2ª Lista de Exercícios

Verifique se são lineares as funções definidas nos exercícios **01** $\to$ **18**.

01. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - y, 0)$.

02. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x - 1, y + z)$.

03. $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ T(x) = (x, 2x, -x)$.

04. $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T(x) = -x$.

05. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (y, x^3)$.

06. $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T(x) = sen\, x$.

07. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (|x|, 3y)$.

08. $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2},\ T(A) = XA$, sendo $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

09. $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2},\ T(A) = X + A$, X a matriz do exercício anterior.

10. $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2},\ T(A) = A^t$, onde A^t representa a transposta da matriz A.

11. $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2},\ T(A) = det(A)$, onde *det* significa *determinante*.

12. $T:\mathbb{R} \to M_{1\times 2},\ T(x) = \begin{bmatrix} x & ax \end{bmatrix}$, a um número real qualquer.

13. $T: M_{3\times 1} \to \mathbb{R}^2,\ T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (a + 2b, a - c)$.

14. $T: M_{2\times 2} \to \mathrm{P}_2(x),\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b)x^2 + cx + d$.

15. $T: M_{2\times 2} \to \mathbb{R},\ T(A) = tr(A)$, onde tr denota *traço* ou *soma dos elementos diagonais*.

16. $T:\mathrm{P}_1(x) \to \mathrm{P}_2(x),\ T(p(x)) = x\,p(x) + x$.

17. $T:\mathrm{P}_2(x) \to \mathbb{R},\ T(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$.

18. $T:\mathrm{P}_2(x) \to \mathrm{P}_3(x),\ T(p(x)) = p(x) + x^2 p'(x)$.

19. Se V é um espaço vetorial qualquer, verifique que a função $I:V \to V$ dada por $I(v) = v$ é linear (*A função I é chamada de Operador Identidade*).

20. Sejam U, V e W espaços vetoriais e $f:U \to V$ e $g:V \to W$ transformações lineares. Se $g \circ f:U \to W$ é a função definida por $(g \circ f)(u) = g(f(u)), \forall u \in U$, mostre que $g \circ f$ também é uma transformação linear.

21. Sejam U e V espaços vetoriais e $f: U \to V, g: U \to V$ funções lineares. Se $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base do espaço U e $f(u_i) = g(u_i), \forall i = 1, 2, \ldots, n$, conclua que $f(v) = g(v), \forall v \in U$.

22. Existe uma transformação linear $T: \mathbb{P}_1(x) \to \mathbb{P}_2(x)$ que satisfaça $T(x+1) = x^2 - 1$ e $T(x-1) = x^2 + x$?

23. Defina a função linear $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que possui o vetor $(1, 0)$ em seu núcleo e satisfaz $f(1, -1) = (1, 2, 0)$.

24. Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja a reta $y = 2x$.

25. Determine uma transformação linear $T: \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_2(x)$, tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

26. Encontre uma transformação linear cuja imagem seja gerada pelo vetor $(1, -2)$.

27. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. Quais dos vetores abaixo pertencem ao núcleo de T?

a) (1, 2) b) (-2, 4) c) (100, -200) d) (0, 0) e) (1, 5)

28. Para cada transformação identificada como linear dentre as que constam dos exercícios **01** $\to$ **18**, determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem.

29. Determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem da função $h: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, definida por $h(A) = MA$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

30. Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x\cos\theta + y\,sen\theta,\ y\cos\theta - x\,sen\theta)$.

a) Verifique que T é linear.
b) Encontre uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de T.

31. Determine o núcleo e a imagem do operador linear derivada $D: \mathbb{P}_n(x) \to \mathbb{P}_n(x)$, definido por $D(f) = f'(x)$.

32. Sejam $f, g: V \to V$ operadores lineares, tais que $dim\, N(f) = dim\, N(g) = 0$. Mostre que $dim\, N(f \circ g) = 0$.

33. Seja $T: \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_2(x)$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c)$.

a) $p(x) = -4x^2 + 2x - 2 \in N(T)$? **b)** $q(x) = x^2 + 2x + 1 \in \mathrm{Im}(T)$?
c) $r(x) = 2x + 1 \in \mathrm{Im}(T)$?
d) Determine uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de T.
e) T é injetora? T é sobrejetora?

