UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Cálculo II - Prova 3 - 07/06/2023

Prof.: Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

1 (2,5 pts.) *Encontre todos os pontos de máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função dada por:* $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$.

2 (2,5 pts.) *O plano* $x+y+z=1$ *corta o cilindro* $x^2+y^2=1$ *em uma elipse. Encontre os pontos sobre essa elipse que estão mais próximos e os que estão mais afastados da origem.*

3 (2,5 pts.) *Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função* $f(x,y,z) = 2x+6y+10z$ *sujeita à restrição* $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 35$.

4 (2,5 pts.) *Encontre os pontos de máximo e os de mínimo absolutos para a função* $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ *no triângulo, no primeiro quadrante, limitado pelas retas* $x = 0,\ y = 0$ *e* $y = 1 - x$.

Boa Prova !!

C2 Prova 3 07/06 2022.2

(1) Máximos, mínimos locais e ptos de sela para

$$f(x,y) = x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$$

solução

$f_x = 3x^2+6x$, $f_x=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0$
$\Rightarrow x(x+2)=0$
$\Rightarrow x=0$ ou $x=-2$

$f_y = 3y^2-6y$, $f_y=0 \Rightarrow 3y^2-6y=0$
$\Rightarrow y(y-2)=0$
$\Rightarrow y=0$ ou $y=2$

Temos os seguintes ptos críticos:

$P_1=(0,0)$, $P_2=(0,2)$, $P_3=(-2,0)$ e $P_4=(-2,2)$

$f_{xx} = 6x+6 = 6(x+1)$
$f_{yy} = 6y-6 = 6(y-1)$
$f_{xy} = 0$

$J = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2$
$J = 36(x+1)(y-1)$

$f_{xx}(P_1) = f_{xx}(0,0) = 6>0$, $J(0,0) = -36<0$
$P_1=(0,0)$ é pto de sela

$f_{xx}(P_2) = f_{xx}(0,2) = 6>0$, $J(0,2) = 36>0$
$P_2=(0,2)$ é pto de Mínimo

$f_{xx}(P_3) = f_{xx}(-2,0) = -6<0$, $J(-2,0) = 36>0$
$P_3=(0,2)$ é pto de Máximo

$f_{xx}(P_4) = f_{xx}(-2,2) = -6<0$, $J(-2,2) = -36<0$
$P_4=(-2,2)$ é pto de sela

$\cancel{f_{xx}(P_4) = f_{xx}(3,3) = -6 < 0}$, $\cancel{J(P_4) = J(-3,3) = -36\cdot 4 < 0}$

~~P_4 é pto de sela~~

② $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \quad \ldots \quad \text{elipse} \end{cases}$

Ptos da elipse mais próximos e mais afastados da origem.

<u>Solução</u>

Queremos determinar ptos de máx e mín de

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

(quadrado da distância de um pto (x,y,z) à origem)

sujeito às condições $\begin{cases} g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \\ h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\nabla g = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla h = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$\nabla f = \alpha \nabla g + \beta \nabla h \Rightarrow \begin{cases} 2x = \alpha + 2\beta x \\ 2y = \alpha + 2\beta y \\ 2z = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x &= 2z + 2\beta x \longrightarrow x = z + \beta x \\ 2y &= 2z + 2\beta y \longrightarrow y = z + \beta y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= x - \beta x = (1-\beta)x \\ z &= y - \beta y = (1-\beta)y \end{aligned}$$

$\therefore \quad (1-\beta)x = (1-\beta)y$

$\Rightarrow \quad \beta = 1 \quad ($ e logo $z = 0 \quad (z = (1-\beta)x))$

ou $\quad x = y = \dfrac{z}{1-\beta} \quad , \beta \neq 1$

$\underline{z = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} g = 0 \Rightarrow x + y = 1 \\ h = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

Neste caso, temos os ptos $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$

