

1. Integrais Duplas

1.1	Introdução	6
1.2	Integrais Duplas sobre Retângulos	6
1.3	Significado Geométrico da Integral Dupla	8
1.4	Propriedades da Integral Dupla	8
1.5	Integração Dupla em Regiões mais Gerais	10
1.6	Mudança de Coordenadas	13
1.7	Coordenadas Polares	18
1.8	Simetria em Integrais Duplas	19
1.9	Aplicações da Integral Dupla	20

1.1 Introdução

1.9.1	Massa Total
1.9.2	Momento de Massa
1.9.3	Centro de Massa
1.9.4	Momento de Inércia

Neste capítulo vamos estudar integrais duplas, começamos definindo estas integrais sobre retângulos para logo generalizar a definição a domínios mais gerais, a seguir fazemos algumas mudanças de coordenadas que podem nos ajudar no cálculo das integrais duplas e por último vemos algumas aplicações.

1.2 Integrais Duplas sobre Retângulos

Consideremos uma função limitada $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathcal{R} := [a, b] \times [c, d]$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Sejam $\mathcal{P}_1 := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathcal{P}_2 := \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ partições dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente tais que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d,$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n}.$$

$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ é uma partição do retângulo $\mathcal{R}$ e os n^2 subretângulos $\mathcal{R}_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ cobrem $\mathcal{R}$.

Seja $c_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots, n-1$, um ponto arbitrário e consideremos a soma

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y, \quad \text{onde,} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$

S_n diz-se *Soma de Riemann de f sobre $\mathcal{R}$* .

Definição 1.1 Dizemos que $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, qualquer que seja a escolha dos $c_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$ e quaisquer que sejam as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Neste caso, denotamos o $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ por: $\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ ou $\int_{\mathcal{R}} f dA$ e chamamos de *integral dupla de f sobre $\mathcal{R}$* .

Teorema 1.2 Se $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e contínua, então f é integrável em $\mathcal{R}$.

Exemplo 1.3 Calculemos, usando as somas de Riemann, a integral dupla da função $f(x, y) = x^2 y$ sobre o retângulo $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$. Consideremos a partição $\mathcal{P} = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$ de $[0, 1]$, a partição $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$ e tomemos $c_{ij} = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$. Nas notações anteriores temos:

$$a = c = 0, \quad b = d = 1, \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad y_j = \frac{j}{n}, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(c_{ij}) \Delta x \Delta y = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (x_i)^2 \cdot y_j \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{j}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^5 \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n j\right) i^2 = \frac{1}{n^5} \sum_{i=0}^n \frac{n(n+1)}{2} i^2 = \frac{1}{n^5} \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n i^2 \\ &= \frac{n+1}{2n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \int_{\mathcal{R}} f dA = \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Logo, } \int_{\mathcal{R}} x^2 y dx dy = \frac{1}{6}$$

Usamos aqui dois fatos que supomos conhecidos, são estes:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Neste exemplo vemos que o cálculo de integrais duplas usando as somas de Riemann pode não ser uma tarefa fácil. O teorema de Fubini ^a, que veremos logo adiante, simplificará estes calculo.

^aGuido Fubini (19 de janeiro de 1879 Veneza-Itália - 6 de junho de 1943 Nova Iorque-EUA)

1.3 Significado Geométrico da Integral Dupla

Seja $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, note que sendo $\mathcal{R}$ compacto, (fechado e limitado), f é uma função limitada. Suponhamos que, $\forall (x, y) \in \mathcal{R}$, $f(x, y) \geq 0$ e seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o sólido definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{R}, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

W é fechado, limitado superiormente pelo gráfico de f , ($z = f(x, y)$), inferiormente pelo retângulo $\mathcal{R}$ e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$.

Se $vol(W)$ denota o volume de W , então

$$vol(W) = \int_{\mathcal{R}} f dA = \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$$

De fato, escolhendo c_{ij} como o ponto de $\mathcal{R}_{ij}$ onde f atinge seu valor máximo sobre $\mathcal{R}_{ij}$ (este ponto existe já que $\mathcal{R}_{ij}$ é compacto e f é contínua), então $f(c_{ij})\Delta x \Delta y$ é o volume do paralelepípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f(c_{ij})$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(c_{ij})\Delta x \Delta y \quad \text{é o volume de um solido circunscrito a } W.$$

Analogamente, se $\bar{c}_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$ é o ponto onde f atinge seu mínimo em $\mathcal{R}_{ij}$, então $f(\bar{c}_{ij})\Delta x \Delta y$ é o volume do paralelepípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f(\bar{c}_{ij})$.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(\bar{c}_{ij})\Delta x \Delta y \quad \text{é o volume de um solido inscrito em } W.$$

É claro que $s_n \leq vol(W) \leq S_n$. Além disso, como f é integrável sobre $\mathcal{R}$, os limites das somas de Riemann s_n e S_n independem das escolhas de c_{ij} e $\bar{c}_{ij}$ e temos

$$\int_{\mathcal{R}} f dA = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq vol(W) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{\mathcal{R}} f dA.$$

Assim, $vol(W) = \int_{\mathcal{R}} f dA$.

