Comprimento de curvas planas

Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em (a,b) (i.e. f tem derivada contínua em (a,b)) então o comprimento de arco s de $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é igual a:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

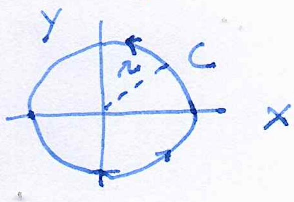
Se uma curva C está definida parametricamente por $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$

com $x'(t)$ e $y'(t)$ contínuas e não nulas simultaneamente em $[a,b]$ e C é percorrida uma vez quando t "vai" de $t = a$ para $t = b$, então o comprimento da curva C é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Exemplos

(1) Comprimento de uma circunf. de raio r



$x^2 + y^2 = r^2$

C pode ser parametrizada por:

$x(t) = r\cos t$

$y(t) = r\,\mathrm{sen}\, t \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$

Temos: $x'(t) = -r\,\text{sen}\,t$

$y'(t) = r\cos t$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = r^2\,\text{sen}^2 t + r^2\cos^2 t$$
$$= r^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)$$
$$= r^2$$

Daí

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\,dt \underset{(r>0)}{=} r\,t\Big|_0^{2\pi} = r\,(2\pi - 0)$$
$$= 2\pi r$$

(2) Calcule o comprimento da curva dada pelo gráfico de $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$ de $x = 1$ a $x = 3$

Solução:

$$y' = x^2 - \frac{1}{4x^2} \Rightarrow (y')^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2$$
$$= x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}$$

$$1 + (y')^2 = x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}$$
$$= \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{1 + (y')^2} = x^2 + \frac{1}{4x^2}$$

Daí

$$s = \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^{-1}\right)\Big|_1^3$$
$$= \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 9 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$= 53/6$$

(3) Calcular o comprimento da curva

$$C: \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

Solução

$$x' = e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

$$y' = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

$$(x')^2 + (y')^2 = e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + e^{2t}(\cos t + \operatorname{sen} t)^2$$

$$= e^{2t}\left(\cos^2 t - \cancel{2 \operatorname{sen} t \cos t} + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \cancel{2 \operatorname{sen} t \cos t} + \operatorname{sen}^2 t\right)$$

$$= e^{2t}\left[(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\right]$$

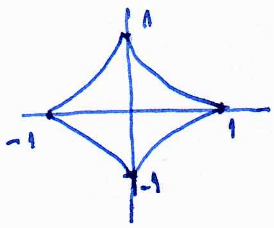
$$= 2e^{2t}$$

$$\therefore \quad s = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^\pi e^t\, dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^t \Big|_0^\pi = \sqrt{2}\,(e^\pi - e^0)$$

$$= \sqrt{2}\,(e^\pi - 1)$$

(4) A curva dada pela eq. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ é conhecida como astróide (pelo seu formato)



Vamos calcular o seu comprimento.

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \Rightarrow y^{2/3} = 1 - x^{2/3}$$

$$\Rightarrow y = (1 - x^{2/3})^{3/2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{suponha} \\ 0 \leq x \leq 1\end{array}\right)$$

Daí $$y' = \frac{3}{2}(1 - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-1/3}$$

$$= \frac{-(1 - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$$

$$\Rightarrow (y')^2 = \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}}$$

Daí $$1 + (y')^2 = \frac{x^{2/3} + 1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = x^{-1/3}$$

$$\therefore \quad s = 4\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = 4\,\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^1 = 6$$

pela simetria da curva.

A astróide pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\left(\begin{array}{l} x^{2/3} + y^{2/3} = (\cos^3 t)^{2/3} + (\operatorname{sen}^3 t)^{2/3} \\ \qquad = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \\ \therefore \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \end{array} \right)$$

$x = \cos^3 t \Rightarrow x' = -3\cos^2 t \,\text{sen}\, t$

$y = \text{sen}^3 t \Rightarrow y' = 3\,\text{sen}^2 t \cos t$

$$(x')^2 + (y')^2 = 9\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9\,\text{sen}^4 t \cos^2 t$$
$$= 9\,\text{sen}^2 t \cos^2 t\,(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)$$
$$= 9\,\text{sen}^2 t \cos^2 t$$

$$\therefore \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3|\text{sen}\, t \cos t|$$

Daí

$$s = 4\int_0^{\pi/2} 3\,\text{sen}\, t \cos t\, dt$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 t \Big|_0^{\pi/2}$$
$$= 6\left(\text{sen}^2 \pi/2 - \text{sen}^2 0\right) = 6(1-0)$$
$$= \underline{\underline{6}}$$