Prof. Pedro A. Hinojosa

1. Integral Indefinida

Iniciamos tratando do processo inverso da derivação. O problema de determinar a forma e os valores de uma função a partir do conhecimento da sua derivada ou de uma equação envolvendo suas derivadas é chamado problema de integração. Neste sentido o problema de integração é o problema inverso do problema de derivação.

Def. Uma função $F(x)$ é chamada uma Primitiva ou Antiderivada da função $f(x)$ em um intervalo I, sse:

$$\forall x \in I: \quad F'(x) = f(x).$$

Obs

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$, $C = \text{cte}$, também é uma primitiva de $f(x)$. De fato,

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x).$$

Além disso, se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$, então

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)-G(x)\right) = \frac{d}{dx}F(x) - \frac{dG}{dx} = f(x)-f(x) = 0.$$

Ou seja, $F(x)-G(x) = C$, $C = \text{cte}$.

$$\therefore \quad F(x) = G(x)+C$$

Def:

Se $f(x)$ é uma função definida num intervalo I, a família de primitivas (ou antiderivadas) de $f(x)$ em I é chamada "Integral Indefinida de $f(x)$ em I" e é denotada pelo símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

Ou seja, a integral indefinida de uma função $f(x)$ $\int f(x)dx$, é a família de funções

$$\int f(x)\,dx = \left\{ F: I \to \mathbb{R} : \frac{dF}{dx}(x) = f(x) \right\} \quad \ldots (*)$$

Em geral escrevemos $\int f(x)dx = F(x)$ para indicar que a função $F(x)$ pertence à família $(*)$

Obs

(1) Se $\int f(x)dx = F(x)$ e $\int f(x)dx = G(x)$ então $F(x) - G(x) = C = \text{cte}.$

Em particular se $f_0(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então a família $\int f(x)dx$ é $\{f_0(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$ escrevemos simplesmente

$$\int f(x)\,dx = f_0(x) + C \ , \quad C \in \mathbb{R}$$

(2) $$\int 0\,dx = c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(3) $$\int \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(x) + C$$

(Isto justifica o nome de processo inverso da derivação.)

(4) Para determinar univocamente uma das primitivas da função $f(x)$ temos que fixar o valor dessa primitiva em algum pto do seu domínio. Por exemplo, a primitiva de $f(x) = 4x^3+6x^2$ tal que $F(1) = 10$ é $F(x) = x^4 + 2x^3 + 7$

ou seja,
$$\int f(x)\,dx = \int (4x^3+6x^2)\,dx$$
$$= x^4 + 2x^3 + C = F(x)$$

e $F(1) = 10 \Rightarrow 1^4 + 2\cdot 1^3 + C = 10$
$$\Rightarrow \underline{\underline{C = 7}}$$
$$\therefore \quad F(x) = x^4 + 2x^3 + 7$$

Exemplos :

Usando o nosso conhecimento de derivadas concluimos rapidamente que:

1) $\int k\,dx = kx + c \qquad k, c \in \mathbb{R}$ (ctes)

2) $\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n} a_n x^n + C$

(3) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

$\int \operatorname{sen}(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$

4) $\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{sen}(ax) + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C \ , \ \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

etc

Propriedades da Integral Indefinida

Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções e $K \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

(1) $\int K f(x)\, dx = K \int f(x) dx$

(2) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Dem:

Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$ e $g(x)$ respect., então é claro que $K F(x)$ e $F(x) + G(x)$ são primitivas de $K f(x)$ e $f(x) + g(x)$ respect.

De fato, $(KF(x))' = K F'(x) = K f(x)$

e $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

Exemplos

Calcular as integrais indefinidas:

(1) $I = \int \left(\dfrac{x^5 - 3x^2 + 1}{4x^2} \right) dx$

$$I = \int \left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{16} x^4 - \frac{3}{4} x - \frac{1}{4x} + C$$

(2) $I = \int \left(e^x + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x} \right) dx$

$$I = e^x + \int x^{1/2} dx + \int \frac{dx}{x}$$

$$= e^x + \frac{1}{\cancel{2}} x^{3/2} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} + \ln x + C$$

$$= e^x + \frac{1}{3} x^{3/2} + \ln x + C$$

(3) $I = \int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx$ $\qquad \left(\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} \right)$

$$I = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x - \operatorname{arctg} x + C$$

Métodos de Integração

(1) Mudança de variáveis ou Integração por substituição

Pela regra da cadeia temos:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= f(g(x)) \cdot g'(x)$$

onde f e F são funções t.q. $F'(x) = f(x)$.