Exemplo 1.4 Vimos no exemplo 1.3 que $\int_{\mathcal{R}} x^2 y = \frac{1}{6}$, onde $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$. Se W é o solido limitado superiormente pelo gráfico de $f(x, y) = x^2 y$, inferiormente pelo quadrado $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ e lateralmente pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$, então $vol(W) = \frac{1}{6}$ unidades de volume. (Observe que $f(x, y) = x^2 y \geq 0 \forall (x, y) \in \mathcal{R}$).

1.4 Propriedades da Integral Dupla

Sejam $f, g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas sobre um retângulo $\mathcal{R}$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são válidas

- (1) Linearidade: Se as funções f e g são integráveis sobre $\mathcal{R}$, então a função $\alpha f + \beta g$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\int_{\mathcal{R}} (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \int_{\mathcal{R}} f dA + \beta \int_{\mathcal{R}} g dA.$$

(2) Se f e g são integráveis sobre $\mathcal{R}$ e $\forall (x, y) \in \mathcal{R}, f(x, y) \leq g(x, y)$, então

$$\int_{\mathcal{R}} f dA \leq \int_{\mathcal{R}} g dA.$$

(3) Se $\mathcal{R}$ é subdividido em k subretângulos $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_k$ e f é integrável sobre cada $\mathcal{R}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$; então f é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\int_{\mathcal{R}} f dA = \sum_{j=1}^k \int_{\mathcal{R}_j} f dA.$$

Definição 1.5 (Integrais Iteradas) Para uma função $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada definida num retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, uma integral iterada de f sobre $\mathcal{R}$ é uma integral do tipo

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy \quad \text{ou} \quad \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

Para calcular, por exemplo, a integral $\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$, calculamos a integral $\int_a^b f(x, y) dx$ como a integral de uma função da variável x , com y fixo. O resultado será uma função na variável y que agora integramos nessa variável nos limites de integração c e d .

Analogamente calculamos $\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$.

Exemplo 1.6 Calcular $\int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 x^3 y^2 dy \right\} dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x^3 y^2 dy &= \frac{1}{3} x^3 y^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{x^3}{3} (2^3 - (-1)^3) = \frac{x^3}{3} 9 = 3x^3. \\ \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 x^3 y^2 dy \right\} dx &= \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.7 Calcular $\int_0^1 \left\{ \int_1^2 y e^{xy} dx \right\} dy$

Solução:

$$\begin{aligned} \int_1^2 y e^{xy} dx &= e^{xy} \Big|_{x=1}^{x=2} = e^{2y} - e^y. \\ \int_0^1 \left\{ \int_1^2 y e^{xy} dx \right\} dy &= \int_0^1 (e^{2y} - e^y) dy = \left(\frac{1}{2} e^{2y} - e^y \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - e - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} e^2 - e + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

O teorema a seguir relaciona as integrais duplas com as integrais iteradas.

Teorema 1.8 (Teorema de Fubini^a) Seja $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo $\mathcal{R} = [a, b][c, d]$. Então,

$$\int_{\mathcal{R}} f dA = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

^aGuido Fubini, matemático italiano (19/01/1879 - 06/06/1943). Doutorou-se em 1900 com uma tese sobre paralelismo de Clifford em espaços elípticos.

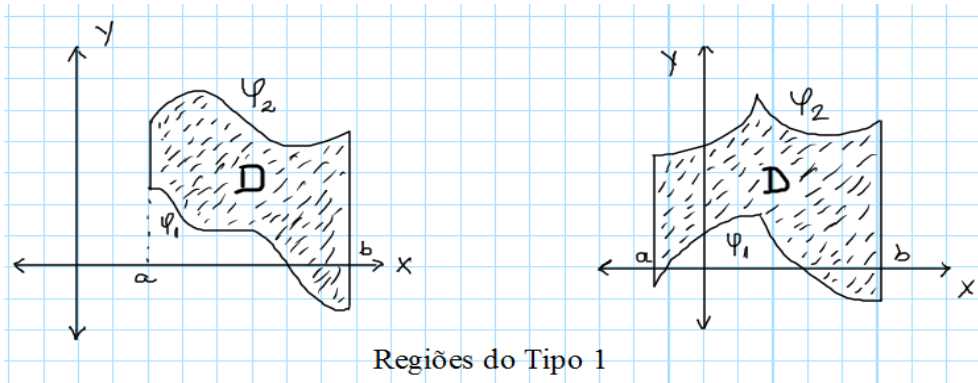
1.5 Integração Dupla em Regiões mais Gerais

Consideraremos dois tipos especiais de subconjuntos do plano que utilizaremos para estender o conceito de integral dupla sobre retângulos a regiões mais gerais.

Tipo 1: Dizemos que uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ é do tipo 1 se, e somente se, D pode ser descrita como:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