$f(1,0,0) = 1 \quad , \quad f(0,1,0) = 1$

$\underline{x = y = z/1-\beta \quad , \beta \neq 1}$

$$x = y \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 1 & (g = 0) \\ 2x^2 = 1 & (h = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ x = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Neste caso, temos os ptos

$P = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1 - 2/\sqrt{2}\right)$ e $Q = \left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1 + 2/\sqrt{2}\right)$

$$f(P) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(1 - 2/\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4/\sqrt{2}$$

$$f(Q) = 1/2 + 1/2 + \left(1 + 2/\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 4/\sqrt{2}$$

$\therefore$ Ptos mais próximos da origem $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$

Pto mais afastado da origem $Q = \left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1 + 2/\sqrt{2}\right)$

#

③ Valores máx e mín de $f(x,y,z) = 2x + 6y + 10z$ sujeita à condição $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 35$.
(usando Lagrange)

Solução

$$\nabla f = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 10\vec{k}$$

$$\nabla g = 2x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 2z\vec{k}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 6 = 2\lambda y \\ 10 = 2\lambda z \end{cases}$$ (Daí, claro que $\lambda \neq 0$)

$$x = 1/\lambda, \quad y = 3/\lambda, \quad z = 5/\lambda$$

$$g = 35 \Rightarrow (1/\lambda)^2 + (3/\lambda)^2 + (5/\lambda)^2 = 35$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^2}(1 + 9 + 25) = 35$$

$$\Rightarrow 1/\lambda^2 = 1 \quad \therefore \quad \lambda^2 = 1$$

$$\boxed{\lambda = \pm 1}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}, \quad \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -5 \end{cases}$$

$$f(1,3,5) = 2 + 18 + 50 = 70$$

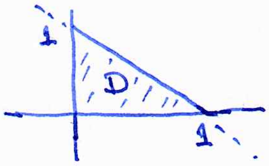
$$f(-1,-3,-5) = -2 - 18 - 50 = -70$$

Valor máx 70, em $(1,3,5)$

Valor mín -70, em $(-1,-3,-5)$

4 Máx e Min Absolutos para $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y +$
no Δ limitado por $x=0$, $y=0$ e $y = 1-x$.

Solução:



$f_x = 0 \Rightarrow 4 - 8y = 0 \Rightarrow y = 1/2$

$f_y = 0 \Rightarrow -8x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1/4$

$$f(1/4, 1/2) = 4 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$f(1/4, 1/2) = 2$$

Ptos na fronteira de D

i) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$g_1(x) = f(x,0) = 4x+1$, $g_1'(x) = 4 \neq 0$.

$f(0,0) = 1$, $f(1,0) = 5$

ii) $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$g_2(y) = f(0,y) = 2y+1$, $g_2'(y) = 2 \neq 0$.

$g_2(0) = f(0,0) = 1$, $g_2(1) = f(0,1) = 3$

iii) $\begin{cases} y = 1-x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$g_3(x) = f(x, 1-x) = 4x - 8x(1-x) + 2(1-x) + 1$

$= -6x + 8x^2 + 3$

$g_3(x) = 8x^2 - 6x + 3$

$g_3'(x) = 0 \Rightarrow 16x - 6 = 0$
$\Rightarrow x = 6/16 = 3/8$ $\boxed{x = 3/8}$

$x = 3/8 \Rightarrow y = 1 - 3/8 = 5/8$ $\boxed{y = 5/8}$

$$f(3/8, 5/8) = 4 \cdot \frac{3}{8} - 8 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8} + 1$$
$$= 3/2 - 15/8 + 10/8 + 1$$
$$= \frac{22}{8} - \frac{15}{8} + 1 = 7/8 + 1 = 15/8$$

$\boxed{f(3/8, 5/8) = 15/8}$

$f(1/4, 1/2) = 2$
$f(0,0) = 1 \longrightarrow$ Mín
$f(1,0) = 5 \longrightarrow$ Máx
$f(0,1) = 3$
$f(3/8, 5/8) = 15/8 \simeq 1,\ldots$

Mín. Abs. $(0,0)$
Máx Abs $(1,0)$