C2 Exercícios Resolvidos

(1) Seja π o plano dado pela eq. $\pi: ax+by+cz=d$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ são constantes e o vetor (a,b,c) é não nulo. Seja $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in \mathbb{R}^3$ um pto qq. fixo. Determine o pto $P\in\pi$ à distância mínima de P_0 e o valor dessa distância mínima.

Solução

Queremos minimizar $f(x,y,z) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$
(quadrado da distância)

restrita à condição $g(x,y,z) = ax+by+cz-d=0$

Temos:

$$\nabla f = 2(x-x_0)\vec{i} + 2(y-y_0)\vec{j} + 2(z-z_0)\vec{k}$$

$$\nabla g = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2(x-x_0) = \lambda a \\ 2(y-y_0) = \lambda b \\ 2(z-z_0) = \lambda c \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{\lambda}{2}a \\ y = y_0 + \frac{\lambda}{2} b \\ z = z_0 + \frac{\lambda}{2} c \end{cases} \quad (**)$$

substituindo em $g(x,y,z)=0$, obtemos:

$$a\left(x_0+\frac{\lambda}{2}a\right) + b\left(y_0+\frac{\lambda}{2}b\right) + c\left(z_0+\frac{\lambda}{2}c\right) = d$$

$$\frac{\lambda}{2}(a^2+b^2+c^2) + ax_0+by_0+cz_0-d = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{d-ax_0-by_0-cz_0}{a^2+b^2+c^2}$$

Substituindo este valor em (∗ ∗) encontramos o ponto procurado

$$P = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \frac{d - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c)$$

A distância mínima é

$$d(P_1 P_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(2) Uma sonda espacial no formato de um elipsóide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ penetra na atmosfera da Terra e sua superfície começa a se aquecer. Depois de uma hora, a temperatura no pto (x, y, z) sobre a superf. da sonda é $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$. Encontre o pto mais quente sobre a superf. da sonda (Nesse momento)

Solução

Queremos determinar um máximo para $T(x, y, z)$ restrito à condição $g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$.

Temos:

$$\nabla T = 16x\vec{i} + 4z\vec{j} + (4y - 16)\vec{k}$$

$$\nabla g = 8x\vec{i} + 2y\vec{j} + 8z\vec{k}$$

$$\nabla T = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 16x = 8\lambda x & \longrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } \lambda = 2 \\ 4z = 2\lambda y & \longrightarrow \quad 2z = \lambda y \\ 4y - 16 = 8\lambda z & \longrightarrow \quad y - 4 = 2\lambda z \end{cases}$$

$$2z = \lambda y \Rightarrow (y=0 \Leftrightarrow z=0)$$

para $x=0$ temos:

$$2z = \lambda y \Rightarrow \lambda = \frac{2z}{y} \qquad (y \neq 0)$$

$$y - 4 = 2 \cdot \frac{2z}{y} \cdot z = \frac{4z^2}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 - 4y = 4z^2}$$

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \underset{\left(\substack{x=0 \\ 4z^2 = y^2 - 4y}\right)}{\Longrightarrow} y^2 + y^2 - 4y = 16$$

$$2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$\boxed{y^2 - 2y - 8 = 0}$$

$$y^2 - 2y - 8 = (y+2)(y-4) = 0$$

$$\therefore \; y = -2 \text{ ou } y = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 16 + 4z^2 = 16, \quad 4z^2 = 0 \quad \therefore \cancel{z=0} \; \lightning$$

$$(\; z = 0 \Rightarrow y = 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + 4z^2 = 16 \Rightarrow 1 + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow z^2 = 3 \qquad \therefore \boxed{z = \pm\sqrt{3}}$$

Temos os ptos $(0,-2,\sqrt{3})$ e $(0,-2,\sqrt{3})$

$$T(0,-2,\sqrt{3}) = -8\sqrt{3} - 16\sqrt{3} + 600 = 600 - 24\sqrt{3}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$2z = \lambda y \Rightarrow 2z = 4y \Rightarrow \boxed{z = 2y}$$

$$y - 4 = 2\lambda z \Rightarrow y - 4 = 4z = 8y$$

$$7y = -4 \Rightarrow \boxed{y = -4/7}$$

$$z = 2y = -8/7 \qquad \boxed{z = -8/7}$$

$$4x^2 + \left(-\frac{4}{7}\right)^2 + 4\left(-\frac{8}{7}\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{372}{7^2} = 16$$

$$\Rightarrow 4x^2 = \frac{412}{49} \qquad x^2 = \frac{103}{49}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pm\sqrt{103}}{7}}$$

Temos os ptos

$$\left(\frac{\sqrt{103}}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{103}}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}\right)$$

$$T\left(\frac{\sqrt{103}}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}\right) = T\left(-\frac{\sqrt{103}}{7}, -4/7, -8/7\right)$$

$$= 8 \cdot \frac{103}{49} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{49} + 16 \cdot \frac{8}{7} + 600$$

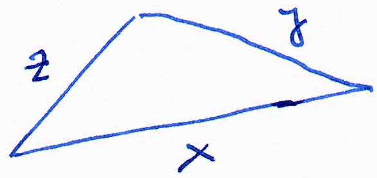
$$= \frac{1208}{49} + 600 \ \ldots \ \text{etc}$$

Nestes ptos a temperatura é máx.

(3) Mostre que o triângulo de perímetro constante p e área máxima é equilátero.

<u>Solução</u>

Sejam x, y, z os lados (os comprimentos dos lados) do Δ.



$$p = x + y + z = cte.$$

Lembre que a área do Δ é dada por (Fórmula de Heron)

$$A = \sqrt{s(s-x)\,s(-y)\,s(-z)}$$

onde $s = p/2$.

Vamos maximizar o quadrado da área

$$A^2 = f(x,y,z) = s(s-x)(s-y)(s-z)$$

A restrição é que o Δ tenha perímetro p, ou seja

$$g(x,y,z) = x + y + z - p = 0.$$

$$\nabla f = \left(-s(s-y)(s-z)\right)\vec{i} + \left(-s(s-x)(s-z)\right)\vec{j} + \left(-s(s-x)(s-y)\right)\vec{k}$$

(Lembre, $s = \frac{1}{2}p = cte$)

$$\nabla g = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} -s(s-y)(s-z) = \lambda \\ -s(s-x)(s-z) = \lambda \\ -s(s-x)(s-y) = \lambda \end{cases}$$

Daí $s(s-y)(s-z) = s(s-x)(s-z) = s(s-x)(s-y)$

$s \neq 0$, logo $(s-y)(s-z) = (s-x)(s-z) = (s-x)(s-y) \ldots (*)$

Observe que $s-x \neq 0$, $s-y \neq 0$ e $s-z \neq 0$

De fato, se $s-x=0$, então $\frac{1}{2}(-x+y+z)=0$ e

logo $x = y+z$ o que é impossível já que x, y e z são as medidas dos lados de um triângulo.

(Analogamente $s-y \neq 0$ e $s-z \neq 0$)

$\therefore$ de $(*)$ obtemos

$$s-y = s-x \quad , \quad s-y = s-z$$

ou seja, $\underline{\underline{x = y = z}}$ $\therefore$ o Δ de maior área com perímetro fixo é equilátero