) dt \\ dy = a \cos(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C -2xydx + (x^2 + y^2)dy &= \int_0^\pi (-2a \cos(t) a \sin(t) (-a \sin(t)) + a^2 \cdot a \cos(t)) dt \\ &= \int_0^\pi (2a^3 \sin^2(t) \cos(t) + a^3 \cos(t)) dt \\ &= \left(2a^3 \cdot \frac{1}{3} \sin^3(t) + a^3 \sin(t) \right) \Big|_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se C é uma curva fechada, é usual denotar a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ por $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.



Teorema 3.25 Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^2 e C uma curva regular por partes em D com ponto inicial A e ponto final B . Se \vec{F} é conservativo, ou seja, existe uma função $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Este teorema é conhecido como “Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha”

Ele afirma que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos pontos A e B e não da curva que os liga.

Em particular, se C é uma curva fechada, então $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Equivalentemente, se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$ para alguma curva fechada C , então \vec{F} não é conservativo.

Exemplo 3.26 O campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é conservativo. Um potencial para \vec{F} é $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. De fato,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y \quad \text{logo,} \quad \nabla\varphi = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{F}.$$

Assim, qualquer que seja a curva fechada C ,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \oint_C x dx + y dy = 0.$$

Exemplo 3.27 Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, onde

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Temos $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Assim, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e portanto, $\text{rot}(\vec{F}) = 0$.

Agora, se C é a circunferência parametrizada por $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, então

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin(t)}{a^2} (-a \sin(t)) + \frac{a \cos(t)}{a^2} a \cos(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Portanto, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Daí, \vec{F} não é conservativo.



O campo \vec{F} do exemplo anterior não é conservativo, mas $\text{rot}(\vec{F}) = 0$. Vimos que se \vec{F} é um campo conservativo, então $\text{rot}(\vec{F}) = 0$. O exemplo anterior mostra que a recíproca não é verdadeira. Ou seja,

$$\text{rot}(\vec{F}) = 0 \quad \text{não implica} \quad \vec{F} \text{ conservativo}$$

Na verdade, isto é válido sob certas condições sobre o domínio do campo.

3.7 O teorema de Green

O teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha e integrais duplas. Antes de enuncia-lo precisamos esclarecer a noção de orientação para um domínio limitado em \mathbb{R}^2

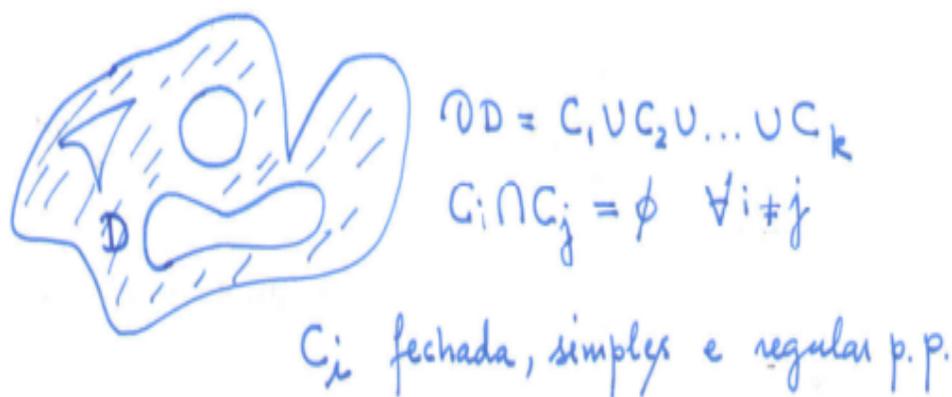
Definição 3.28 Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (x_1, y_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$ uma base ordenada de \mathbb{R}^2 . Dizemos que \mathcal{B} é uma base positiva se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} > 0,$$

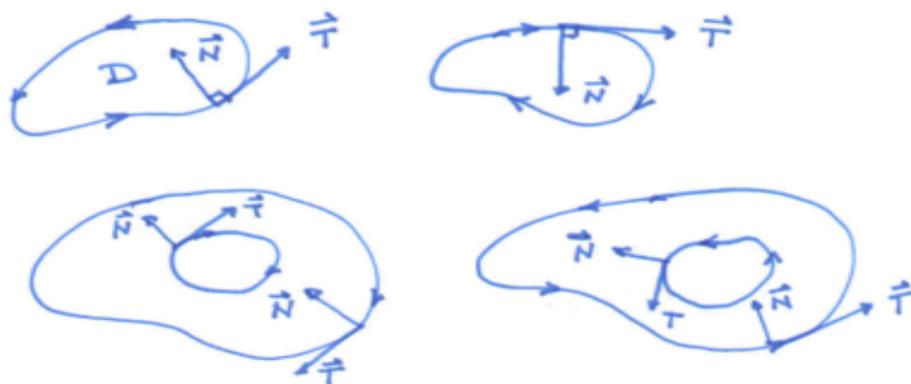
Caso contrário, dizemos que \mathcal{B} é uma base negativa.