Assim,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ temos

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

Exemplos:

(1) $I = \int \frac{3x^2}{1+x^3}dx$

$\begin{cases} u = 1+x^3 \\ du = 3x^2dx \end{cases}$ $\quad I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$$\therefore \int \frac{3x^2}{1+x^3}dx = \ln|1+x^3| + C$$

(2) $I = \int sen^4 x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = sen\, x \\ du = \cos x \, dx \end{cases} \qquad I = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$\therefore \int sen^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{5} sen^5 x + C$$

(3) $I = \int 4x^2 \sqrt{8x^3+3} \, dx$

$u = 8x^3 + 3$

$du = 24x^2 dx = 6 \cdot (4x^2 dx)$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{6} du = \int \frac{1}{6} u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{9} u^{3/2} + C$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{9} (8x^3+3)^{3/2} + C$$

(2) Integração por Partes

Dadas duas funções deriváveis $f(x)$ e $g(x)$ temos

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$$

Daí,

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Na prática fazemos

$$\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx \end{cases}$$

e temos

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Exemplos Calcular:

(1) $$\int x e^{3x} dx$$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3}x e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

$$= \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{3x} + C$$

(2) $\int x \operatorname{sen} 4x \, dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} 4x \Rightarrow \cancel{dv}\, v = -\frac{1}{4} \cos 4x$

$$\int x \operatorname{sen} 4x \, dx = -\frac{1}{4} x \cos 4x - \int -\frac{1}{4} \cos 4x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 4x + \int \frac{1}{4} \cos 4x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 4x + C$$

(3) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

$u = x^2 \Rightarrow dx = x\,dx$

$dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x - \int -x \cos x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + \int x \cos x \, dx \quad \ldots \quad (*)$$

Novamente usamos integração por partes para calcular $\int x \cos x \, dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$$\int x \cos x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

substituindo em $(*)$ obtemos:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

(4). $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0,\ b \neq 0.$

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = a\,e^{ax}\,dx$$

$$dv = \cos bx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{b}\,\mathrm{sen}\,bx$$

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx - \int \frac{a}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx - \frac{a}{b}\underbrace{\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx}_{=\,?}$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx = ??$$

Integrando por partes ... (de novo)

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = a\,e^{ax}\,dx$$

$$dv = \mathrm{sen}\,bx\,dx \Rightarrow v = \frac{-1}{b}\cos bx$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx - \int -\frac{a}{b}a^{x}\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int a^{x}\cos dx$$

Daí:

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx - \frac{a}{b}\left[\frac{-1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int a^{x}\cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\underbrace{\int a^{x}\cos x\,dx}_{I}$$

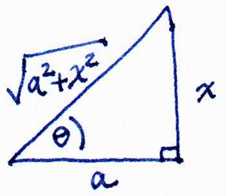
$$\therefore \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{1}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

daí

$$I = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}\left[\frac{1}{b}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx\right] + C$$

Substituições Trigonométricas

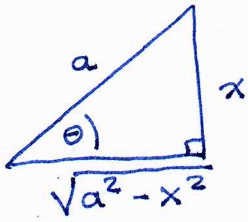
Estas substituições nos permitem converter os binômios a^2+x^2, a^2-x^2 e x^2-a^2 pelo quadrado de um único termo. As mais comuns surgem dos seguintes triângulos retângulos

(1) 

$$\boxed{x = a\,tg\,\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$\therefore \underbrace{\sqrt{a^2+x^2} = a|\sec\theta|}$$