34. Se $T: U \to V$ é uma transformação linear invertível, verifique que $T^{-1}: V \to U$ também é linear.

35. Determine o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo. Para as que forem isomorfismos, encontre a transformação inversa.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - 3y, 3x + y)$.
b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$.
c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2z, z)$
d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$.
e) $T: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$.
f) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(2, 3) = (-1, 0, 1)$, $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

g) $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $T(A) = MA - AM$, onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

36. Mostre que são isomorfos os seguintes espaços vetoriais:

a) $\mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y, z) \ / \ z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. **b)** $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{P}_2(x)$. **c)** $M_{2\times 2}$ e $\mathbb{R}^4$.

37. Seja $T: U \to V$ uma transformação linear. Mostre que:

a) $dim\,U < dim\,V \Rightarrow T$ não pode ser sobrejetora.

b) $dim\,U > dim\,V \Rightarrow T$ não pode ser injetora.

c) *se* $dim\,U = dim\,V$, *então* T *é injetora* $\Leftrightarrow$ T *é sobrejetora*.

d) T *é um isomorfismo* $\Rightarrow dim\,U = dim\,V$.

38. Se $T: U \to V$ é uma transformação linear, conclua que $dim\,\mathrm{Im}(T) \le dim\,U$.

39. Sejam $T: U \to V$ uma transformação linear injetora e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vetores L.I. em U. Verifique que $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ são vetores L.I. em V.

40. Sejam $T: U \to V$ um isomorfismo e $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de U. Verifique que o conjunto $\beta = T(\alpha) = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de V.

41. Considere, em $\mathbb{R}^3$, a base $\alpha = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -2, -1)\}$ e denote por β a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - y - z)$, determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

42. Sejam $\alpha = \{(0,1,1), (1,0,0), (1,0,1)\}$ e $\beta = \{(-1,0), (0,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Se T é a transformação linear que satisfaz

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

encontre uma base e dê a dimensão do núcleo e da imagem de T, decida se T é injetora e/ou sobrejetora e determine $T(x, y, z)$.

43. Sejam α a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e T o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ satisfazendo $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Existe uma base β do $\mathbb{R}^2$, tal que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

44. Sejam $\alpha = \{(-1,1,0), (0,1,1), (1,0,0)\}$ e $\beta = \{(1,2), (1,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é a função linear que satisfaz $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $[T(-1,1,0)]_{\beta}$, $T(-1,1,0)$ e $T(x, y, z)$.

45. Verifique que o operador linear sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$ é um isomorfismo e encontre uma matriz que represente seu inverso.

46. Classifique como *verdadeira* ou *falsa* cada uma das afirmações abaixo.

a) Se $T: \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_1(x)$ é a transformação linear definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a - c)x + b + c$, então $p(x) = x^2 + 2x + 1 \in N(T)$.

b) Se L é o operador linear sobre o $\mathbb{R}^2$ definido por $L(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$, então o vetor $u = (2, 3)$ não está na imagem de L.

c) Existem transformações lineares $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ que são sobrejetoras.

d) Se uma transformação linear $f: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^5$ satisfaz $dim \operatorname{Im}(f) = 2$, então um conjunto L.I. em seu núcleo conterá no máximo 3 vetores.

e) Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então A representa alguma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

47. Qual é a matriz da transformação $T: \mathbb{P}_1(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x)$ definida por $T(p(x)) = x\,p(x)$, em relação às bases $\alpha = \{x, 1\}$, de $\mathbb{P}_1(x)$, e $\beta = \{x^2, x-1, x+1\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$?

48. Suponha que uma transformação linear $T: \mathbb{P}_1(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x)$ tem uma representação matricial da forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, em relação às bases canônicas de $\mathbb{P}_1(x)$ e $\mathbb{P}_2(x)$. Qual é essa transformação?

49. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $I: V \rightarrow V$ o operador identidade. Qual é a matriz de I em relação a uma base qualquer de V? Se α e β são duas bases distintas de V, qual é a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$?

50. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}_1(x)$ as transformações lineares definidas, respectivamente, por $f(x, y) = (x, 2y, x - y)$ e $g(a, b, c) = (a + b)x + c$. Considerando-se as bases $\alpha = \{(-1, 0), (0, -1)\}$, $\beta = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\gamma = \{x - 1, x + 1\}$,

a) determine as matrizes $[f]_{\beta}^{\alpha}, [g]_{\gamma}^{\beta}$ e $[g \circ f]_{\gamma}^{\alpha}$,

b) defina a transformação $g \circ f$ e

c) decida se $g \circ f$ é um isomorfismo.

□□□□□□