



Cálculo II - Prova 2 - 20/03/2023

Prof.: Pedro A. Hinojosa

Nome: _____ Matrícula: _____

1 (2,5 pts.) Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva interseção das superfícies $S_1 : x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 11$, no ponto $P = (1, 1, 3)$.

2 (2,5 pts.) A derivada de $f(x, y, z)$ em um ponto P é maior na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Nessa direção, o valor da derivada, no ponto P , é 6. Calcule $\nabla f(P)$ e a derivada de f na direção do vetor $\vec{w} = \vec{i} - 3\vec{j}$, no ponto P .

3 (2,5 pts.) Determine o plano tangente e a reta normal à superfície $S : \cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$ no ponto $P = (0, 1, 2)$.

4 (2,5 pts.) Verifique se a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} & x \neq \pm y \\ \frac{1}{4}(x + y) & x = \pm y \end{cases}$ é contínua no ponto $P = (1, 1)$.

Boa Prova !!

① Eq da reta t_g à curva interseção das superf.

$$S_1: x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0 \quad e$$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 = 11$$

no pto $P = (1, 1, 3)$

Solução:

Seja $C = S_1 \cap S_2$ a curva interseção e sejam

$$f_1(x, y, z) = x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2$$

$$(S_1: f_1^{-1}(0))$$

$$e \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (S_2: f_2^{-1}(11))$$

$$C \subseteq S_1 \Rightarrow C \perp \nabla f_1(P)$$

$$C \subseteq S_2 \Rightarrow C \perp \nabla f_2(P)$$

$\therefore$ Em P , C é t_g a $\nabla f_1(P) \times \nabla f_2(P)$.

$$\nabla f_1 = (3x^2 + 6xy^2 + 4y)\vec{i} + (6x^2y + 3y^2 + 4x)\vec{j} - 2z\vec{k}$$

$$\nabla f_1(P) = 13\vec{i} + 13\vec{j} + (-6)\vec{k}$$

$$\left\{ \nabla f_1(P) = (13, 13, -6) \right\}$$

$$\nabla f_2 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\left\{ \nabla f_2(P) = (2, 2, 6) \right\}$$

$$\nabla f_1(P) \times \nabla f_2(P) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & 13 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (90, -90, 0)$$

∴ Eq da reta t_g

$$r: \begin{cases} x = 1 + 90t \\ y = 1 - 90t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ou Equivalentemente,

$$r: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 3 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

② $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
 $D_{\vec{v}}f(P)$ máxima, $D_{\vec{v}}f(P) = 6$

calcular $\nabla f(P)$ e $D_{\vec{w}}f(P)$ com $\vec{w} = \vec{i} - 3\vec{j}$

Solução

$D_{\vec{v}}f(P)$ é máxima na direção de $\nabla f(P)$

$$\therefore \vec{v} = \lambda \nabla f(P), \quad (\lambda > 0)$$

$$D_{\lambda \nabla f}f(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{\lambda \nabla f(P)}{\|\lambda \nabla f(P)\|}$$

$$= \frac{\|\nabla f(P)\|^2}{\|\nabla f(P)\|} = \|\nabla f(P)\|$$

$$D_{\vec{v}}f(P) = 6 \Rightarrow \|\nabla f(P)\| = 6$$

$$\|\vec{v}\| = \lambda \|\nabla f(P)\| = \lambda \cdot 6$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore 6\lambda = 3 \quad \left(\lambda = \frac{1}{2} \right)$$

Dai,

$$\frac{1}{2} \nabla f(P) = \vec{v} \Rightarrow \nabla f(P) = 2\vec{v}$$

$$\Rightarrow \nabla f(P) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{w}} f(P) &= \nabla f(P) \cdot \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}, \quad \vec{w} = \vec{i} - 3\vec{j} \\ &= (4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (\vec{i} - 3\vec{j}) \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{10} \\ &= \frac{4 - 6}{\sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\left(D_{\vec{w}} f(P) = -\frac{2}{\sqrt{10}} \right)$$

③ Plano Tg e reta normal à superf.

$$S: \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$$

no pto $P = (0, 1, 2)$

Solução

Se $f(x, y, z) = \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz$, então

$\nabla f(P)$ é normal a S em P .

Assim,

$$\nabla f = (-\pi \sin(\pi x) - 2xy + ze^{xz})\vec{i} + (-x^2 + z)\vec{j} + (xe^{xz} + y)\vec{k}$$

$$\nabla f(P) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

Dai :

Plano Tg a S em P : $2x + 2y + z = 0 + 2 + 2 = 4$

$$\underbrace{2x + 2y + z = 4}$$

Reta normal a S em P :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} & \text{se } x \neq \pm y \\ \frac{1}{4}(x+y) & \text{se } x = \pm y \end{cases}$$

é contínua no pto $P = (1, 1)$

Solução :

$$f(1, 1) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} f(x, y) = ?$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (1, 1) \\ y=x}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} = f(1, 1)$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (1, 1) \\ y \neq x}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (1, 1) \\ y \neq x}} \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$$

$$= \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (1, 1) \\ y \neq x}} \frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)} \quad \left(\begin{array}{c} y \neq x \\ \Downarrow \\ x-y \neq 0 \end{array} \right)$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = f(1, 1)$$

Assim :

i) $(1,1) \in D(f)$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y)$ existe

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = f(1,1) = \frac{1}{2}$