Por exemplo, a base canônica de \mathbb{R}^2 , $\{(1,0), (0,1)\}$ é positiva e $\{(0,1), (1,0)\}$ é negativa.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado cujo bordo ∂D é formado por um número finito de curvas simples, fechadas e regulares por partes que não se intersectam



Em cada ponto regular de cada curva do bordo, escolha uma base de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{B} = \{\vec{T}, \vec{N}\}$, de modo que \vec{T} é um vetor tangente à curva no ponto em questão e \vec{N} é normal à curva nesse ponto e aponta para o interior do domínio D .



Definição 3.29 Dizemos que D está positivamente orientado se a base $\{\vec{T}, \vec{N}\}$ escolhida, como acima, é uma base positiva em cada ponto.

Agora podemos enunciar o Teorema de Green.

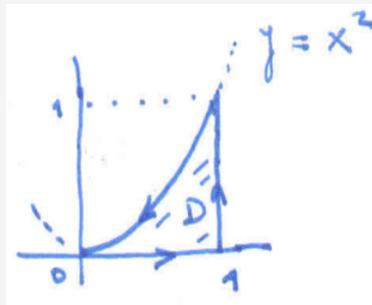
Teorema 3.30 (Green ^a) Seja D um domínio fechado e limitado do plano cujo bordo ∂D é formado por um número finito de curvas simples, fechadas, C^1 por partes que não se intersejam. Suponha que D está orientado positivamente e seja $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo de classe C^1 definido num aberto U que contém D . Então

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

^aMatemático e Físico inglês. Nottinghamshire 14 de julho de 1793 - Nottingham 31 de maio de 1841

Exemplo 3.31 Calcular $\int_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$ onde C é a curva formada pelas retas $y = 0$, e $x = 1$ e pela parábola $y = x^2$ (orientada positivamente).

Solução:



Seja D a região limitada por C , $\partial D = C$.

$$\vec{F} = \sqrt{y}\vec{i} + \sqrt{x}\vec{j} \quad \begin{cases} P = \sqrt{y} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ Q = \sqrt{x} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \quad D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy &= \int_D \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dA = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} y - 2\sqrt{y} \right) \Big|_0^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - 2x) dx \\ &= \dots = \frac{-3}{10} \end{aligned}$$

Exemplo 3.32 Consideremos o campo $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.
 i.e. $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. Então,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_D (1 - (-1)) dA = 2 \int_D dA = 2 \text{área}(D).$$

Assim, pelo teorema de Green,

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx$$

Além disso, integrando por partes, temos que

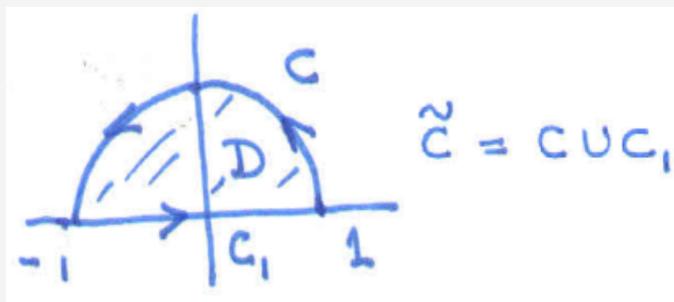
$$\int_{\partial D} xdy = \int_{\partial D} ydx.$$

Logo,

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx = \int_{\partial D} xdy = - \int_{\partial D} ydx$$

Exemplo 3.33 Calcular $\int_C e^x \sin(y) dx + (e^x \cos(y) + x) dy$. C é o semi círculo
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ orientado no sentido anti horário.

Solução:



C não é fronteira de região alguma, portanto o teorema de Green não se aplica. Para aplicar o teorema consideramos a curva, diferenciável por partes, $\tilde{C} = C \cup C_1$ onde C_1 é o segmento de reta do ponto $(-1, 0)$ até o ponto $(1, 0)$. Seja D a região limitada por \tilde{C} ($\partial D = \tilde{C}$). Agora podemos aplicar o teorema de Green na região D .

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}, \quad \text{com} \quad P = e^x \sin(y) \quad \text{e} \quad Q = e^x \cos(y) + x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos(y) + 1$$