2. Mudança de Coordenadas

Seja $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região elementar. Uma transformação do plano é uma aplicação

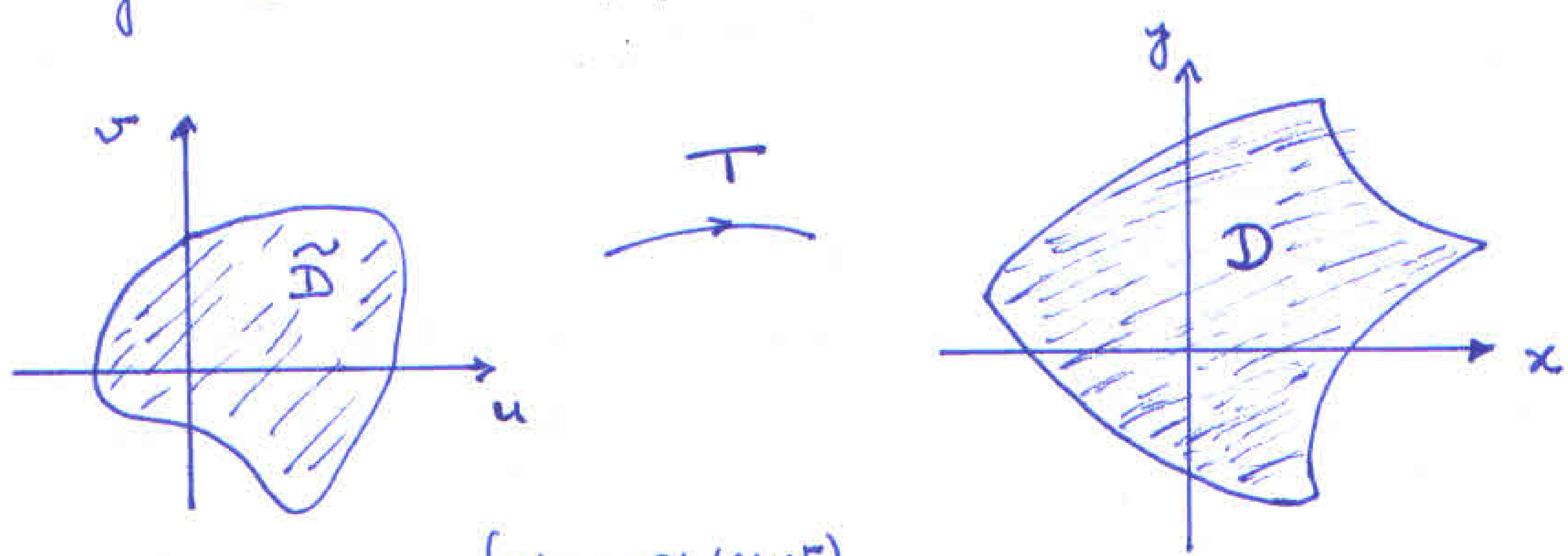
$$T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto T(u,v)$$

onde $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ e

$$x, y : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

são funções contínuas com derivadas parciais contínuas no retângulo aberto $\mathcal{R}$ t.q. $\tilde{D} \subset \mathcal{R}$.

Seja $D := T(\tilde{D})$.



$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

2.1 Exemplo:

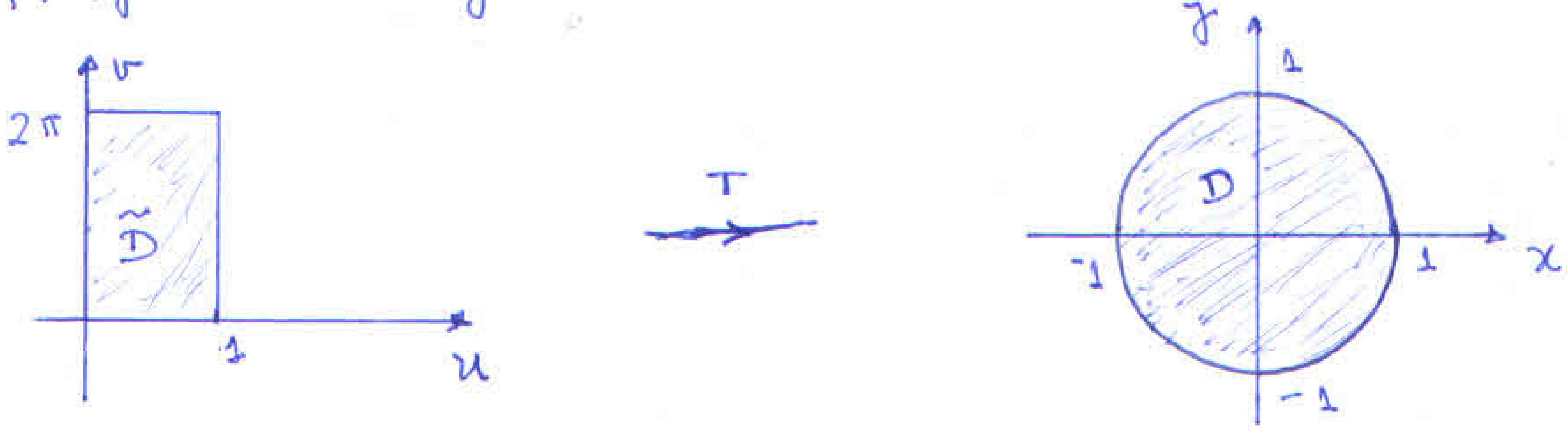
Seja $T : [0,1] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \qquad \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

A imagem de $\tilde{D} = [0,1] \times [0,2\pi]$ por T é o círculo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Assim, T transforma o retângulo $[0,1]\times[0,2\pi]$ no círculo $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$



2.2 Def: Dizemos que uma transformação $T:\tilde{D}\to\mathbb{R}^2$ é injetiva em $\tilde{D}$ sse

$$T(u_1,v_1)=T(u_2,v_2) \implies (u_1,v_1)=(u_2,v_2)$$

para todo $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\tilde{D}$.

Equivalentemente, T é injetiva sse

$$(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2) \implies T(u_1,v_1)\neq T(u_2,v)$$

$$\forall (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\tilde{D}.$$

2.3 Exemplos

(a) A transformação T do exemplo 2.1 NÃO é injetiva.

De fato,
$$T(1,0)=T(1,2\pi)=(1,0)$$

$$T(1,0)=T(1,2\pi) \quad \text{mas} \quad (1,0)\neq(1,2\pi)$$

(b) A mesma transformação anterior, agora restrita ao retângulo $[0,1]\times[0,\pi]$ é injetiva. Ou seja

$$T:[0,1]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^2,\quad T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

é injetiva ... Prove!

2.4 <u>Def.</u>

Seja $T: \tilde{D} \to \mathbb{R}^2$ uma transformação do plano definida por $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, com x e y funções de classe C^1 em $\tilde{D}$.

A matriz

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

é chamada <u>matriz Jacobiana da transformação T</u>.

O determinante da matriz J diz-se <u>Jacobiano de T</u>

<u>Notação:</u>

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \det J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

2.5. <u>Exemplo</u>

Consideremos a transformação T do exemplo 2.1.

$$\Big(T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \Big)$$

A matriz jacobiana é:

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e $$\det J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r$$

Uma das importâncias da matriz jacobiana está no teorema a seguir, cuja demonstração não faremos.

