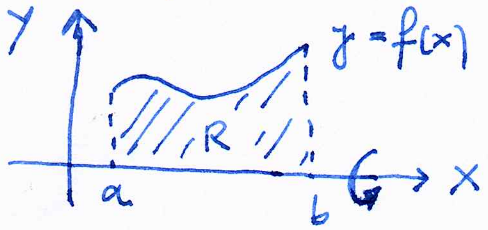
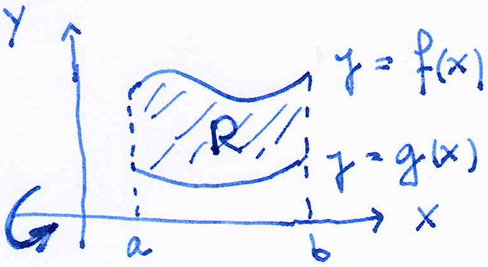
# Volume de um sólido de revolução

## I Método do Disco

Quando giramos uma região R entre dois gráficos em torno de um eixo, os segmetos perpendiculares ao eixo de revolução geram discos ou arruelas. O volume V do sólido de revolução é a integral da área destes discos ou arruelas.

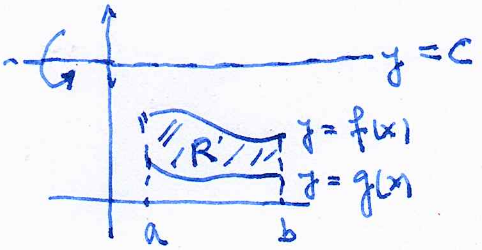



$$\boxed{V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx}$$



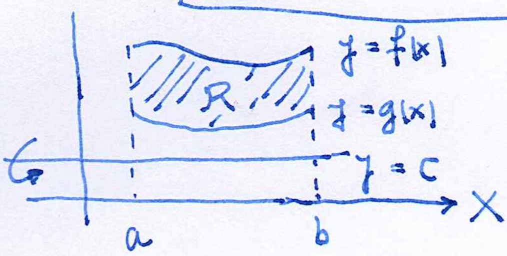

R: região entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ $a \leq x \leq b$ girando em torno do eixo X

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} dx}$$




R: região entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ $a \leq x \leq b$ girando em torno da reta $y = C$ $g(x) \leq f(x) \leq C$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[ (C - g(x))^2 - (C - f(x))^2 \right] dx}$$




R: região entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ $a \leq x \leq b$ girando em torno de $y = C$ $C \leq g(x) \leq f(x)$

$$V = \pi \int_a^b \left\{ (f(x) - c)^2 - (g(x) - c)^2 \right\} dx$$

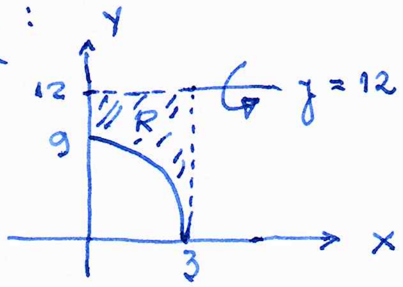
## Exemplos

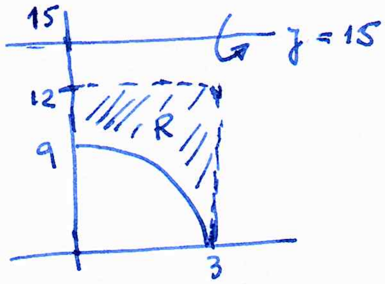
(1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região $R$ limitada pelo gráfico de $y = 9 - x^2$ e a reta $y = 12$ com $0 \leq x \leq 3$

(a) Em torno de $y = 12$  (b) Em torno de $y = 15$

Solução:

(a)