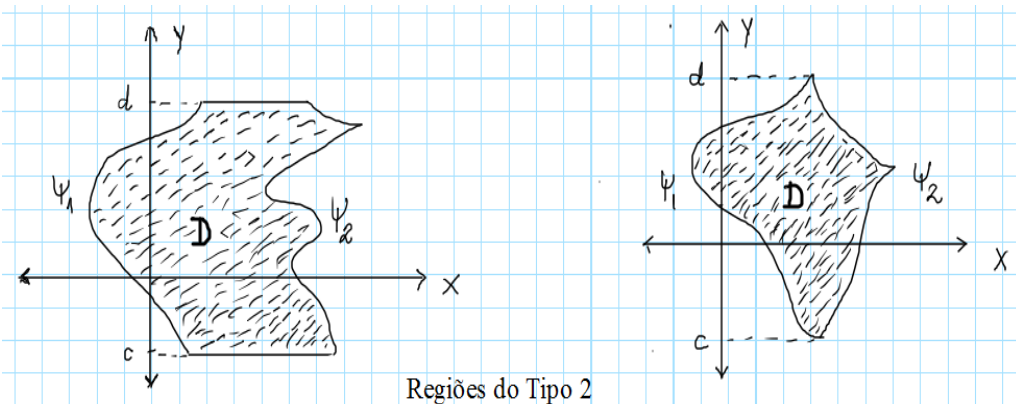
onde $\varphi_i, i = 1, 2$ são funções contínuas tais que, para todo $x \in [a, b]$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$



Tipo 2: D é uma região do tipo 2 se, e somente se, ela pode ser descrita como:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); c \leq y \leq d\}$$

onde $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e, para todo $y \in [c, d]$, $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$.



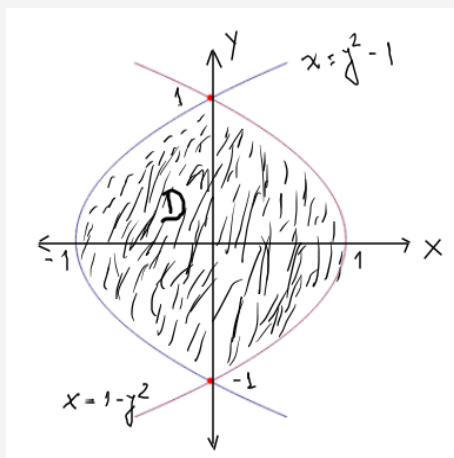
Definição 1.9 Regiões dos tipos 1 ou 2 são chamadas de regiões elementares.

Note que regiões elementares são fechadas e limitadas.



Exemplo 1.10 Seja D a região do plano limitada pelas curvas $y^2 - x = 1$ e $y^2 + x = 1$. Podemos descrever D como:

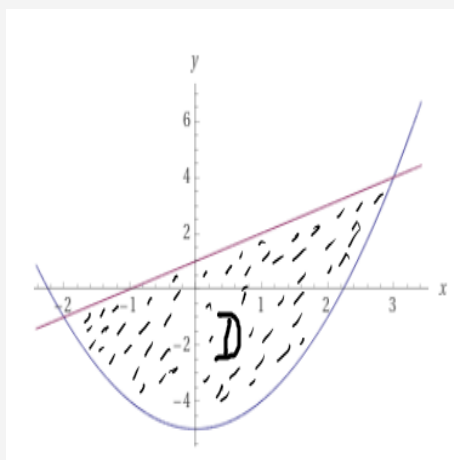
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1; y^2 - 1 \leq x \leq y^2 + 1\}$$



D é uma região do tipo 2.

Exemplo 1.11 A região D limitada pelas curvas $y = x + 1$ e $y = x^2 - 5$ pode ser descrita como:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 3; x^2 - 5 \leq y \leq x + 1\}$$



D é uma região do tipo 1.

Agora vamos estender a definição de integral dupla a regiões elementares.

Sejam D uma região elementar, $\mathcal{R}$ um retângulo que contém D ($D \subset \mathcal{R}$) e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada.

Defina:

$$\tilde{f} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R} \setminus D \end{cases}$$

$\tilde{f}$ é limitada e contínua, salvo talvez, nos pontos de ∂D .



Se ∂D é uma união finita de curvas, que podemos pensar como gráfico de funções contínuas, então $\tilde{f}$ é uma função integrável sobre $\mathcal{R}$.

Definição 1.12 Seja D uma região elementar, dizemos que a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável sobre D se a função $\tilde{f}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$. Neste caso definimos:

$$\int_D f dA = \int_{\mathcal{R}} \tilde{f} dA.$$



Note que $\int_D f dA$ não depende da escolha do retângulo $\mathcal{R}$ que usamos na sua definição pois, se $\mathcal{R}_1$ é outro retângulo que contém D e

$$\tilde{f}_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R}_1 \setminus D \end{cases}$$

é definida como antes, então $\int_{\mathcal{R}} \tilde{f} dA = \int_{\mathcal{R}_1} \tilde{f}_1 dA$, já que $\tilde{f} = \tilde{f}_1$ onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_1$ diferem.

Teorema 1.13 Sejam D uma região elementar e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável sobre D , então

(a) Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ é uma região do tipo 1.

$$\int_D f dA = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx.$$

(b) Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); c \leq y \leq d\}$ é uma região do tipo 2.

$$\int_D f dA = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy.$$

Corolário 1.14 Se $f \equiv 1$, ou seja, se $f(x, y) = 1$, para todos $(x, y) \in D$, então

$$\int_D f dA = \int_D dx dy = \text{área}(D)$$

Demonstração: Suponhamos, por exemplo, que D é do tipo 1, ou seja,

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, então

$$\int_D f dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx = \text{área}(D.)$$

□

Corolário 1.15 Se, $\forall (x, y) \in D$, $f(x, y) \geq 0$, então $\int_D f dA = \text{vol}(W)$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ é o cilindro sobre a região D limitado por cima pelo gráfico de f .

Exemplo 1.16 Calcular $\int_D \sqrt{1-y^2} dx dy$, onde D é a região limitada por $x^2 + y^2$, no primeiro quadrante.