2.6 Teorema:

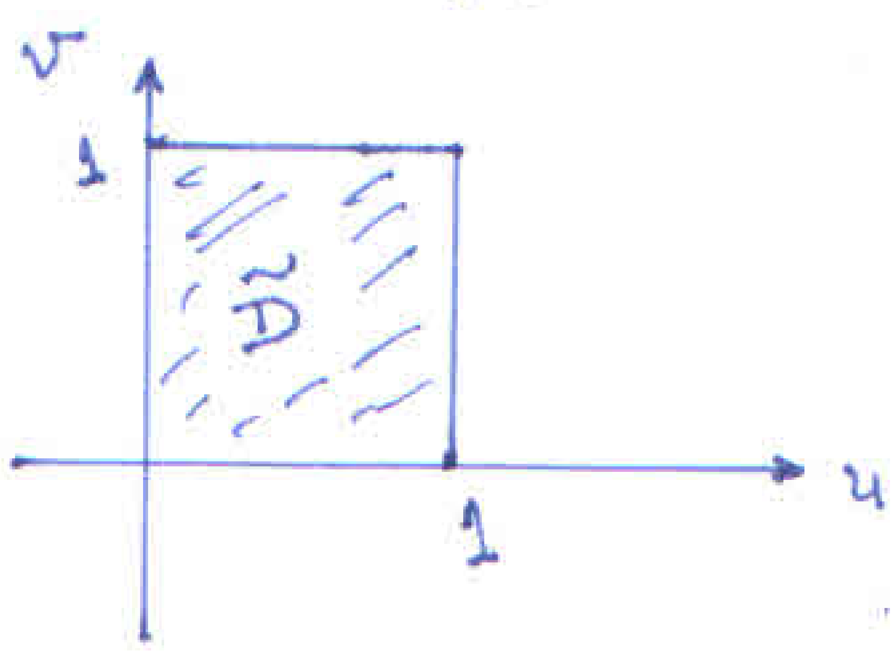
Seja $T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ uma transformação do plano. Se o jacobiano de T num ponto $(u_0, v_0) \in \tilde{D}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$, é diferente de zero, então existe uma vizinhança $V \subset \tilde{D}$ do ponto (u_0,v_0) tal que a restrição de T à vizinhança V é injetiva

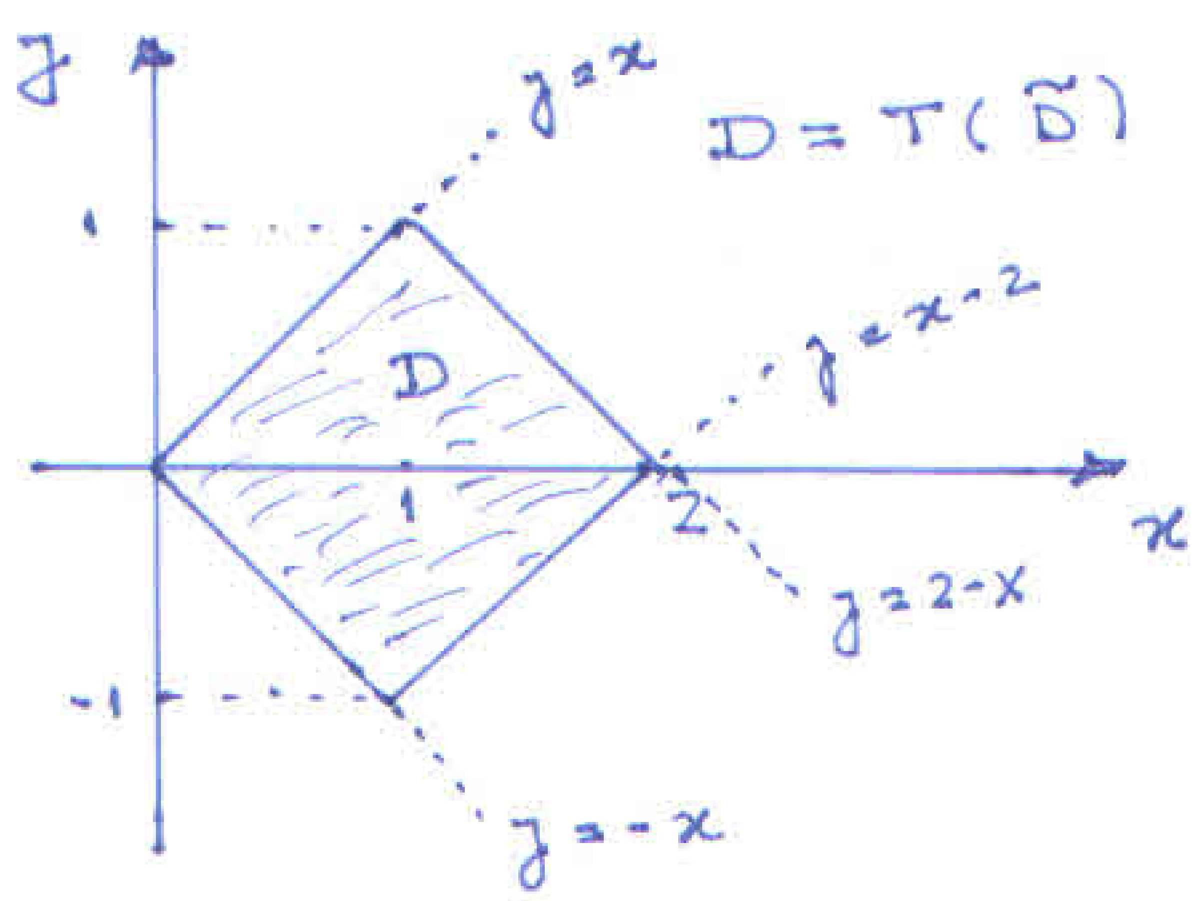
$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad T : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ injetiva} \\ \qquad\qquad V \text{ é uma vizinhança de } (u_0, v_0) \end{array} \right)$$