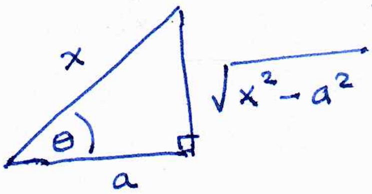
(2) 

$$\boxed{x = a\,sen\,\theta}$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2 sen^2\theta}$$

$$= a\sqrt{1-sen^2\theta} = a\sqrt{\cos^2\theta}$$

$$\underbrace{\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos\theta|}$$

(3) 

$$\boxed{x = a\sec\theta}$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}$$

$$= a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\sqrt{tg^2\theta}$$

$$\therefore \underbrace{\sqrt{x^2-a^2} = a|tg\,\theta|}$$

Assim,

(1) $x = a\,tg\,\theta$ nos dá $a^2+x^2 = a^2\sec^2\theta$

(2) $x = a\,sen\,\theta$ " " $a^2-x^2 = a^2\cos^2\theta$

(3) $x = a\sec\theta$ " " $x^2-a^2 = a^2 tg^2\theta$

Além disso,

$x = a\,tg\,\theta \Rightarrow \theta = arctg(x/a)$, com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$x = a\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = \text{arcsen}(x/a)$, $\quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

e $\quad x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \text{arc sec}(x/a)$ com

$$\begin{cases} 0 \leq \theta < \pi/2 & \text{se } x/a \geq 1 \\ \pi/2 < \theta \leq \pi & \text{se } x/a \leq -1 \end{cases}$$

__Exemplos__:

1) Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

__Solução__:

$$\begin{cases} x = 3\,\text{tg}\,\theta & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$9+x^2 = 9 + 9\,\text{tg}^2\theta = 9(1+\text{tg}^2\theta) = 9\sec^2\theta$$

Daí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta \quad \left(\begin{array}{l} \sec\theta > 0 \text{ para } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ \therefore |\sec\theta| = \sec\theta \text{ em } (-\pi/2, \pi/2) \end{array} \right)$$

$$= \ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta| + C.$$

$$\theta = \text{arctg}(x/3) \quad \therefore \quad \text{tg}\,\theta = x/3$$

$$\text{tg}\,\theta = x/3 \Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\theta = 1 + \frac{x^2}{9} = \frac{9+x^2}{9}$$

$$\therefore |\sec\theta| = \sqrt{\frac{9+x^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{9+x^2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln\left|\frac{1}{3}\sqrt{9+x^2} + \frac{x}{3}\right| + C$$

2) Calcular, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Solução:

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 4 - 4\,\text{sen}^2\theta = 4(1-\text{sen}^2\theta)$$
$$dx = 2\cos\theta\, d\theta \qquad\qquad = 4\cos^2\theta$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\,\text{sen}^2\theta\, 2\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}} = \int \frac{8\,\text{sen}^2\theta \cdot \cos\theta\, d\theta}{2|\cos\theta|}$$

$$= \int 4\,\text{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\cos\theta > 0 \text{ para } -\pi/2 < \theta < \pi/2\right)$$

Lembre que $\text{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$\left(\begin{array}{c} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta \\ \therefore \quad \text{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \end{array}\right)$$

Daí

$$\int 4\,\text{sen}^2\theta\, d\theta = 4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= 2\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= 2\theta - \text{sen}\, 2\theta + C$$

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{arcsen}(x/2)$$
$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-(x/2)^2}$$
$$= x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$$

3) calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$ $\quad (x > 3/2)$

solução

$$\sqrt{4x^2-9} = \sqrt{4\left(x^2-\frac{9}{4}\right)} = 2\sqrt{x^2-(3/2)^2}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\sec\theta} \Longrightarrow x^2-(3/2)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2\sec^2\theta - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$dx = \frac{3}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \qquad = \left(\frac{3}{2}\right)^2(\sec^2\theta-1)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \mathrm{tg}^2\theta$$

$$\therefore \sqrt{x^2-(3/2)^2} = 3/2 \cdot \sqrt{\mathrm{tg}^2\theta}$$

$$= 3/2\,|\mathrm{tg}\,\theta|$$

$$= 3/2\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad \left(\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,\theta > 0 \\ \text{para } 0 < \theta < \pi/2\end{array}\right.$$

Daí,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{3/2\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta}{2 \cdot 3/2\,\mathrm{tg}\,\theta} = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C$$

$$x = \frac{3}{2}\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{2x}{3}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\frac{4}{9}x^2 - 1} = \sqrt{\frac{4x^2-9}{9}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{4x^2-9}\right| + C$$