Solução: Vamos considerar D do tipo 2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$

$$\int_D \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 (1-y^2) dy = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 1.17 Determine o volume do sólido W limitado por: $z = 2x + 1$, $x = y^2$ e $x - y = 2$.

Solução: $\text{vol}(W) = \int_D (2x + 1) dA$, onde $D : \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq y + 2 \end{cases}$ Assim,

$$\text{vol}(W) = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} (2x + 1) dx dy = \int_{-1}^2 (x^2 + x) \Big|_{y^2}^{y+2} dy = \int_{-1}^2 (5y + 6 - y^4) dy = \frac{189}{10}.$$

$\therefore \text{vol}(W) = \frac{189}{10}$ unidades de volume.

Exemplo 1.18 Calcule a área da região D , limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$.

Solução: $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x \leq y \leq 4x - x^2 \end{cases}$

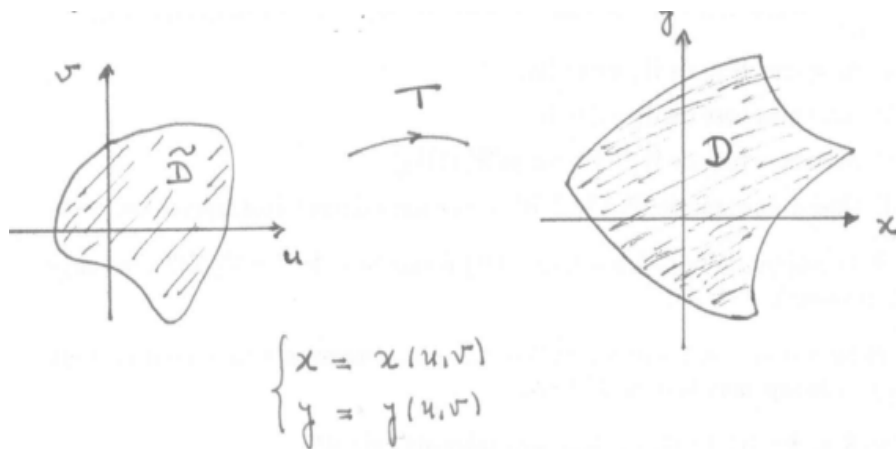
$$\text{área}(D) = \int_D dA = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} dy dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

$\therefore \text{área}(D) = \frac{9}{2}$ unidades de área.

1.6 Mudança de Coordenadas

Definição 1.19 Seja $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar, uma transformação do plano é uma aplicação $T : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ onde $x, y : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, com derivadas parciais contínuas no retângulo aberto $\mathcal{R}$ tal que $\tilde{D} \subset \mathcal{R}$.

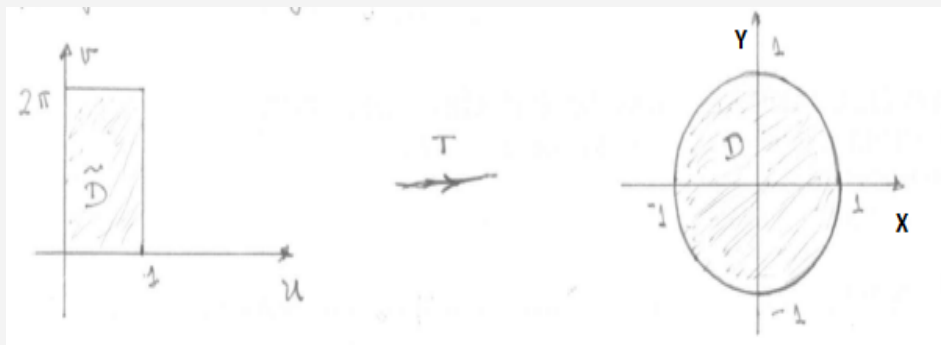
Notação: Denotemos por D a imagem da transformação T . i.e. $D = T(\tilde{D})$.



Exemplo 1.20 Seja $T : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$.

Onde $\begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ y = y(r, \theta) = r \sin(\theta) \end{cases}$

A imagem de $\tilde{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ por T é o círculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Assim T transforma o retângulo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ no círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Definição 1.21 Dizemos que uma transformação $T : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva em $\tilde{D}$ se:

$$T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2) \implies (u_1, v_1) = (u_2, v_2), \quad \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \tilde{D}$$

Equivalentemente, T é injetiva se:

$$T(u_1, v_1) \neq T(u_2, v_2) \implies (u_1, v_1) \neq (u_2, v_2), \quad \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \tilde{D}$$

Exemplo 1.22 A transformação T do exemplo 1.20 não é injetiva. De fato,

$$T(1, 0) = T(1, 2\pi) = (1, 0) \quad \text{mas} \quad (1, 0) \neq (1, 2\pi).$$

A mesma transformação anterior, agora restrita ao retângulo $[0, 1] \times [0, \pi]$ é injetiva. Ou seja,

$$T : [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

é injetiva.

Definição 1.23 Seja $\tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ uma transformação do plano, com x, y funções de classe C^1 em $\tilde{D}$. A matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

é chamada *matriz Jacobiana da Transformação T*.

Notação: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$.

Exemplo 1.24 Considere a transformação T do exemplo 1.20 ($T(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$).