2.7. Exemplos

(a) Seja $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (u+v, u-v)$

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$$



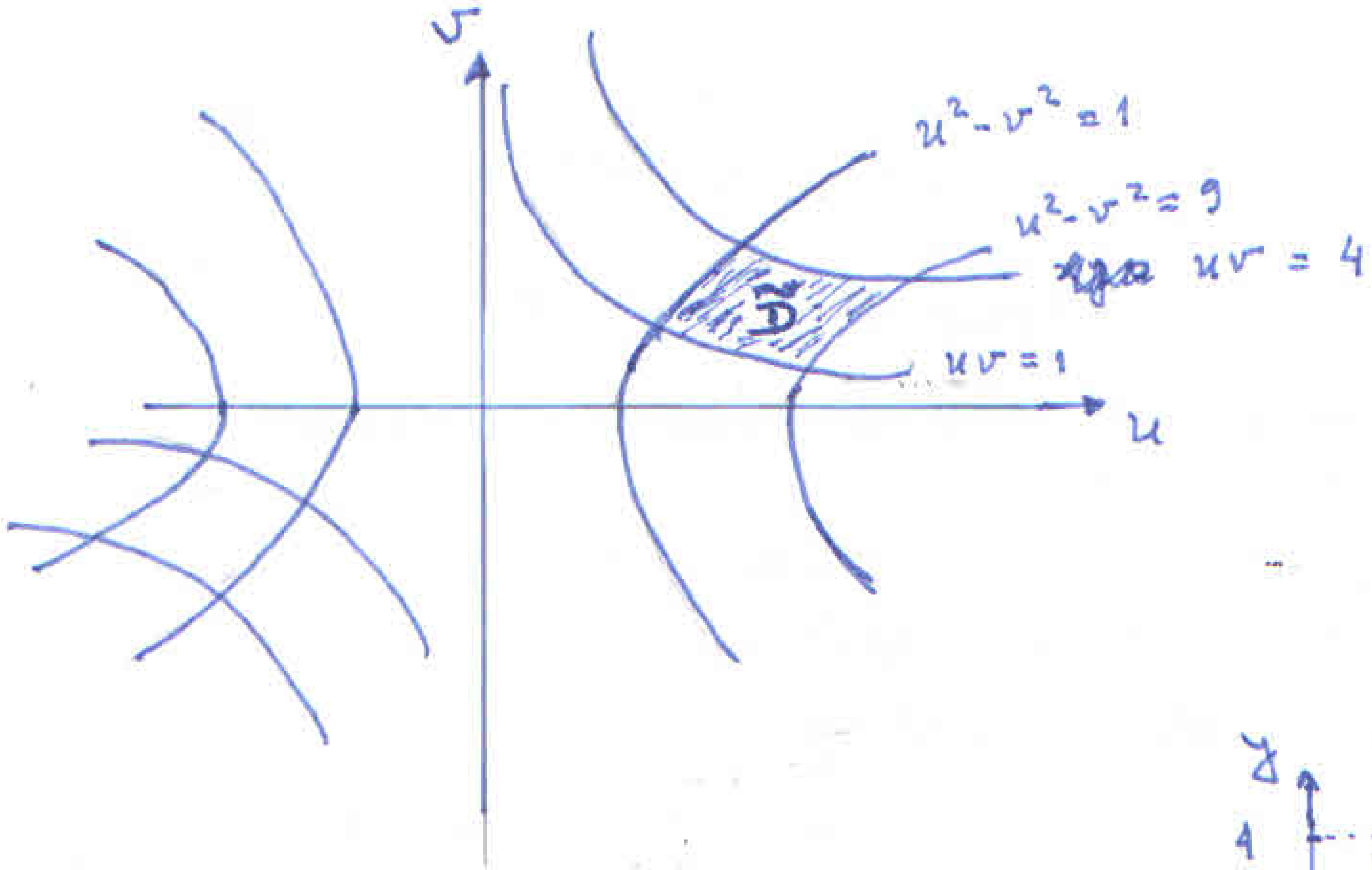


Note que:

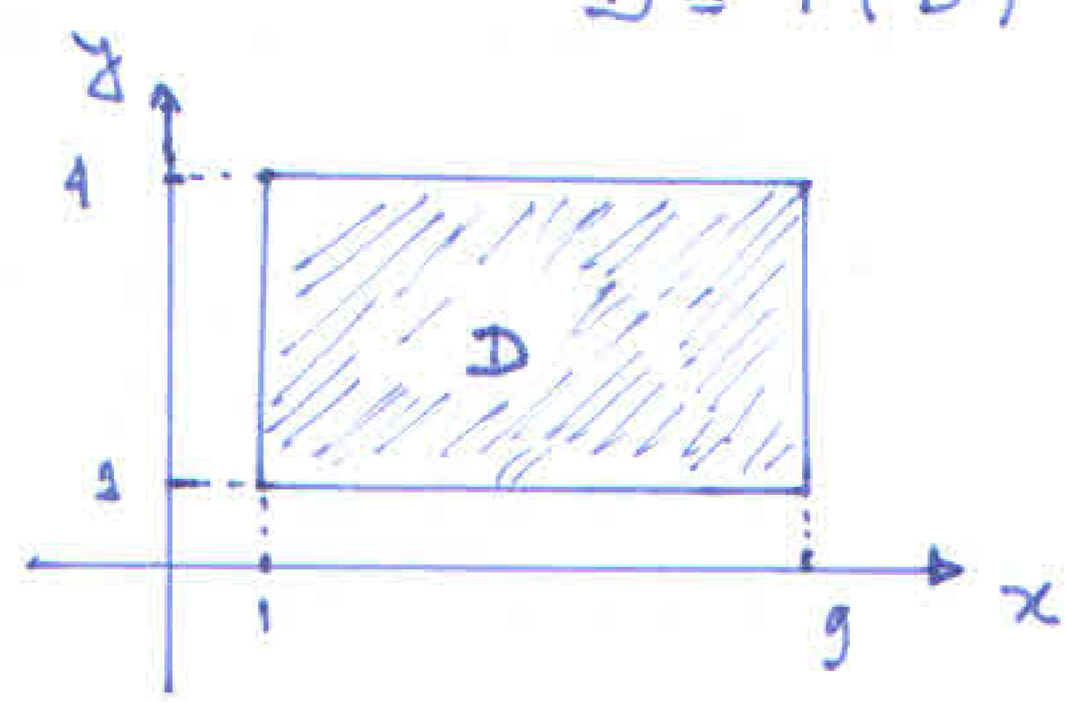
$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \implies y = -x \\ v = 0 \implies y = x \\ u = 1 \implies y = 2-x \\ v = 1 \implies y = x-2 \end{array}\right\} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-2}}$$

(b) Considere a transformação T definida por $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases}$

na região $\tilde{D}$ limitada pelas curvas $u^2 - v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 9$, $uv = 1$ e $uv = 4$, no 1º quadrante



$D = T(\tilde{D})$



$u^2 - v^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$u^2 - v^2 = 9 \Rightarrow x = 9$

$uv = 1 \Rightarrow y = 1$

$uv = 4 \Rightarrow y = 4$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} = 2u^2 + 2v^2 = 2(u^2+v^2)$$

Note que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ em $\tilde{D}$.

2.8. Teorema (Mudança de coord. em integrais duplas)

Seja $T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação injetiva de classe C^1. Seja $D := T(\tilde{D})$ e suponha que D e $\tilde{D}$ são regiões elementares do plano $\mathbb{R}^2$. Então para toda função integrável $f: D \to \mathbb{R}$ temos:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

onde $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ é o valor absoluto do determinante jacobiano e

