Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 1 : Introdução à Álgebra Linear (2013.2)

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 *Em* $\mathbb{R}^3$ *encontre três vetores,* u, v *e* w *tais que: nenhum deles é múltiplo de outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e* $[u, v, w] \neq \mathbb{R}^3$.

2 *Seja* F *o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *gerado pelos vetores* $u = (1, 1, 1)$ *e* $v = (1, -1, 2)$. *Encontre números reais* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que:* $w = (x, y, z) \in F$ *se, e somente se,* $ax + by + cz = 0$.

3 *Sejam* $\mathbb{E}$ *um espaço vetorial e* $X \subseteq \mathbb{E}$ *um subconjunto de* $\mathbb{E}$. *Prove que o espaço gerado pelo conjunto* X *é a interseção de todos os subespaços de* $\mathbb{E}$ *que contém o conjunto* X.

4 *Escreva, se possível, a matriz* $D = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ *como combinação linera das matrizes:*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ *e* $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5 *Sejam* v_1, v_2 *e* v_3 *os vetores-linha e* w_1, w_2 *e* w_3 *os vetores-coluna da matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
Verifique as relações $v_3 = 2v_2 - v_1$, $w_3 = 2w_2 - w_1$. *Escreva* w_1 *e* w_2 *como combinações lineares de* v_1 *e* v_2 *e vice-versa. Conclua que os vetores-linha e os vetores-coluna da matriz dada geram o mesmo subespaço de* $\mathbb{R}^3$.

6 *Encontre uma matriz real* 3×3 *cujos vetores-linha geram um subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *diferente daquele gerado pelos vetores-coluna.*

7 *Seja* $\mathbb{E}$ *um espaço vetorial real e sejam* W_1 *e* W_2 *subespaços vetoriais de* $\mathbb{E}$. *Mostre que* $W_1 \cap W_2$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{E}$.
Prove que a interseção de uma família $\{W_i\}_{i \in I}$ *de subespaços de* $\mathbb{E}$ *é um subespaço de* $\mathbb{E}$.

8 *Sejam* $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$ *e* $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\}$. *Encontre uma base e a dimensão do espaço* $V + W$.

9 *Determine se os seguintes conjuntos são subespaços de* $\mathbb{R}^3$.

$$(a)\ W_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2\}, \qquad (b)\ W_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$$

$$(c)\ W_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}.$$