A matriz Jacobiana é

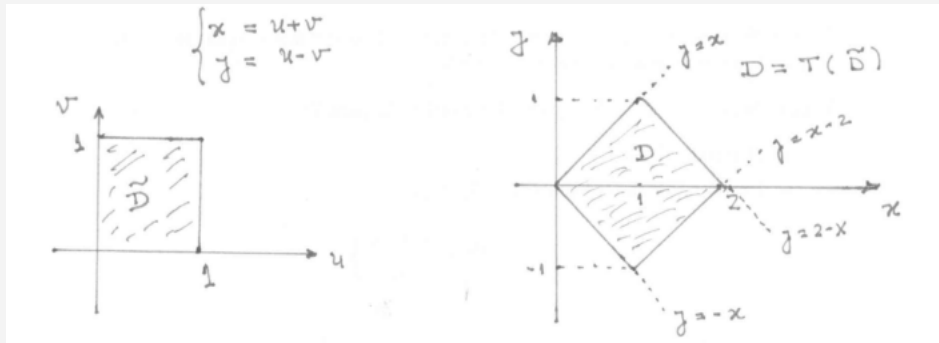
$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(J) = \frac{(x, y)}{(r, \theta)} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

Uma das importâncias da matriz Jacobiana está no teorema a seguir cuja demonstração, por enquanto, não faremos.

Teorema 1.25 Seja $T : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ uma transformação do plano. Se o Jacobiano de T num ponto $(u_0, v_0) \in \tilde{D}$, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0)$, é diferente de zero, então existe uma vizinhança $V \subset \tilde{D}$ do ponto (u_0, v_0) tal que a restrição de T à vizinhança V é injetiva.

$$\left(\frac{(x, y)}{(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0 \implies \exists V \subset \tilde{D}, (u_0, v_0) \in V, \text{ t.q. } T : V \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ é injetiva} \right).$$

Exemplo 1.26 Seja $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (u + v, u - v)$.

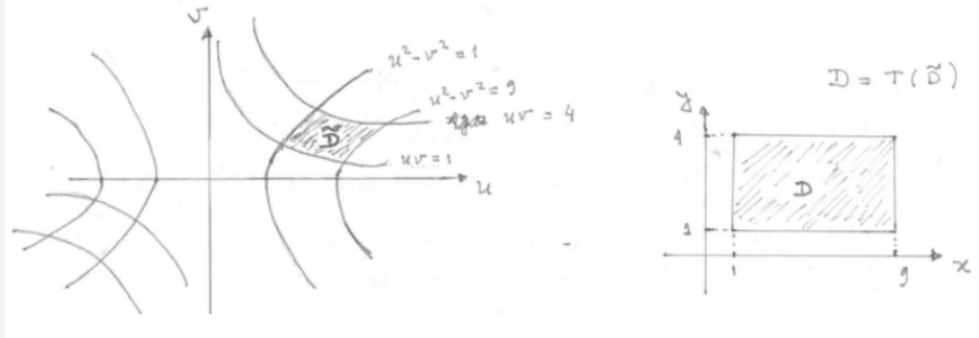


Note que:

$$\begin{aligned} u = 0 &\implies y = -x \quad \text{e} \quad u = 1 \implies y = 2 - x; \\ v = 0 &\implies y = x \quad \text{e} \quad v = 1 \implies y = x - 2. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Exemplo 1.27 Considere a transformação T definida por $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases}$ na região $\tilde{D}$ limitada pelas curvas $u^2 - v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 9$, $uv = 1$, e $uv = 4$, no primeiro quadrante.



$$u^2 - v^2 = 1 \implies x = 1 \quad \text{e} \quad u^2 - v^2 = 9 \implies x = 9;$$

$$uv = 1 \implies y = 1 \quad \text{e} \quad uv = 4 \implies y = 4.$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} = 2(u^2 + v^2) \neq 0, \text{ em } \tilde{D}.$$

Teorema 1.28 (Mudança de Coordenadas em Integrais Duplas) Seja $T : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação injetiva de classe C^1 . Seja $D = T(\tilde{D})$ e suponha que D e $\tilde{D}$ são regiões elementares do plano $\mathbb{R}^2$. Então para toda função integrável $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ temos:

$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_{\tilde{D}} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

onde $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ é o valor absoluto do determinante jacobiano e $f(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

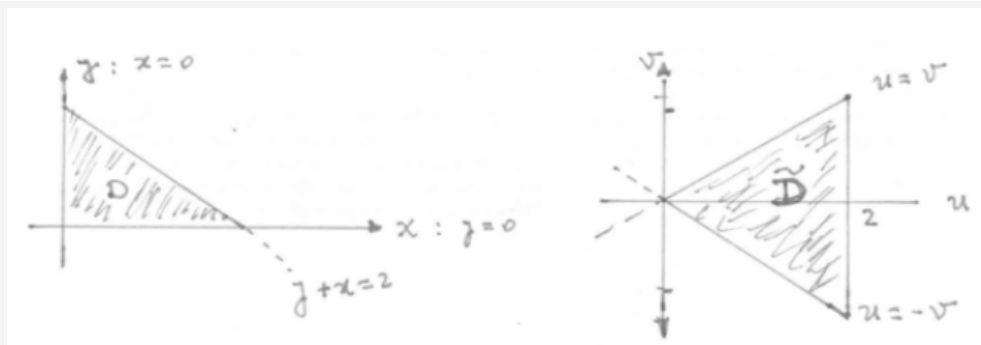


Em particular temos que:

$$\text{área}(D) = \int_D dx dy = \int_{\tilde{D}} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

Exemplo 1.29 Calcular $\int_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy$, onde D é a região limitada pela reta $y + x = 2$ e pelos eixos coordenados.

