Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 5 : Cálculo Diferencial e Integral II

Profs.: Pedro A. Hinojosa - Fernando A. Xavier

1 *Calcule* $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0)$, *sendo dados:*

a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2, \quad (x_0, y_0) = (1, 2,) \quad e \quad \overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j};$

b) $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2), \quad (x_0, y_0) = (1, 1) \quad e \quad \overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j};$

c) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}, \quad (x_0, y_0) = (3, 3) \quad e \quad \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}).$

2 *Determine a direção e o sentido em que a função* $f(x,y)$ *dada cresce mais rapidamente, no ponto* P *dado. Em que direção e sentido decresce mais rapidamente?*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy, \quad P = (1, 1);$

b) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad P = (1, \frac{1}{2}).$

3 *Uma função diferenciável* $f(x,y)$ *tem, no ponto* $(1,1)$ *derivada direcional igual a* 3 *na direção de* $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ *e igual a* -1 *na direção de* $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$. *Calcule:*

a) $\nabla f(1,1);$

b) $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{w}}(1,1), \quad onde \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}.$

4 *Determine a natureza dos pontos críticos das funções abaixo:*

a) $f(x,y) = 2y^3 - 3x^4 - 6x^2y + 5;$

b) $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2);$

c) $f(x,y) = y + x sen(y);$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{4x^2+2y^2}; & (x,y) \neq 0 \\ 0; & (x,y) = 0 \end{cases}.$

5 *Determine os pontos de máximo e mínimo das funções* $f(x,y)$ *dadas abaixo nas regiões* $\mathcal{R}$ *indicadas.*

a) $f(x,y) = xy, \quad \mathcal{R} : x^2 + y^2 \leq 1;$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \mathcal{R} : 0 \leq x \leq 3, \ -1 \leq y \leq 3;$

c) $f(x,y) = y + x sen(y), \quad \mathcal{R} = \mathbb{R}^2$, *(O plano todo).*

6 *A distribuição de temperatura na chapa circular* $x^2 + y^2 \leq 1$ *é dada pela função* $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$. *Ache as temperaturas máximas e mínimas da chapa.*

7 *Ache os pontos da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *mais próximo do ponto* $P = (3, 3, 3)$.

8 *Use multiplicadores de Lagranje para achar os extremos da função* f *sujeita ao vínculo dado.*

a) $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2, \qquad x^2 + y^2 = 1;$

b) $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2 + y; \qquad 2x + 3y = 1;$

c) $f(x, y, z) = x + y + z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 25;$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad x + y + z = 25.$

9 *Deseja-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar* $270m^3$ *de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes são feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determine as dimensões do tanque.*