LISTA DE EX. Nº 2 — INT. À ÁLG. LINEAR

2013.2 Prof.: Pedro A. Hinojosa

1) $B = \{(2,1),(-1,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Mostre que B é base de $\mathbb{R}^2$ e calcule $[(5,-2)]_B$

<u>Solução</u>:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4+1 = 5 \neq 0,$$ logo B é L.I.

e como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, temos que B é base de $\mathbb{R}^2$.

$$[(5,-2)]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (5,-2) = a(2,1) + b(-1,2)$$

$$\begin{cases} 2a - b = 5 \\ a + 2b = -2 \end{cases}$$

$$a = 8/5, \quad b = -9/5$$

$$[(5,-2)]_B = \begin{bmatrix} 8/5 \\ -9/5 \end{bmatrix}$$

2 $u = (a,b)$, $v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} ac + bd = 0 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Mostre que $B = \{u, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

Solução

Basta mostrar que B é L.I. Mas, se B não é L.I., ou seja, se B é L.D então existe um nº real $\alpha \neq 0$ t.q.

$$u = \alpha \cdot v \qquad (\alpha \neq 0 \text{ já que } u \neq 0 \text{ e } v \neq 0)$$

Daí, $a = \alpha \cdot c$ e $b = \alpha d$

e como $ac + bd = 0$, temos

$$(\alpha c) \cdot c + (\alpha d) \cdot d = 0, \text{ donde}$$

$$\alpha \cdot (c^2 + d^2) = 0$$

como $c^2 + d^2 = 1$, temos $\underline{\alpha = 0}$

contradição!

$\therefore$ B é L.I. ... e logo base de $\mathbb{R}^2$

3 B_1, B_2 duas bases de $\mathbb{R}^2$.

$B_2 = \{(1,3), (2,-4)\}$.

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Determine B_1.

Solução

Seja $B_1 = \{u, v\}$, onde $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$.

Então

$$(1,3) = -7u - 11v = -7(a,b) - 11(c,d)$$

e $$(2,-4) = 6u + 8v = 6(a,b) + 8(c,d)$$

Daí,

$$\begin{aligned} -7a - 11c &= 1 \\ -7b - 11d &= 3 \\ 6a + 8c &= 2 \\ 6b + 8d &= -4 \end{aligned}$$

Donde encontramos dois sist. de eq.

$$\begin{cases} -7a - 11c = 1 \\ 6a + 8c = 2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -7b - 11d = 3 \\ 6b + 8d = -4 \end{cases}$$

$\therefore$ $\begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \end{cases}$ e $b = -2$, $d = 1$

$$\therefore \quad B_1 = \{(3,-2),(-2,1)\}$$

---

4 $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ t.q.

$$(*) \begin{cases} w_1 = v_1 + v_2 \\ w_2 = 2v_1 + v_2 + v_3 \\ w_3 = v_1 + 2v_2 + v_3 \end{cases}$$

Determine as matrizes $[I]_{B_1}^{B_2}$ e $[I]_{B_2}^{B_1}$

<u>Solução:</u>

De $(*)$ temos diretamente que

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

Calculemos $\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\therefore \left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5 $P_3(\mathbb{R}) = \{$ polinômios de grau ≤ 3 com coef. reais $\}$

$B = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$.

Mostre que B é uma base para $P_3(\mathbb{R})$.

Calcule $[3-2x+x^2]_B$

<u>Solução:</u>

Como $\dim P_3(\mathbb{R}) = 4$, basta mostrar que B é L.I.

Se $a + b(1-x) + c(1-x)^2 + d(1-x)^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

então,

Para $x = 1$ obtemos $\boxed{a = 0}$

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 & \Rightarrow & b+c+d=0 \\ x=-1 & \Rightarrow & 2b+4c+8d=0 \\ x=2 & \Rightarrow & -b+c-d=0 \end{array}\right\} (*)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4+2-8-(-4+8-2) = -12 \neq 0$

o sist. $(*)$ tem uma única solução, $b=0$, $c=0$ e $d=0$. Logo B é L.I. e portanto uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

$$3-2x+x^2 = a+b(1-x)+c(1-x)^2+d(1-x)^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$x=1 \Rightarrow a = 3-2+1 = 2$, $\boxed{a=2}$

$x=0 \Rightarrow 2+b+c+d=3$

$x=2 \Rightarrow 2-b+c-d=3$

$x=-1 \Rightarrow 2+2b+4c+8d=6$

$$\begin{array}{ll} (1) & b+c+d=1 \\ (2) & -b+c-d=1 \\ (3) & 2b+4c+8d=4 \end{array}$$

Das eqs (1) e (2) obtemos $\boxed{c=1}$ e substituindo nas eqs (2) e (3) obtemos $b=0$ e $d=0$. Logo

$$3-2x+x^2 = 2+0(1-x)+1\cdot(1-x)^2+0(1-x)^3$$

Daí

$$[3-2x+x^2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

6 $$W = \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] \subseteq M(2)$$

Encontre uma base e a dimensão de W.