Solução: Considere a mudança de coordenadas $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$



$$x = 0 \implies u = v, \quad y = 0 \implies u = -v, \quad x + y = 2 \implies u = 2.$$

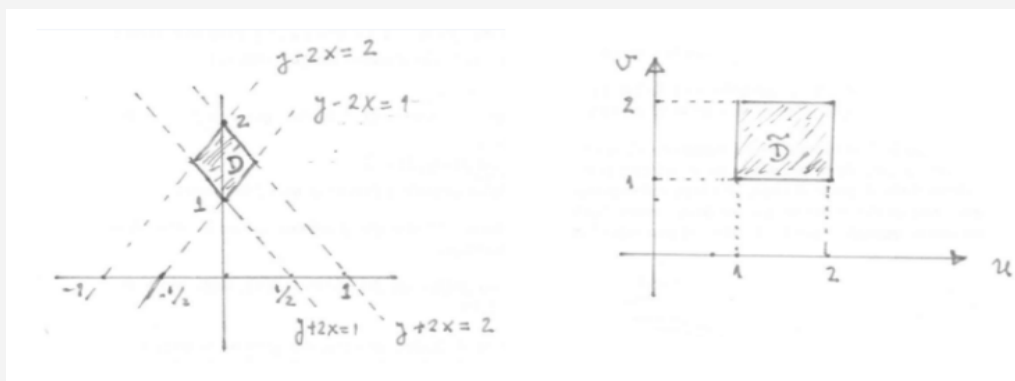
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2. \quad \therefore \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\int_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\tilde{D}} e^{\frac{v}{u}} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}} dv du = \frac{1}{2} \int_0^2 u e^{\frac{v}{u}} \Big|_{v=-u}^{v=u} du = \frac{e - e^{-1}}{2} \int_0^2 u du$$

Logo, $\int_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy = e - e^{-1}.$

Exemplo 1.30 Calcular $\int_D \frac{y+2x}{y-2x} dA$, onde D é a região limitada pelas retas $y - 2x = 2$, $y + 2x = 2$, $y - 2x = 1$ e $y + 2x = 1$.

Solução: façamos $\begin{cases} u = y + 2x \\ v = y - 2x \end{cases}$

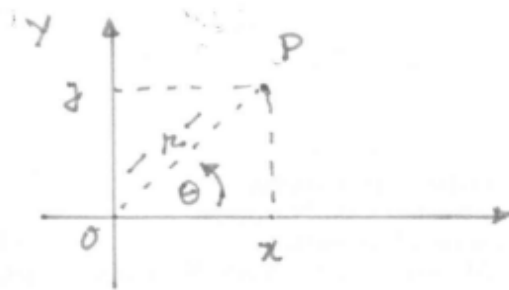


$$y - 2x = 2 \implies v = 2, \quad y + 2x = 2 \implies u = 2, \quad y - 2x = 1 \implies v = 1, \quad \text{e} \quad y + 2x = 1 \implies u = 1,$$

$$\int_D \frac{y+2x}{y-2x} dA = \int_{\tilde{D}} \frac{u}{v} \frac{1}{4} du dv = \frac{1}{4} \int_1^2 \int_1^2 \frac{u}{v^2} du dv = \dots = \frac{3}{16}.$$

1.7 Coordenadas Polares

As coordenadas polares de um ponto P com coordenadas retangulares (x, y) são (r, θ) onde $r = d(P, O)$ é a distância do ponto P à origem O e θ é o ângulo entre o eixo X e o segmento de reta que liga os pontos O e P .



A relação entre as coordenadas (x, y) e as coordenadas (r, θ) é dada por:
$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

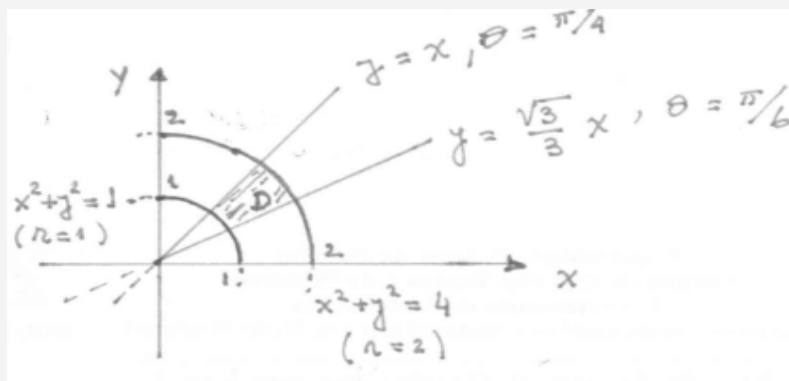
Note que esta mudança é injetiva em $\tilde{D} = \{(r, \theta) : r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ com θ_0 constante.

Além disso, esta mudança transforma a região circular $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ na região retangular $\tilde{D} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

A matriz Jacobiana desta transformação é: $J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$ e $\det(J) = r$.

