1) $\vec{F} = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$

a) Determinar f t.q. $\nabla f = \vec{F}$

b) Calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C: r(t) = e^t \operatorname{sen} t\, \vec{i} + e^t \cos t\, \vec{j}$
$t \in [0,\pi]$

Resp a) $f = 3x + x^2y - y^3 + K$, $K = $ cte.

b) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = e^{3\pi} + 1$

2) $\vec{F} = y^2\vec{i} + (2xy + e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$

é conservativo, determine um potencial

Resp $f = xy^2 + ye^{3z} + K$

Teor Seja $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1.

Se $\vec{F}$ é conservativo então $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

Dem

$\vec{F}$ conservativo $\Rightarrow \exists f$ (de classe C^2) t.q. $\nabla f = \vec{F}$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \operatorname{rot}(\nabla f) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$= (\partial_y(f_z) - \partial_z f_y)\vec{i} + \ldots$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \ldots$$

$$= \vec{0} \quad (f \in C^2)$$

Sob algumas condições para $D = \mathrm{Dom}(\vec{F})$, a recíproca é verdadeira, ou seja:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ conservativo.}$$

Essas condições para D são as seguintes.

(1) D é aberto

(2) D é conexo por caminhos
(i.e. dados dois ptos quaisquer em D é possível ligar esses ptos por uma curva contida em D)

(3) D é "sem buracos" ... Explicar!!

Um conj que verifica as condições acima diz-se um conj. simplesmente conexo.

=

Quando D é simplesmente conexo temos o seguinte:

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é um campo de classe C^1 definido em $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e D é simplesmente conexo então são equivalentes:

(1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ em D

(2) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada C em D

(3) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende da curva C em D
(só dos ptos finais)

(4) $\vec{F}$ é conservativo

=

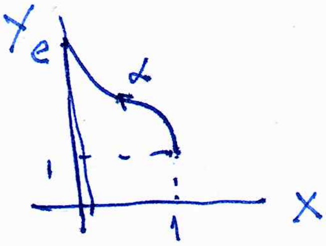
Exemplos

1) Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$$\vec{F} = -y^2 \operatorname{sen} x \, \vec{i} + 2y \cos x \, \vec{j}$$

$$C: \ \alpha(t) = \left(-\cos \pi/t \, , \, e^{t-1}\right), \quad t \in [1,2]$$

Solução



$Dom(\vec{F}) = \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo.

$$P = -y^2 \operatorname{sen} x \, , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2y \operatorname{sen} x$$

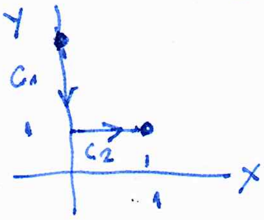
$$Q = 2y \cos x \, , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \operatorname{sen} x$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ e $Dom(\vec{F})$ é simplesmente conexo

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende da curva C, só dos ptos inicial e final.

$$\begin{cases} \alpha(1) = (-\cos \pi, e^0) = (1,1) \\ \alpha(2) = (-\cos \frac{\pi}{2}, e^{2-1}) = (0, e) \end{cases}$$

Podemos escolher outra curva "mais simples" ligando os ptos $(1,1)$ e $(0,e)$



$$C_1: \begin{cases} x = 0 \\ 1 \le y \le e \end{cases} \qquad \alpha_1(t) = (0, (1-t)e + t) = (0, e + (1-e)t), \quad t \in [0,1]$$

$$C_2 \begin{cases} y = 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \alpha_2(t) = (t, 1), \quad t \in [0,1]$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot dr + \int_{C_2} \vec{F} \, dr$$

Em C_1

$$P = 0$$
$$Q = 2e + 2(1-e)t$$

$$dx = 0$$
$$dy = (1-e)dt$$

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_0^1 [2e + 2(1-e)t](1-e)dt$$
$$= 2e(1-e) + (1-e)^2 t^2 \Big|_0^1 = 2e(1-e) + (1-e)^2$$
$$= (1-e)(2e + 1 - e) = (1-e)(1+e) = \underline{\underline{1 - e^2}}$$

Em C_2

$$x = t \Rightarrow dx = dt$$
$$y = 1 \rightarrow dy = 0$$

$$Pdx + Qdy = -1^2 \operatorname{sen} t\, dt + 0 = -\operatorname{sen} t\, dt$$

$$\int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_0^1 -\operatorname{sen} t\, dt = \cos t \Big|_0^1 = \cos(1) - 1$$

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = 1 - e^2 + \cos(1) - 1$$
$$= \underline{\underline{\cos(1) - e^2}}$$

// considerei a orientação contrária !! errei

$$\therefore \int_C Pdx + Qdy = e^2 - \cos 1$$

Outra forma:

$\vec{F}$ é conservativo !! $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \right.$ e $\text{Dom}(\vec{F})$ é simplesmente conexo $\left. \right)$

Vamos encontrar um potencial para $\vec{F}$.

Queremos f t.q. $\nabla f = \vec{F}$

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} \quad \therefore \quad f_x = P, \; f_y = Q$$

$$f_x = P = -y^2 \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \; f = y^2 \cos x + C(y)$$

$$\Rightarrow \; f_y = 2y \cos x + C'(y) = Q = 2y \cos x$$

$$\therefore \; C'(y) = 0 \qquad \left(C' = \frac{dC}{dy} \right)$$

Daí $C(y) = K = \text{cte.}$

$$\therefore \; \underline{\underline{f = y^2 \cos x + K}}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,1) - f(0,e)$$
$$= 1^2 \cos(1) + K - (e^2 \cos 0 + K)$$
$$= \underline{\underline{\cos(1) - e^2}}$$