UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Cálculo III

1ª Prova, João Pessoa, 04 de março de 2013
Professor: Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ________________

Questão 1 *(2.0 pts) Use coordenadas polares para calcular* $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

Questão 2 *(2.0 pts) Seja* D *a região do primeiro quadrante limitada por:* $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$ *e* $xy = 4$. *Use a mudança de variáveis* $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$ *para calcular* $\int\int_D xy^3 dA$.

Questão 3 *(2.0 pts) Uma lâmina no plano* XY *é limitada dentro da circunferência* $(x-2)^2 + y^2 = 4$ *e fora da circunferência* $x^2 + y^2 = 4$. *Calcule a massa da lâmina se a densidade da mesma é dada por* $\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$.

Questão 4 *(2.0 pts) Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de altura* h *e raio da base* r. *A densidade num ponto* P *do sólido é proporcional à distância do ponto* P *à base do sólido. Determine o momento de inercia em relação ao eixo de simetria do cilindro.*

Questão 5 *(2.0 pts) Calcule o volume do sólido acima do plano* $z = 0$, *dentro da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *e abaixo do cone* $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

Boa Prova !!

Cálculo III   1ª Prova

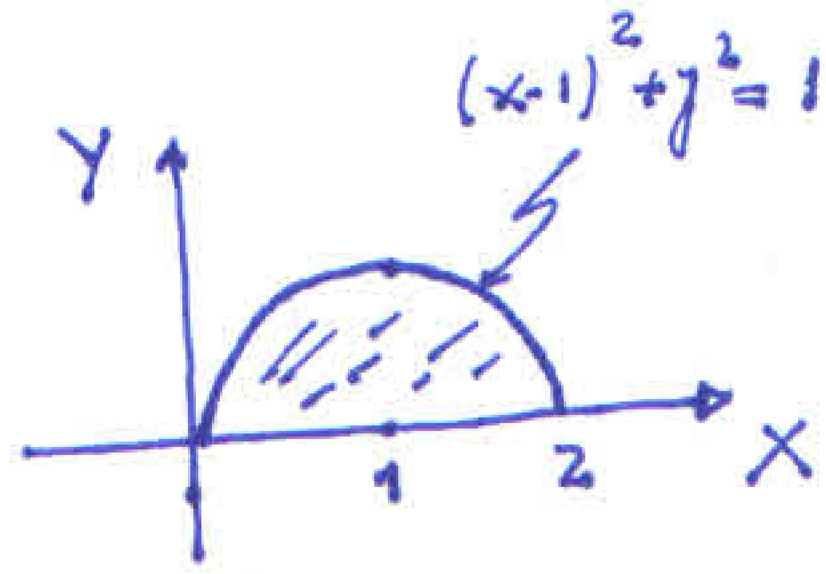
① Use coord. polares p/ calcular

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy\, dx .$$

Solução:

$x = r\cos\theta$ $\qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$



$x^2+y^2 = r^2 \quad , \qquad x+y = r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$

$1 = (x-1)^2 + y^2 = x^2+y^2-2x+1$

$\Rightarrow \quad 0 = r^2 - 2r\cos\theta$

$\underbrace{\{r = 2\cos\theta\}}$ $\qquad \underbrace{\left\{\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \end{array}\right\}}$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)}{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\cdot(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\, d\theta$$