$\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

Note que em particular temos que

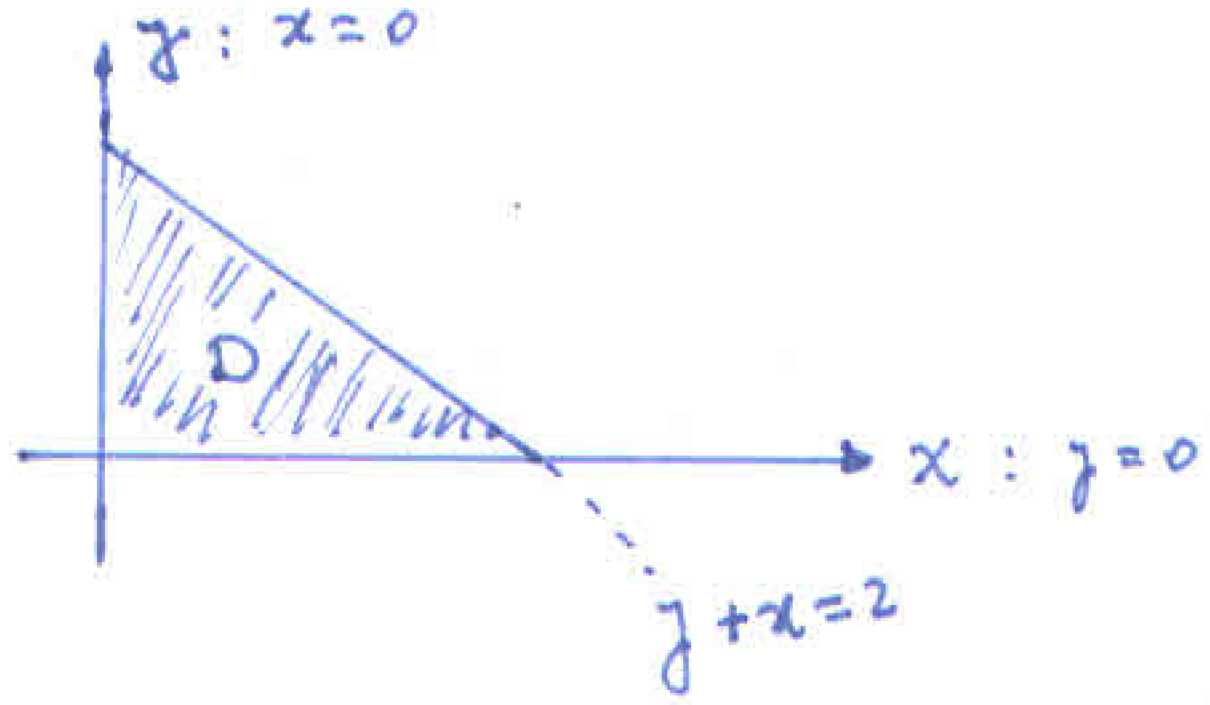
$$\text{área}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

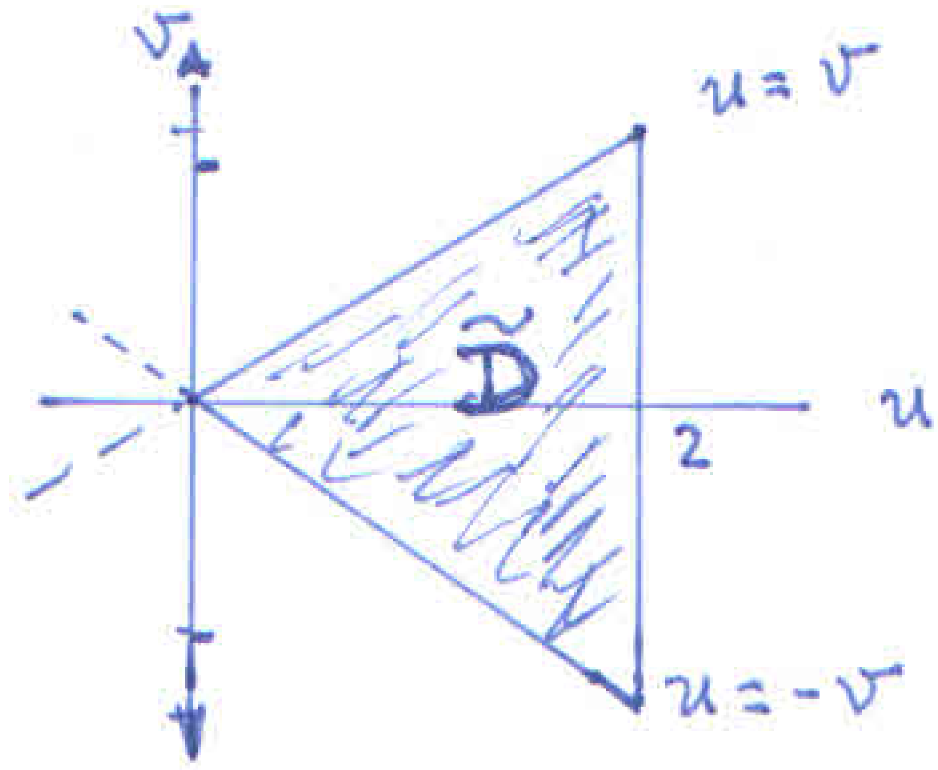
2.9 Exemplos

(a) Calcular $\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}}\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pela reta $y+x=2$ e pelos eixos coord.

Solução

considere a mudança de coord. $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$





$x=0 \Rightarrow u=v$

$y=0 \Rightarrow u=-v$, $x+y=2 \Rightarrow \underline{u=2}$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \therefore \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = 1/2$$

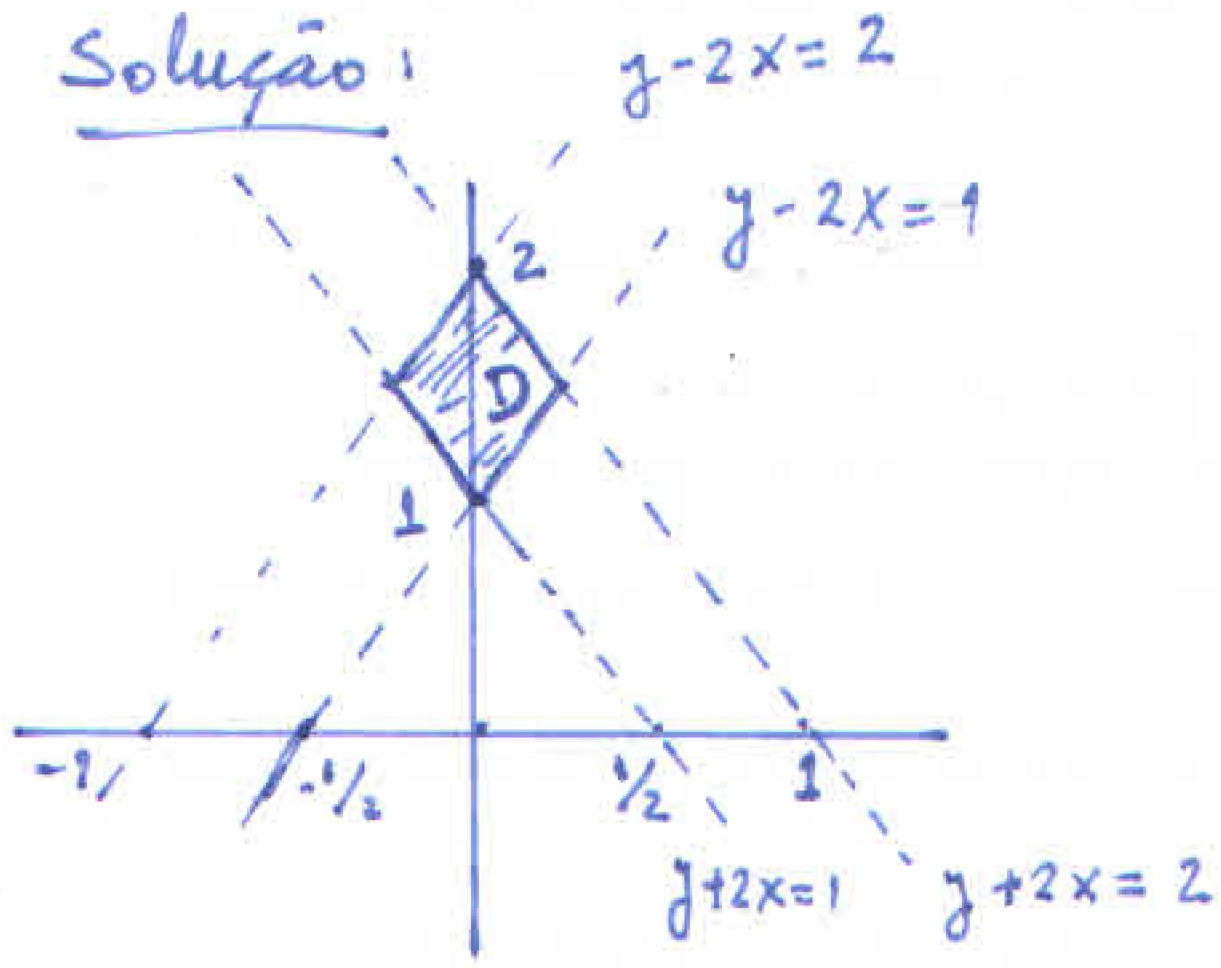
$$\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\tilde{D}} e^{v/u}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-u}^{u} e^{v/u}\,dv\,du$$