(a) $$V = \pi \int_0^3 \left[12 - (9 - x^2)\right]^2 dx = \pi \int_0^3 (3 + x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^3 (9 + 6x^2 + x^4) dx = \pi \left(9x + 2x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3$$

$$= \pi \left(27 + 54 + \frac{243}{5}\right) = \frac{648}{5}\pi$$

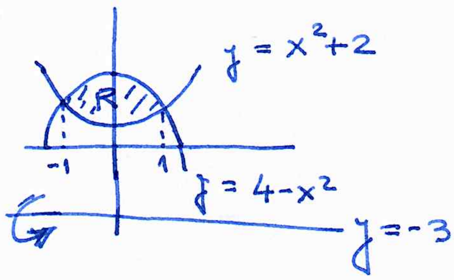
(b) $$V = \pi \int_0^3 \left\{\left[15 - (9 - x^2)\right]^2 - (15 - 12)^2\right\} dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left\{(6 + x^2)^2 - 3^2\right\} dx = \pi \int_0^3 (27 + 12x^2 + x^4) dx$$

$$= \pi \left(27x + 4x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3$$

$$= \pi \left(81 + 108 + \frac{243}{5}\right) = \frac{1188}{5}\pi$$

(2)




$x^2+2 = 4-x^2$

$\Rightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$

$\boxed{x = \pm 1}$

R gira em torno da reta $y=-3$

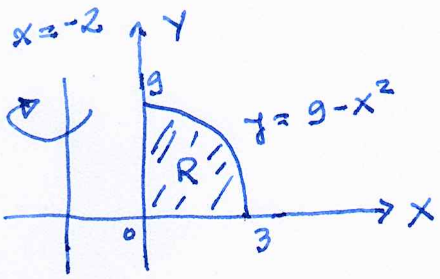
$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left\{ \left[ (4-x^2) - (-3) \right]^2 - \left[ (x^2+2) - (-3) \right]^2 \right\} dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left[ (7-x^2)^2 - (x^2+5)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left( 24 - 24x^2 \right) dx = \pi \left( 24x - 8x^3 \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left( (24-8) - (-24+8) \right) = 32\pi$$

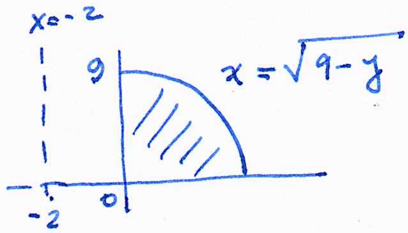
(3)




$R: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 9-x^2 \end{cases}$

R gira em torno da reta $x=-2$

Vamos integrar c/r a $y$



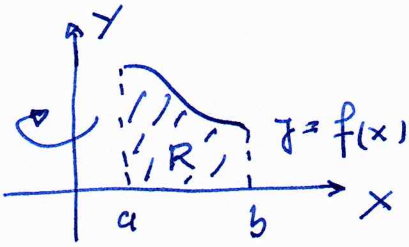

$$V = \pi \int_0^9 \left\{ \left[ \sqrt{9-y} - (-2) \right]^2 - 2^2 \right\} dy$$

$$= \pi \int_0^9 \left( \left( \sqrt{9-y} + 2 \right)^2 - 4 \right) dy = \pi \int_0^9 \left( 4\sqrt{9-y} + 9 - y \right) dy$$

$$= \pi \left[ -\frac{8}{3} (9-y)^{3/2} + 9y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^9 = \ldots \; \frac{225}{2} \pi$$

(4) No exemplo (3) anterior o cálculo pode ser feito da seguinte forma:

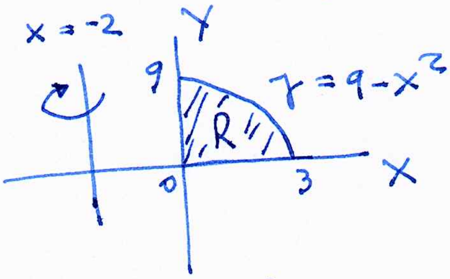
Lembre:




Se $y = f(x)$ é contínua e não negativa ($f(x) \geq 0 \ \forall x$) e $R$ é a região limitada pelo gráfico de $y = f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ ($0 \leq a < b$) e o eixo $X$, então o sólido obtido ao girar $R$ em torno do eixo $Y$ tem volume dado por:

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx}$$

No caso anterior




$$V = 2\pi \int_0^3 (x+2)(9-x^2)\, dx = 2\pi \int_0^3 (-x^3 - 2x^2 + 9x + 18)\, dx$$

$$= 2\pi \left( -\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 18x \right) \Big|_0^3$$

$$= 2\pi \left( -\frac{81}{4} - \frac{54}{3} + \frac{81}{2} + 54 - 0 \right)$$

$$= 2\pi \left( \frac{27}{12} + 54 \right) = \frac{675}{6}\pi = \frac{225}{3}\pi$$