

- ① Determinar 3 números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

Solução

Queremos minimizar a função $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeita à condição $xyz = 100$. ($g(x, y, z) = xyz - 100 = 0$)

$$\nabla f = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla g = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} \lambda yz = 1 \\ \lambda xz = 1 \\ \lambda xy = 1 \end{cases}$$

$$xyz = 100 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\lambda yz = 1 \Rightarrow \lambda \neq 0$$

$$\lambda yz = \lambda xz = \lambda xy \xRightarrow{\lambda \neq 0} yz = xz, yz = xy, xz = xy$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y = x, & z = x, & z = y \\ (z \neq 0) & (y \neq 0) & (x \neq 0) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = y = z}}$$

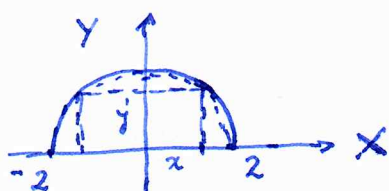
$$\left. \begin{matrix} xyz = 100 \\ x = y = z \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^3 = 100 \quad \therefore x = \sqrt[3]{100}$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{100}, \quad y = \sqrt[3]{100}, \quad z = \sqrt[3]{100}$$

etc.

- ② Determinar as dimensões de um retângulo de área máxima inscrito numa semi-circunferência de raio 2.

solução



área do retângulo: $x y$ max
condição $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{cases} f(x, y) = xy \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$$

$$\nabla f = \vec{i} + \vec{j}, \quad \nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2\lambda x &= 2\lambda y \\ \Rightarrow \lambda &= 0 \text{ ou } x = y \end{aligned}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda x = 0 \neq 1 \quad \therefore \underline{\lambda \neq 0}$$

$$\text{Daí } x = y \text{ e como } x^2 + y^2 = 4$$

$$\text{temos } 2x^2 = 4, \quad x^2 = 2 \quad \therefore \underline{x = \sqrt{2}} \quad (x > 0)$$

$$\text{Assim } \underline{x = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{2}}$$

3
③ Classificar os pto's críticos da função

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Solução:

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad f_x = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$$

$$f_y = 6xy - 12, \quad f_y = 0 \Rightarrow xy = 2$$

$xy = 2 \Rightarrow x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$, logo podemos escrever $y = 2/x$.

Daí $x^2 + (2/x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$

$$\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \text{ ou } x = \pm 1$$

Temos os pto's críticos

$$(1,2), (-1,-2), (2,1) \text{ e } (-2,-1)$$

$$\left(\begin{array}{l} x=2 \\ xy=2 \end{array} \right\} \Rightarrow y=1 \text{ etc}$$

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{yy} = 6x$$

$$f_{xy} = 6y$$

$$H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 36x^2 - 36y^2$$

$$f_{xx}(1,2) = 6 > 0 \quad H(1,2) = 36 - 36 \cdot 4 < 0$$

(1,2) é pto de sela

$$f_{xx}(-1,-2) = -6 < 0, \quad H(-1,-2) = 36 - 36 \cdot 4 < 0$$

(-1,-2) pto de sela

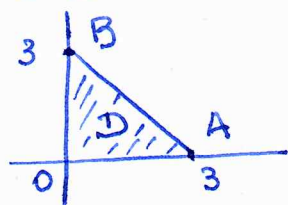
$$f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \quad H(2,1) = 36 \cdot 2 - 36 \cdot 1 > 0$$

(2,1) pto de mínimo

... etc //

- ④ Determinar os valores máximo e mínimo da função
 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$
no triângulo de vértices $(0,0)$, $(3,0)$ e $(0,3)$

Solução



Inicialmente procuramos pts críticos de f no interior de D

$$f_x = 2x - 2, \quad f_x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_y = 2y - 2, \quad f_y = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\boxed{f(1,1) = -2}$$

Na fronteira de D :

(i) No segmento OA : $\begin{cases} y = 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$$y = 0 \Rightarrow g(x) = f(x,0) = x^2 - 2x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \quad \therefore \underline{x = 1}$$

$$\boxed{f(1,0) = -1}$$

Na fronteira de OA $(0,0)$ e $(3,0)$

$$\underline{f(0,0) = 0, \quad f(3,0) = 3}$$

ii) No segmento OB : $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

$$x = 0 \Rightarrow h(y) = f(0,y) = y^2 - 2y$$

$$h'(y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\boxed{f(0,1) = -1}$$

Na fronteira de OB $(0,0)$ e $(0,3)$

$$\underline{f(0,0) = 0, \quad f(0,3) = 3}$$

iii) No segmento AB: $\begin{cases} y = -x + 3 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$$k(x) = f(x, -x+3) = x^2 + (-x+3)^2 - 2x - 2(-x+3) \\ = 2x^2 - 6x + 3$$

$$k'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 6 = 0 \quad \therefore x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{4}$$

Na fronteira de AB: (3,0) e (0,3) (já analisados)

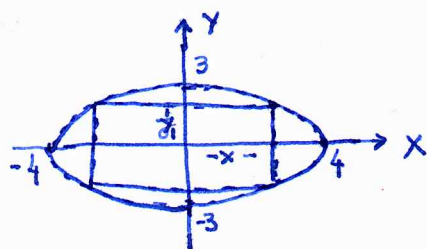
Ptos de máx (3,0) e (0,3). Valor máx 3.
 = = mín $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Valor mín. $-\frac{15}{4}$

//

⑤ Determinar as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

com lados paralelos aos eixos coord.

Solução:



dimensões do retângulo $2x, 2y, x > 0, y > 0$

área: $A = 4xy$ (máx)

$$\text{Condição } g(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

$$\nabla A = 4y \vec{i} + 4x \vec{j}$$

$$\nabla g = \frac{1}{8}x \vec{i} + \frac{2}{9}y \vec{j}$$

$$\nabla A = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 4y = \frac{\lambda}{8}x \\ 4x = \frac{2\lambda}{9}y \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{18}\lambda y$$

$$4y = \frac{\lambda}{8} \cdot \frac{1}{18}\lambda y \Rightarrow y = \frac{\lambda^2}{576} y$$

$$7\left(1 - \frac{\lambda^2}{576}\right) = 0 \Rightarrow \cancel{7=0} \text{ ou } \underline{\lambda^2 = 576}$$

$$\lambda^2 = 576 \Rightarrow \underline{\lambda = \pm 24}$$

$$7=0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} = 1 \quad \therefore \underline{x = \pm 4}$$

$(4,0), (-4,0)$ com ~~7=0~~ $y=0$ não temos retângulo!!

$$\underline{\lambda = 24}$$

$$4y = \frac{24}{8}x = 3x \rightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$$4x = \frac{48}{9}y \rightarrow \underline{x = \frac{4}{3}y}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{4}{3}y \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\left(\frac{4}{3}y\right)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \therefore y^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}}, \quad x = \frac{\pm 4}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$$

Mas $x > 0$ e $y > 0 \quad \therefore \underline{x = \frac{4}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}}}$

para $\lambda = -24$ obtém-se o mesmo pto.