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 u\,e^{v/u}\Big|_{v=-u}^{v=u}\,du$$

$$= \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^2 u\,du = \underline{\underline{e-e^{-1}}}$$

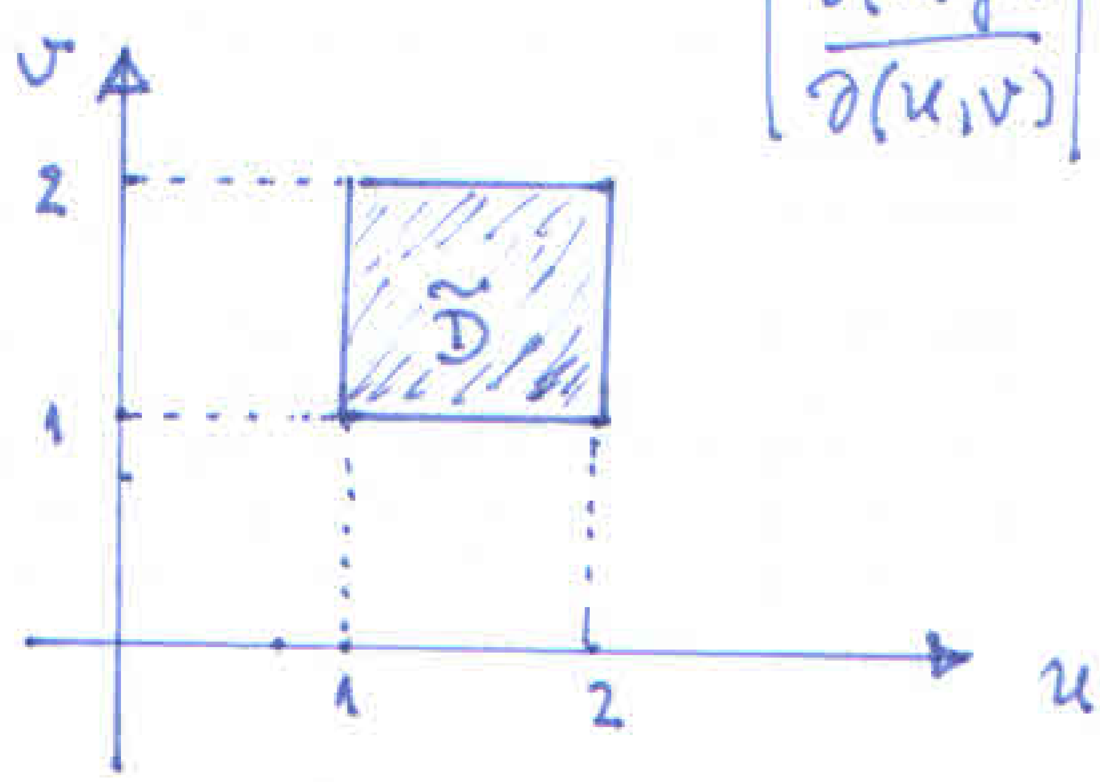
(b) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2}\,dx\,dy$ onde D é a região limitada pelas retas $y-2x=2$, $y+2x=2$, $y-2x=1$ e $y+2x=1$.

<u>Solução</u>:



$$\begin{cases} u = y+2x \\ v = y-2x \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1/4$$



$y-2x=2 \Rightarrow v=2$

$y+2x=2 \Rightarrow u=2$

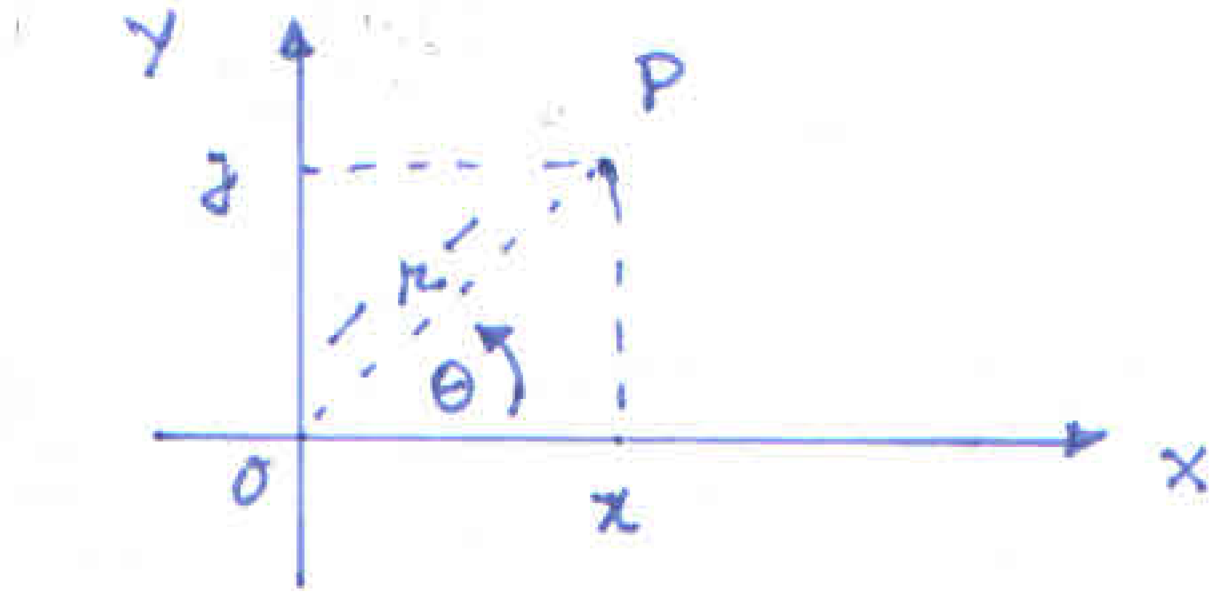
$y-2x=1 \Rightarrow v=1$

$y+2x=1 \Rightarrow u=1$

$$\iint_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{u}{v^2}\cdot\frac{1}{4}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_1^2\int_1^2 \frac{u}{v^2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \cdots = \cdots = \underline{\underline{3/16}}$$

2.10 - Coordenadas Polares



As coord. polares de um ponto P com coord. retangulares (x,y) são (r,θ) onde $r = d(P,0)$ é a distância do ponto P à origem O e θ é o ângulo entre o eixo X e o segmento de reta que liga os pontos O e P.