Exemplo 1.31 Calcular $\int_D (x^2 + y^2) dA$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, no primeiro quadrante.

Solução:



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \tilde{D} = \left\{ (r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

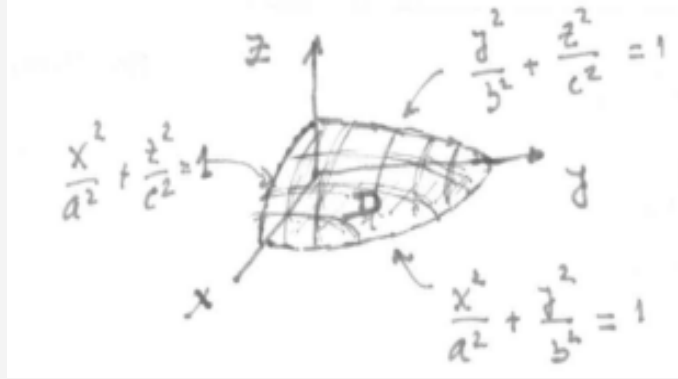
$$\int_D (x^2 + y^2) dA = \int_{\tilde{D}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^3 dr d\theta = \dots = \frac{5\pi}{16}.$$

Exemplo 1.32 Calcular o volume do sólido W limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Solução: Pela simetria do elipsóide podemos calcular a volume no primeiro octante, assim:

$$Vol(W) = 8 \int_D c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} dx dy$$

onde D é a região, no primeiro quadrante do plano XY , limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Façamos a mudança de coordenadas $\begin{cases} x = ar \cos(\theta) \\ y = br \sin(\theta) \end{cases}$

O jacobiano desta mudança é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} a \cos(\theta) & -ar \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & br \cos(\theta) \end{pmatrix} = abr.$$

Logo,

$$vol(W) = 8 \int_D c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} dx dy = 8abc \int_{\tilde{D}} r \sqrt{1 - r^2} dr d\theta = 8abc \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1 - r^2} dr d\theta$$

$$vol(W) = \dots = \frac{4}{3} abc \pi.$$

Note que $\begin{cases} x = ar \cos(\theta) \\ y = br \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$. Logo, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow r = 1$.

Daí, $\tilde{D} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

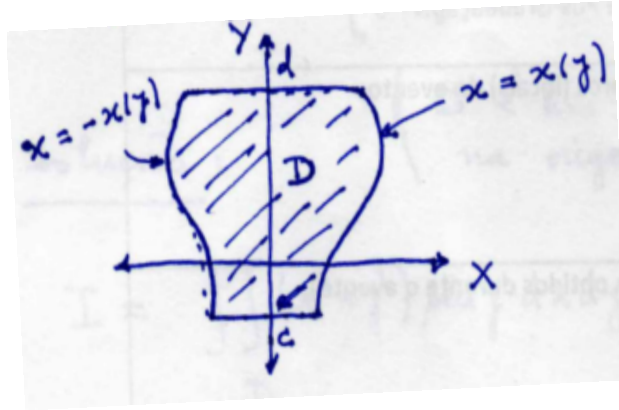
1.8 Simetria em Integrais Duplas

Dos cursos anteriores de Cálculo sabemos que se $f = f(x)$ é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

No caso de integrais duplas temos.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio simétrico em relação, por exemplo, ao eixo Y .



D é limitado à direita pela curva $x = x(y)$ e à esquerda pela curva $x = -x(y)$.

Seja $f = f(x, y)$ uma função contínua ímpar na variável x (i.e. $f(-x, y) = -f(x, y)$). Então

$$\int_D f(x, y) dx dy = 0.$$

De fato, neste caso,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{-x(y)}^{x(y)} f(x, y) dx \right\} dy = \int_c^d 0 dy = 0$$

Analogamente, se o domínio D é simétrico em relação ao eixo X e f é ímpar na variável y (i.e. $f(x, -y) = -f(x, y)$), então $\int_D f(x, y) dx dy = 0$.

Exemplo 1.33 Calcular $I = \int_D [(x^2 + y^2) \sin(y) + x^3 y^2] dx dy$ onde D é o círculo de raio r e centro na origem.

Solução:

$$I = \int_D (x^2 + y^2) \sin(y) dx dy + \int_D x^3 y^2 dx dy$$

Note que:

(1) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(y)$ é ímpar na variável y e D é simétrico com relação ao eixo X . Logo,

$$\int_D (x^2 + y^2) \sin(y) dx dy = 0.$$

(2) $g(x, y) = x^3 y^2$ é ímpar na variável x e D é simétrico com relação ao eixo Y , logo

$$\int_D x^3 y^2 dx dy = 0.$$

Assim, $I = 0$.

1.9 Aplicações da Integral Dupla

1.9.1 Massa Total

Considere uma lâmina fina com a forma de uma região elementar $D \subset \mathbb{R}^2$ e suponha que a massa sobre D se distribui com densidade dada por uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, positiva e

integrável sobre D . f representa a massa por unidade de área em cada ponto $(x, y) \in D$.

A massa total de D é dada por

$$M(D) = \int_D f(x, y) dx dy$$

Em particular, se a lâmina é feita de material homogêneo (a densidade é constante), a massa total é o produto da densidade pela área de D .

