LISTA DE EX. Nº 1 : INT. À ÁLG. LINEAR $\boxed{2013.2}$

Pedro A. Hinojosa

1. $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tais que:
nenhum deles é multiplo de outro, nenhuma coord. é zero
e $[u, v, w] \neq \mathbb{R}^3$

Solução

$u = (1,1,1)$, $v = (2,1,1)$ e $w = u+v = (3,2,2)$

$$\left.\begin{array}{l} u \neq \alpha v \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ u \neq \beta w \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\ v \neq \gamma w \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

Nenhum é múltiplo de outro e ~~nenhu~~ nenhuma coord. é zero.

$\{u, v, w\}$ não é L.I $(w = u+v)$, logo

$[u, v, w] \neq \mathbb{R}^3$ (Temos que ter pelo menos três vetores L.I para gerar $\mathbb{R}^3$)

2. $F = [(1,1,1), (1,-1,2)]$.

Encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $w = (x,y,z) \in F \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$

Solução

Note que $u = (1,1,1)$ e $v = (1,-1,2)$ são L.I. Logo F é um "plano" em $\mathbb{R}^3$ (passando pela origem)

Um vetor $\perp$ a esse plano é dado por $u \times v$.

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (3, -1, -2)$$

Portanto, $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow 3x - y - 2z = 0$

Logo $a = 3$, $b = -1$ e $c = -2$ são os números procurados.

3 $\mathbb{E}$ esp. vet. $X \subseteq \mathbb{E}$. Prove que: $[X] = \bigcap_{\substack{S \text{ subesp de } \mathbb{E} \\ \text{que contém } X}} S$.

<u>Solução</u>:

Se $S \subseteq \mathbb{E}$ é um subespaço que contém X, então $X \subseteq S$ e logo $[X] \subseteq [S] = S$. Assim, $[X] \subseteq S$ qualquer que seja S subespaço de $\mathbb{E}$ que contém X.

Daí,

$$[X] \subseteq \bigcap_{\substack{S \text{ subesp de } \mathbb{E} \\ \text{que contém } X}} S \qquad (*)$$

Por outro lado, se um vetor $v \in \bigcap_{\substack{S \text{ subesp. de } \mathbb{E} \\ \text{que contém } X}} S$, então v pertence a todo subesp. de $\mathbb{E}$ que contém X, em particular $v \in [X]$ já que $[X]$ é um subesp. de $\mathbb{E}$ que contém o conj X. Logo,

$$\bigcap_{\substack{S \text{ subesp de } \mathbb{E} \\ \text{que contém } X}} S \subseteq [X] \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ temos $[X] = \bigcap_{\substack{S \text{ subesp de } \mathbb{E} \\ \text{que contém } X}} S$.

4 Escreva, se possível, $D = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ como C.L. das matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Solução</u>:

$$D = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma & 2\alpha + 2\beta - 2\gamma \\ 3\alpha + 3\beta - 3\gamma & 4\alpha - 4\beta + 4\gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 4 \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma &= -4 \\ 3\alpha + 3\beta - 3\gamma &= -6 \\ 4\alpha - 4\beta + 4\gamma &= 16 \end{aligned}} \quad (*)$$

ou em termos de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Note que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & -3 & -6 \\ 4 & -4 & 4 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -12 \\ 0 & 6 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

logo o sist (*) é equivalente ao sistema $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - \gamma = -3 \end{cases}$

que tem infinitas soluções, por exemplo, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\gamma = 3$ é uma solução e podemos escrever

$$D = A + 3C$$

8 $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\}$

Encontrar uma base e a dimensão de $V + W$.

Solução:

$(x,y,z) \in V \Rightarrow x = 2y = z$

$\Rightarrow (x,y,z) = (x, x/2, x) = x(1, 1/2, 1)$

Logo $V = [(1, 1/2, 1)]$

$(x,y,z) \in W \Rightarrow (x,y,z) = (2y+z, y, z)$

$= y(2,1,0) + z(1,0,1)$

$\therefore W = [(2,1,0), (1,0,1)]$

É claro que $V + W = [(1, 1/2, 1), (2,1,0), (1,0,1)]$

e como os vetores $(1, 1/2, 1), (2,1,0)$ e $(1,0,1)$ são l.i,

já que $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - (1+1) = -1 \neq 0$,

$\{(1, 1/2, 1), (2,1,0), (1,0,1)\}$ é uma base para $V + W$

Assim $\dim(V+W) = 3$ e logo $V + W = \mathbb{R}^3$

9 Determine se os seguintes conj. são subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2\}$$

$$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$$

$$W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$$

Solução

W_1 NÃO é subesp. de $\mathbb{R}^3$.

Note, por exemplo, que $(1,0,1) \in W_1$ mas $2(1,0,1) \notin W_1$

W_2 NÃO é subesp. de $\mathbb{R}^3$.

$(1,0,0) \in W_2$, $(0,1,0) \in W_2$ mas $(1,0,0)+(0,1,0) \notin W_2$

W_3 é subesp. de $\mathbb{R}^3$. De fato,

(i) $W_3 \neq \emptyset$ já que $(0,0,0) \in W_3$

(ii) se (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) pertencem a W_3, então

$$3x_1 - y_1 + 2z_1 = 0 \quad e \quad 3x_2 - y_2 + 2z_2 = 0$$

Daí

$$3(x_1+x_2) - (y_1+y_2) + 2(z_1+z_2) = 0$$

e logo

$$(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) \in W_3$$

(iii) Analogamente, $(x,y,z) \in W_3 \Rightarrow 3x - y + 2z = 0$

$$\Rightarrow (3x - y + 2z)\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3(\alpha x) - (\alpha y) + 2(\alpha z) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in W_3$$

$$\Rightarrow \alpha(x,y,z) \in W_3$$