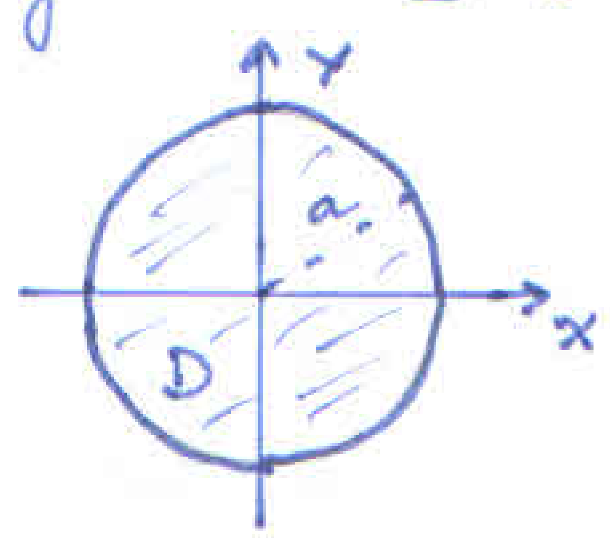
A relação entre as coord. (x,y) e as coord (r,θ) é dada por

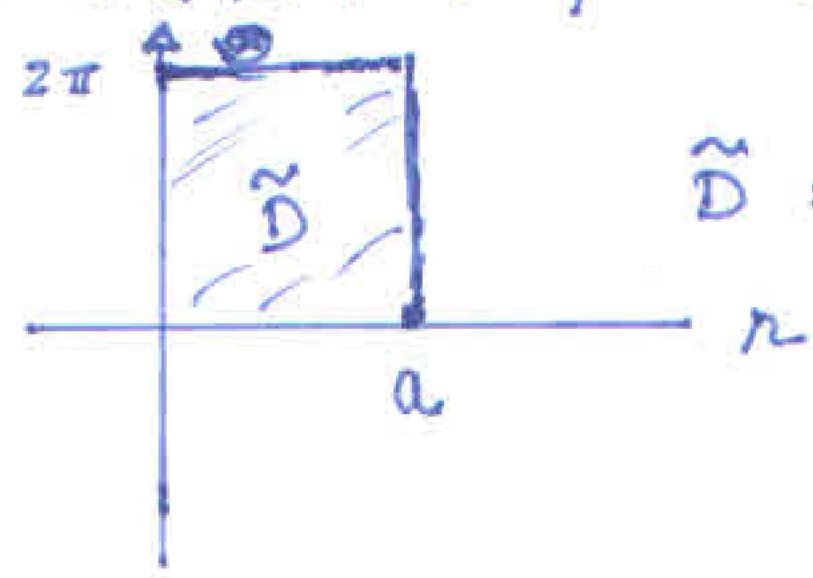
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Note que esta mudança é injetiva em

$$\tilde{D} = \{(r,\theta) : \ r>0 \ , \ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$$

com $\theta_0 = \text{cte}$. Além disso, esta mudança transforma a região circular $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2\}$ na região retangular $\tilde{D} = \{(r,\theta) : \ 0 \leq r \leq a \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



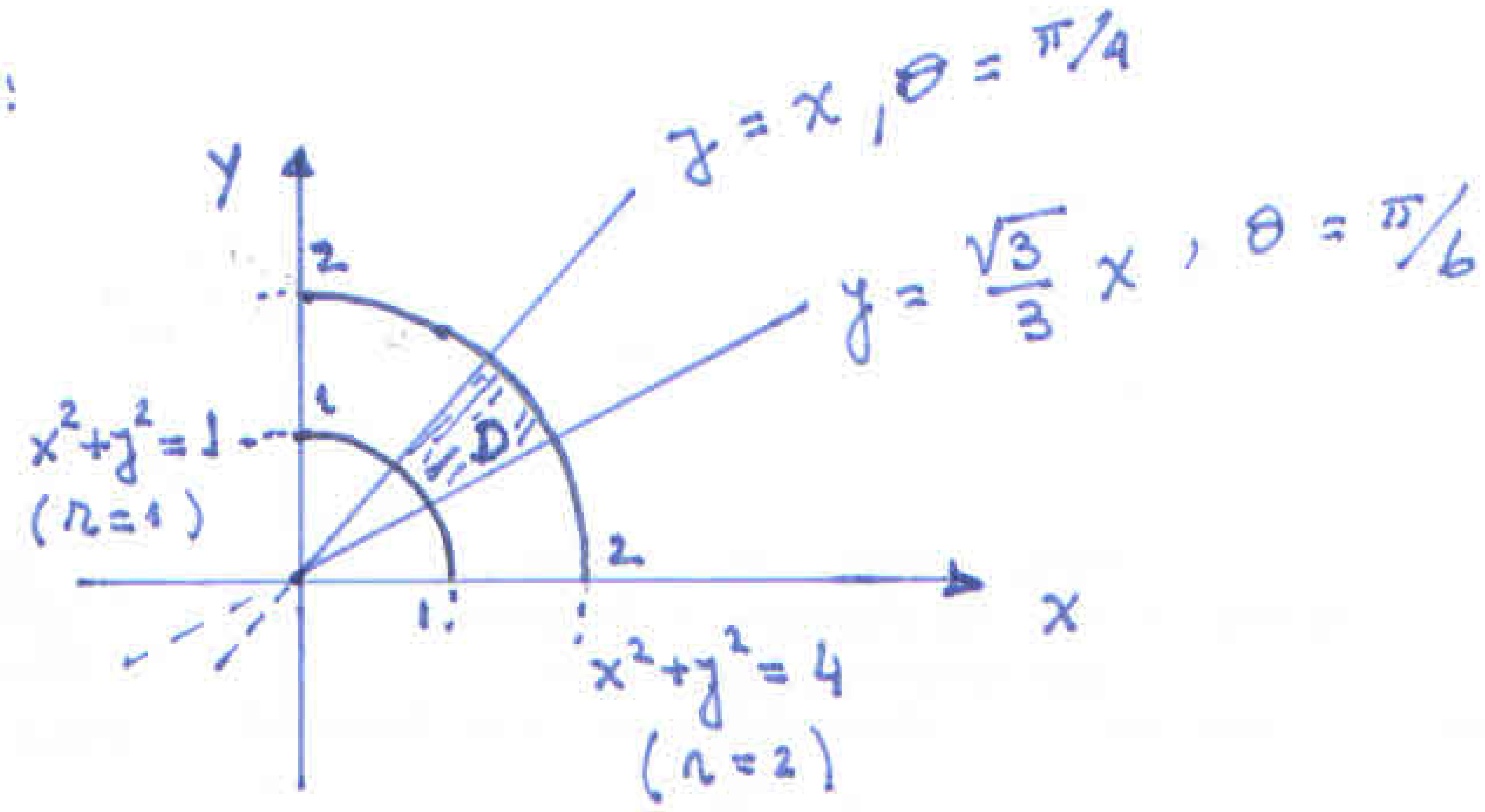


$\tilde{D} = [0,a] \times [0,2\pi]$

2.11 Exemplos

(a) Calcule $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$ e $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, no 1º quadrante

