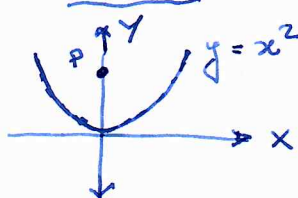


① Lista 8 Ex. 1

Determinar o pto da parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo do pto $(0,1) \in \mathbb{R}^2$

Solução



$P = (0,1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{A distância de um pto } (x,y) \text{ ao} \\ \text{pto } (0,1) \text{ é } \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \text{ que} \\ \text{é mínima sse } x^2 + (y-1)^2 \text{ é} \\ \text{mínima.} \end{array} \right.$

Queremos minimizar a função $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$
(quadrado da distância ao pto $(0,1)$) sujeita à condição
 $g(x,y) = x^2 - y = 0$.

$$\nabla f = 2x \vec{i} + 2(y-1) \vec{j}, \quad \nabla g = 2x \vec{i} - \vec{j}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2\lambda x \\ 2(y-1) = -\lambda \end{array} \right.$$

$$2x = 2\lambda x \Rightarrow x=0 \text{ ou } \lambda=1$$

$$x=0 \Rightarrow y = x^2 = 0 \quad \therefore \text{ Temos o pto } (0,0)$$

$$f(0,0) = 0 + (-1)^2 = 1$$

$$\begin{array}{l} x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow 2(y-1) = -1 \\ \Rightarrow y-1 = -1/2 \\ \Rightarrow y = 1/2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = 1/2 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2} \\ \text{temos os ptos} \\ (1/\sqrt{2}, 1/2) \text{ e } (-1/\sqrt{2}, 1/2) \end{array} \right.$$

$$f(1/\sqrt{2}, 1/2) = 1/2 + (1-1/2)^2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$f(-1/\sqrt{2}, 1/2) = 3/4 \quad \therefore$$

Os pto's da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(0,1)$ são $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$
 (Eles estão à distância $\frac{\sqrt{3}}{2}$ do pto $(0,1)$)

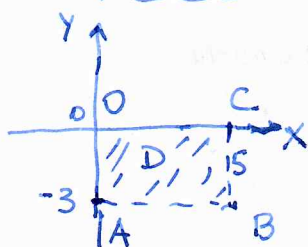
② Lista 7 Ex 2(a)

Pto's de Máx e Mín absolutos para a função

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6y$$

no domínio $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 0 \end{cases}$

Solução



$$\begin{aligned} D &= (0,0) \\ A &= (0,-3) \\ B &= (5,-3) \\ C &= (5,0) \end{aligned}$$

Pto's no interior de D :

$$f_x = 2x + y = 0$$

$$f_y = x + 2y - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$f(-2,4) = 4 - 8 + 16 - 24$$

$$\boxed{f(-2,4) = -12}$$

Pto's na fronteira de D

i) No segmento $OA: \begin{cases} x = 0 \\ -3 \leq y \leq 0 \end{cases}$

$$g_1(y) = f(0, y) = y^2 - 6y$$

$$g_1'(y) = 0 \Rightarrow 2y - 6 = 0 \\ \Rightarrow \underline{y = 3}$$

Não está no segmento OA
($-3 \leq y \leq 0$)

Pts: $(0, 0)$ $(0, -3)$ # na fronteira de OA.

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, -3) = 9 - 6(-3) = 9 + 18 = 27$$

$$\underline{f(0, 0) = 0}, \quad \underline{f(0, -3) = 27}$$

ii) No segmento OC: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ y = 0 \end{cases}$

$$g_2(x) = x^2$$

$$g_2'(x) = 2x \quad 2x = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$$

$$\begin{array}{l} \text{Pts} \\ (0, 0) \quad f(0, 0) = 0 \\ (5, 0) \quad \underline{f(5, 0) = 25} \end{array}$$

iii) No segmento CB: $\begin{cases} x = 5 \\ -3 \leq y \leq 0 \end{cases}$

$$f(5, y) = 25 + 5y + y^2 - 6y = y^2 - y + 25 = g_3(y)$$

$$g_3' = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \notin [-3, 0]$$

Nos extremos do segmento CB: $(5, 0)$, $(5, -3)$:

$$f(5, 0) = 25, \quad f(5, -3) = 25 - 3 \cdot 5 + 9 - 6(-3) \\ = 27$$

iv) No segmento AB: $\begin{cases} y = -3 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$

$$g_4(x) = f(x, -3) = x^2 - 3x + 9 + 18 = x^2 - 3x + 27$$

$$g'_4 = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3/2}$$

Temos o pto $(3/2, -3)$

$$f(3/2, -3) = (3/2)^2 - 3 \cdot 3/2 + (-3)^2 - 6(-3)$$

$$= 9/4 - 9/2 + 9 + 18 = -\frac{9}{4} + 27 = \frac{99}{4}$$

$$f(3/2, -3) = \frac{99}{4} \approx 24,6$$

Nos extremos: $(0, -3)$, $(5, -3)$

~~$f(-2, 4) = 27$~~ , $f(5, -3) = 27$

 $f(0, -3) = 9 + 18 = 27$

Máx Abs: $(0, -3)$, $(5, -3)$

Mín Abs: $(-2, 4)$

③ Lista 7 Ex. 11c)

Encontrar máx, mín e pto de sela para

$$f(x, y) = -2x^3 + 6x^2 + 3y^2 + 6xy.$$

Solução

$$f_x = 0 \Rightarrow -6x^2 + 12x + 6y = 0$$

$$\Rightarrow \underline{-x^2 + 2x + y = 0}$$

$$f_y = 0 \Rightarrow 6y + 6x = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y = -x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x \\ -x^2 + 2x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{-x^2 + 2x - x = 0}$$

$$\Rightarrow -x^2 + x = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x = 0} \text{ ou } \underline{x = 1}$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$(0,0)$$

$$x=1 \Rightarrow y=-1$$

$$(1,-1)$$

$$f_{xx} = -12x + 12$$

$$f_{yy} = 6$$

$$f_{xy} = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{xx} = -12x + 12 \\ f_{yy} = 6 \\ f_{xy} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow J = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$
$$= 12(1-x) \cdot 6 - 36$$
$$= 72 - 72x - 36$$

$$\Rightarrow J = -72x + 36$$

$$f_{xx}(0,0) = 12 > 0$$

$$J(0,0) = 36 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{xx}(0,0) = 12 > 0 \\ J(0,0) = 36 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0) \text{ é pto de mínimo}$$

$$f_{xx}(1,-1) = 0$$

$$J(1,-1) = -36 < 0$$

$$\Rightarrow (1,-1) \text{ pto de sela}$$