<u>Solução</u>:

Temos que encontrar o maior conj L.I contido no conj. das 4 matrizes que geram o subespaço W.

Note que: $$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos "jogar fora" a matriz $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

É claro então que

$$W = \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

E como estas 3 matrizes são L.I ... (PROVE)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$ é base de W

e logo $\dim W = 3$.

---

7 $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(a) Mostre que W é subesp. de $\mathbb{R}^3$.

Solução

(i) $W \neq 0$ ... claro!. $(0,0,0) \in W$ já que $0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 + 2z_1 = 0 \\ x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

Daí $(x_1 - y_1 + 2z_1) + (x_2 - y_2 + 2z_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$

$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$

(iii) $(x, y, z) \in W \Rightarrow x - y + 2z = 0$

$\Rightarrow \alpha(x - y + 2z) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha x) - (\alpha y) + 2(\alpha z) = 0$

$\Rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha(x, y, z) \in W$

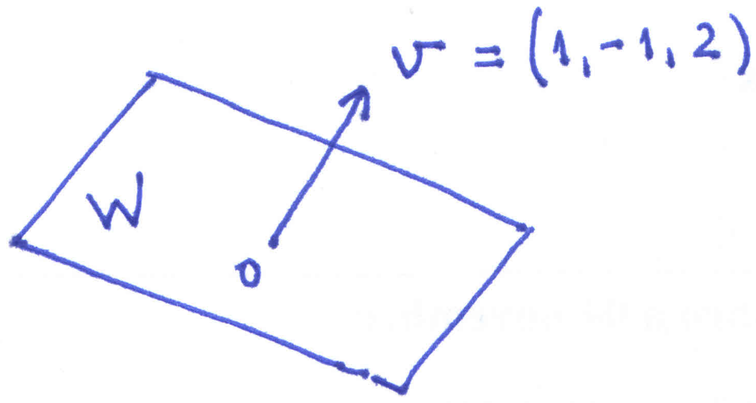
Logo W é subespaço de $\mathbb{R}^3$

(b) Encontre um subespaço V de $\mathbb{R}^3$ tal que $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

<u>Solução</u>:

Notou que W é um plano passando pela origem? .... aprendeu isso o semestre passado.

Mais ainda o vetor $v=(1,-1,2)$ é perpendicular a W... (isso também é do semestre passado)



Se $V = [(1,-1,2)]$, então é <u>CLARO</u> que $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ ... explique!

É claro também que tomando V como sendo q.q. "reta" passando pela origem e <u>não</u> contida em W, então teremos $V \oplus W = \mathbb{R}^3$?

8 $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z=t\}$

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z+t=0\}$.

V e W são subespaços de $\mathbb{R}^4$ .... (certo?)

Determine $V \cap W$ e $V+W$ e encontre bases para estes subespaços.

<u>Solução</u>:

$$(x,y,z,t) \in V \Rightarrow (x,y,z,t) = (x,-x,z,z)$$
$$= x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,1)$$

Logo $V = [(1,-1,0,0),(0,0,1,1)]$

De fato $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é base de V.

Analogamente vemos que

$\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ é uma base para W

Daí, $V+W = [(1,-1,0,0),\underline{\underline{(0,0,1,1)}},(1,0,0,-1),(0,1,0,1),\underline{\underline{(0,0,1,1)}}]$

$$V+W = [(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,-1),(0,1,0,1)]$$

Note que estes 4 vetores são L.I. ... (PROVE)

logo formam uma base de $V+W$ e portanto

$$\underline{V + W = \mathbb{R}^4} \quad \ldots \quad (\text{certo?})$$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ e... etc

entendeu?

Depois de termos encontrado as bases anteriores para V e W vemos (claramente) que

$(0,0,1,1) \in V \cap W$ e

$(1,-1,0,0) \in V$, mas $(1,-1,0,0) \notin W$

(note que $1-(-1)-0+0 \neq 0$)

Logo $V \cap W = [(0,0,1,1)]$

$\therefore$ $\underline{\dim V \cap W = 1}$.

Note que a soma $V+W$ <u>não</u> é direta

já que $V+W \neq \{0\}$