Solução:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \tilde{D} = \{(r,\theta): 1 \le r \le 2, \ \pi/6 \le \theta \le \pi/4\}$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_1^2 r^3\,dr\,d\theta$$

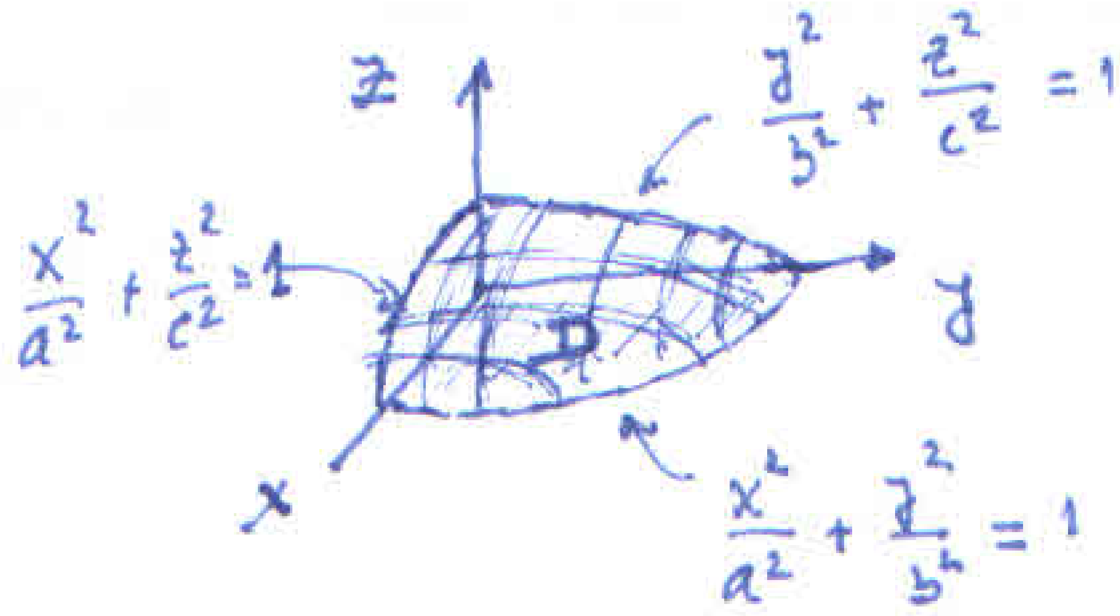
$$= \ldots = \frac{5\pi}{16}$$

(b) Calcule o volume do sólido limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a>0, b>0, c>0$.

Solução:

Pela simetria do elipsóide podemos calcular o volume no 1º ~~octante~~ octante, assim:

$$\text{Vol} = 8\iint_D c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy$$



onde D é a região no 1º quadrante do plano XY limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Fazemos a mudança de coord.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\[2mm] \dfrac{y}{b} = r \,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

o jacobiano desta mudança é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\,\text{sen}\,\theta \\ b\,\text{sen}\,\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = abr$$

Logo,

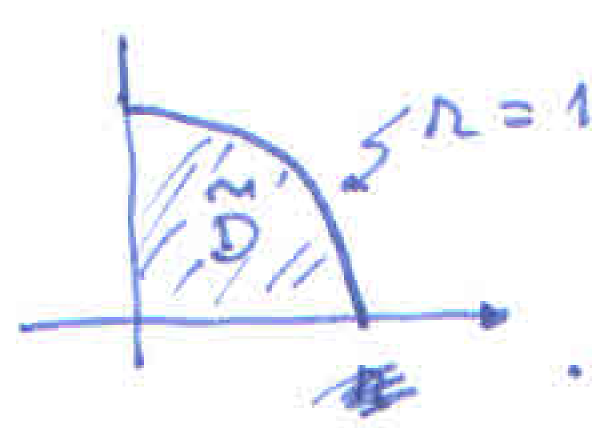
$$\text{Vol} = 8c \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx\,dy = 8abc \iint_{\tilde{D}} r\sqrt{1-r^2}\, dr\, d\theta$$

$$= 8abc \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r\sqrt{1-r^2}\, d\theta\, dr = 4abc\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr$$

$$= \ldots = \frac{4}{3} abc\pi$$

Note que $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\[2mm] \dfrac{y}{b} = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = r^2$.

Logo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \implies \underline{r = 1}$



$$\tilde{D} : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$$

2.11. Algumas Aplicações da Integral Dupla (outras Aplicações)

(a) Massa Total

Considere uma lâmina "fina" com a forma de uma região elementar D e suponha que a massa sobre D se distribui com densidade dada por uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrável. (f representa a massa por unidade de área em cada ponto $(x,y) \in D$). Então a massa total de D é dada por

$$\boxed{M(D) := \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

Em particular se a lâmina é feita de material homogêneo (a densidade é constante), a massa total é o produto da densidade pela área de D.

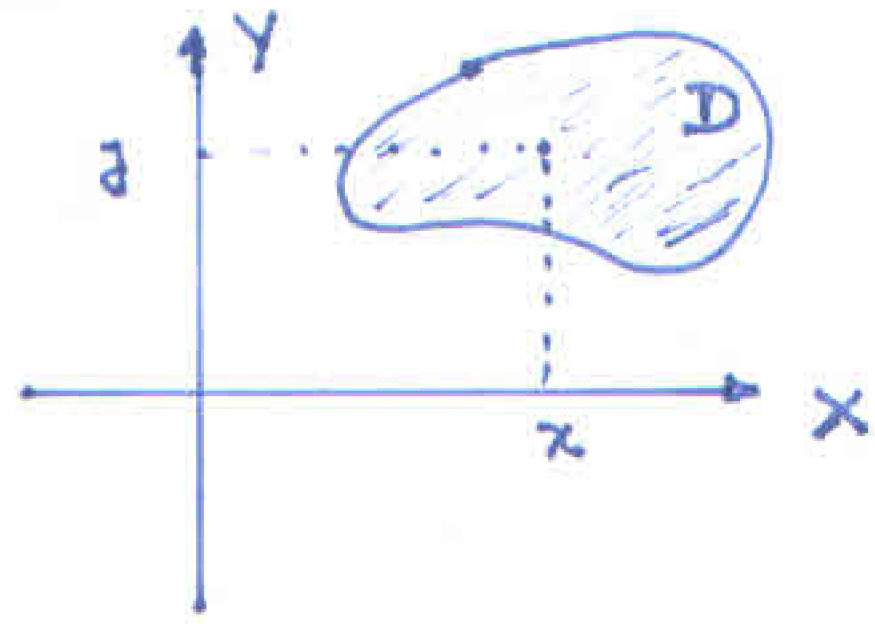
(b) Momento de Massa.

O momento de massa da lâmina D em relação a uma reta ℓ é dado por

$$\boxed{M_\ell := \iint_D d(x,y)\cdot f(x,y)\,dx\,dy}$$

onde $d(x,y)$ é a distância do ponto $(x,y) \in D$ à reta ℓ. Em particular os momentos de massa da lâmina D em relação aos eixos X e Y são dados, respectivamente, por:

$$M_x = \iint_D y\, f(x,y)\, dx\, dy \quad , \quad M_y = \iint_D x\, f(x,y)\, dx\, dy$$



(c) Centro de Massa

O centro de massa da lâmina D é dado por $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M(D)} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M(D)}$$

Se $f(x,y) \equiv k > 0$, $(\bar{x}, \bar{y})$ é chamado centróide de D e corresponde ao centro geométrico da região D

O centro de massa pode ser pensado como um ponto onde a massa da lâmina se concentra sem alterar seu momento em relação a qualquer eixo.