1.9.2 Momento de Massa

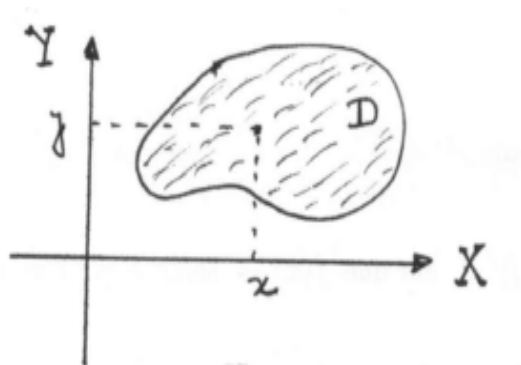
O momento de massa da lâmina D em relação a uma reta l é dado por

$$M_l = \int_D d(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

onde $d(x, y)$ é a distância do ponto $(x, y) \in D$ à reta l .

Em particular os momentos de massa da lâmina D em relação aos eixos coordenados X e Y são dados, respectivamente, por

$$M_x = \int_D y f(x, y) dx dy \quad \text{e} \quad M_y = \int_D x f(x, y) dx dy$$



1.9.3 Centro de Massa

O centro de massa da lâmina D é dado por $(\bar{x}, \bar{y})$ onde,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M(D)} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M(D)}$$

Se $f(x, y) \equiv k > 0$, $(\bar{x}, \bar{y})$ é chamado de *centróide* de D e corresponde ao centro geométrico da região D .

O centro de massa pode ser pensado como um ponto onde a massa da lâmina se concentra sem alterar seu momento em relação a qualquer eixo.

Se $f(x, y)$ não é constante, então o centro de massa de D pode não coincidir com o centróide de D .

1.9.4 Momento de Inércia

O momento de inércia da lâmina D em relação a uma reta l é

$$I_l = \int_D d^2(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

onde $d^2(x, y)$ é o quadrado da distância do ponto (x, y) à reta l .

Em particular, se l é o eixo X , então

$$I_X = \int_D y^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

E se l é o eixo Y , então

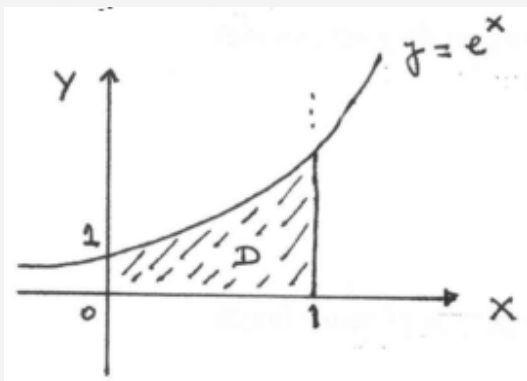
$$I_Y = \int_D x^2 \cdot f(x, y) dx dy$$

Define-se ainda, o momento de inércia polar em relação à origem como:

$$I_0 = I_X + I_Y = \int_D (x^2 + y^2) \cdot f(x, y) dx dy$$

Exemplo 1.34 Determinar o momento de inércia polar da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $x = 1$, $y = 0$ e $x = 0$; se a densidade é dada por $f(x, y) = xy$

Solução:



$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_D y^2 \cdot xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{e^x} xy^3 dy dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{4} xy^4 \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x e^{4x} dx \\
 &= \frac{1}{16} x e^{4x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{16} e^{4x} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{4}x \quad du = \frac{1}{4}dx \\ dv = e^{4x} \quad v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right. \\
 &= \dots = \frac{3}{64} e^4 - \frac{1}{64}.
 \end{aligned}$$

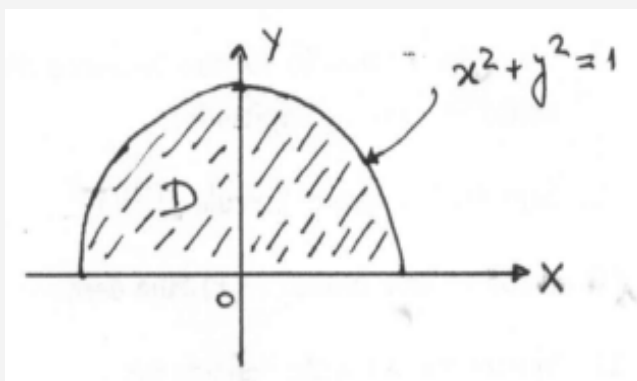
$$\begin{aligned}
 I_Y &= \int_D x^2 \cdot xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{e^x} x^3 y dy dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 y^2 \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 e^{2x} dx \\
 &= \dots = \frac{e^2}{16} + \frac{3}{16}.
 \end{aligned}$$

$$I_0 = I_X + I_Y = \frac{3}{64} e^4 + \frac{e^2}{16} - \frac{1}{64} + \frac{3}{16}.$$

$$\therefore I_0 = \frac{1}{64} (3e^4 + 4e^2 + 11).$$

Exemplo 1.35 Determinar a massa de uma lâmina D que ocupa a região $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ se sua densidade, em cada ponto, é proporcional à distância do ponto à origem.

Solução:



A densidade, no ponto (x, y) , é $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$M(D) = \int_D k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

Passando para coordenadas polares $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ temos:

$$\begin{aligned} M(D) &= k \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{r^2} r d\theta dr \\ &= k \int_0^1 \int_0^\pi r^2 d\theta dr = \pi k \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{1}{3} k \pi \text{ unidades de massa.} \end{aligned}$$