(d) Momento de Inércia

O momento de inércia da lâmina D em relação a uma reta ℓ é

$$I_\ell := \iint_D d^2(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

onde $d^2(x,y)$ é o quadrado da distância do ponto $(x,y) \in D$ à reta ℓ.

Em particular se ℓ é o eixo X:

$$\boxed{I_x = \iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy}$$

se ℓ é o eixo Y, ...

$$\boxed{I_y = \iint_D x^2 f(x,y)\,dx\,dy}$$

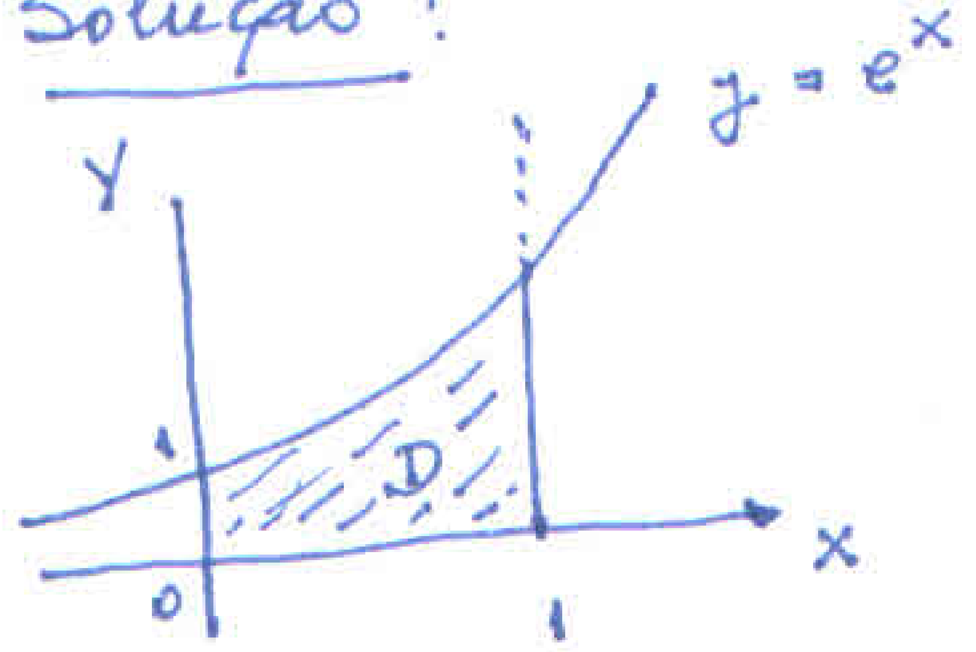
Define-se ainda, o momento de inércia polar em relação à origem como

$$\boxed{I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2) f(x,y)\,dx\,dy}$$

2.12. Exemplos

(a) Determine o momento de inércia polar da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $x = 1$, $y = 0$ e $x = 0$; se a densidade é dada por $f(x,y) = xy$.

Solução:



$$I_x = \iint_D y^2 \cdot xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{e^x} xy^3\,dy\,dx$$

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{e^x} x y^3 \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x y^4 \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} x (e^x)^4 dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x \cdot e^{4x} dx$$

$$= \frac{1}{16} x e^{4x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{16} e^{4x} dx \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{4} x, \; du = \frac{1}{4} dx \\ dv = e^{4x}, \; v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right.$$

$$= \ldots\ldots = \frac{3}{64} e^4 - \frac{1}{64}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \cdot xy \, dx dy = \iint_D x^3 y \, dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{e^x} x^3 y \, dy \, dx = \int_0^1 x^3 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \frac{e^{2x}}{2} dx = \ldots\ldots$$

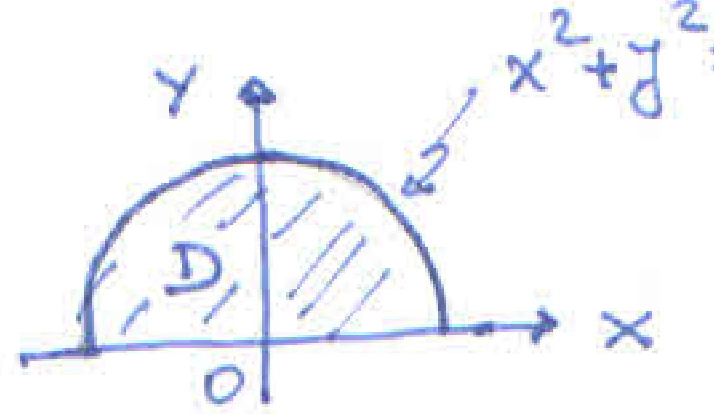
$$= \frac{e^2}{16} + \frac{3}{16}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{3}{64} e^4 + \frac{e^2}{16} - \frac{1}{64} + \frac{3}{16}$$

$$I_0 = \frac{1}{64} \left(3e^4 + e^2 + 13 \right)$$

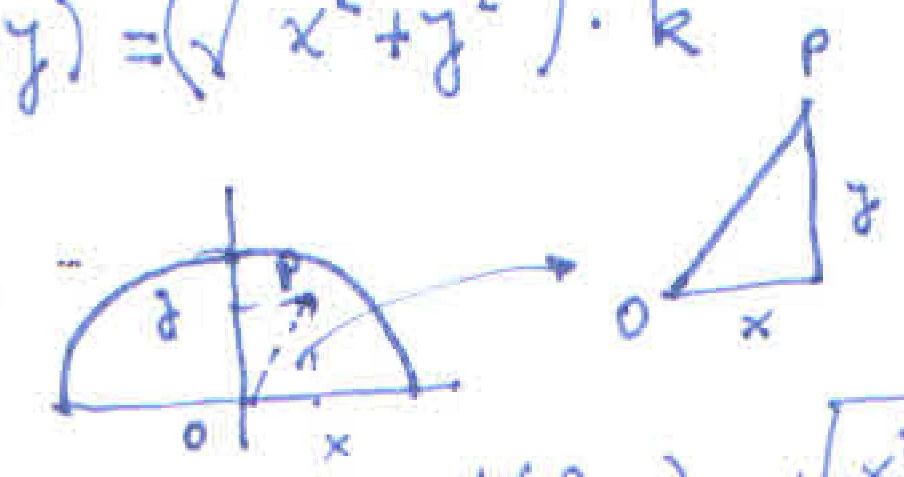
(b) Determine a massa de uma lâmina D que ocupa a região $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ se sua densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto à origem.

Solução



A densidade, no ponto (x,y), é

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot k$$



$$d(P,O) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$M(D) = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Passando para coord. polares, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad x^2+y^2 = r^2$

temos

$$M(D) = k\int_0^1 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2}\,.\,r\,d\theta\,dr$$

$$= k\int_0^1 \int_0^{\pi} r^2\,d\theta\,dr \;=\; \pi k \int_0^1 r^2\,dr$$

$$= \frac{k\pi}{3} \quad \text{unidades de massa.}$$