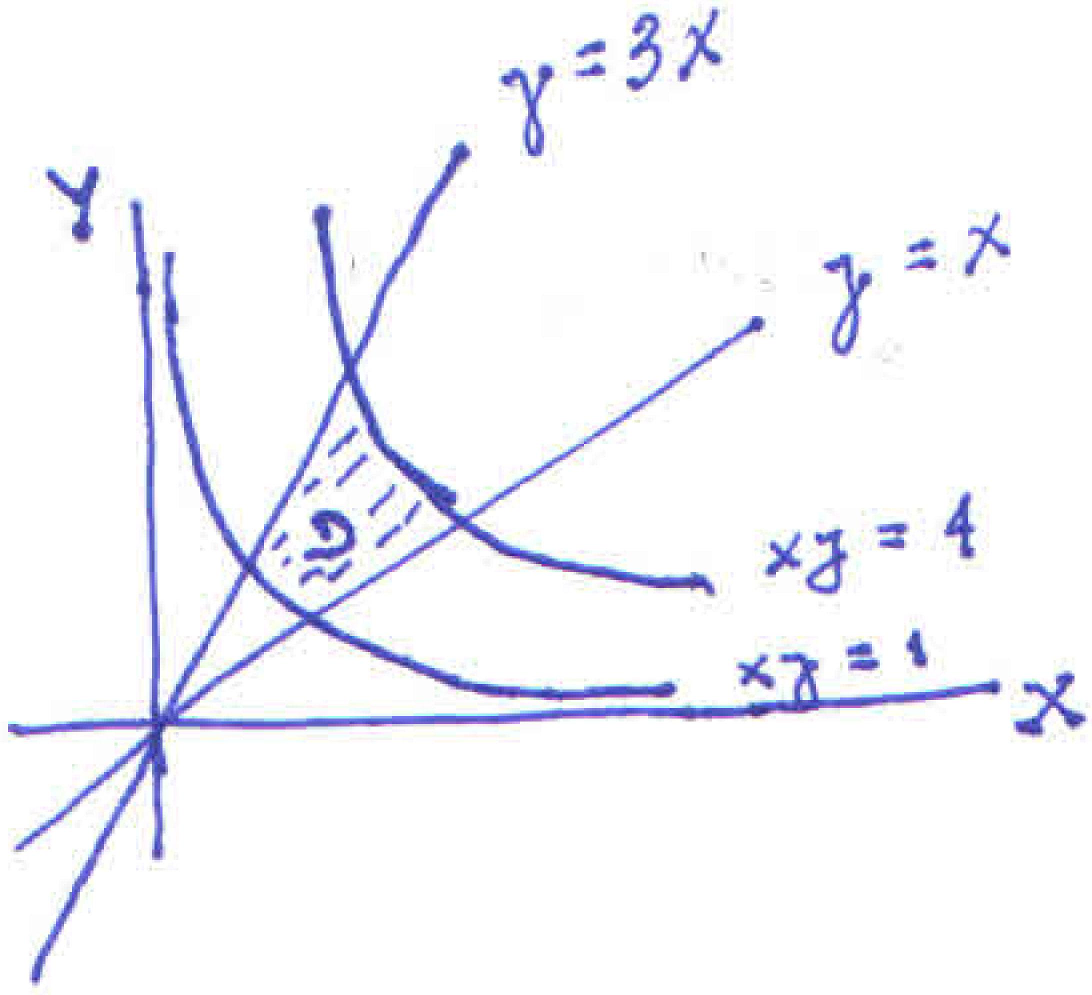
$$= \int_0^{\pi/2} 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta \qquad \left(\begin{array}{l} \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\ 2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta \end{array}\right)$$

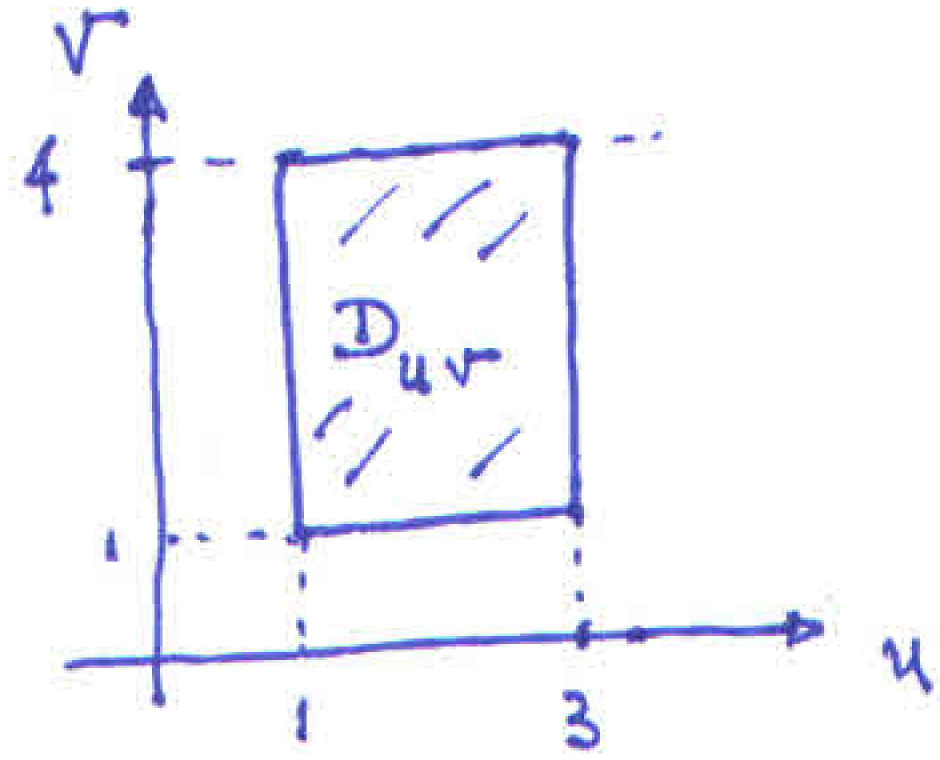
$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2}}_{1 \;\; -\frac{1}{2}(-1-1)} + \frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\Big|_0^{\pi/2}}_{0}$$

$$= \underline{1 + \pi/2} = \frac{2+\pi}{2}$$

2

2





$$\begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases}$$

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -2\frac{y}{x} = -2u$$

$$J^{-1} = -2u \Rightarrow \boxed{J = \frac{-1}{2u}}$$

ou

$$y = xu \Rightarrow v = x^2 u \rightarrow x = \sqrt{\frac{v}{u}} = v^{1/2} u^{-1/2}$$

$$v = xy \Rightarrow v = y \cdot v^{1/2} u^{-1/2} \Rightarrow y = u^{1/2} v^{1/2}$$

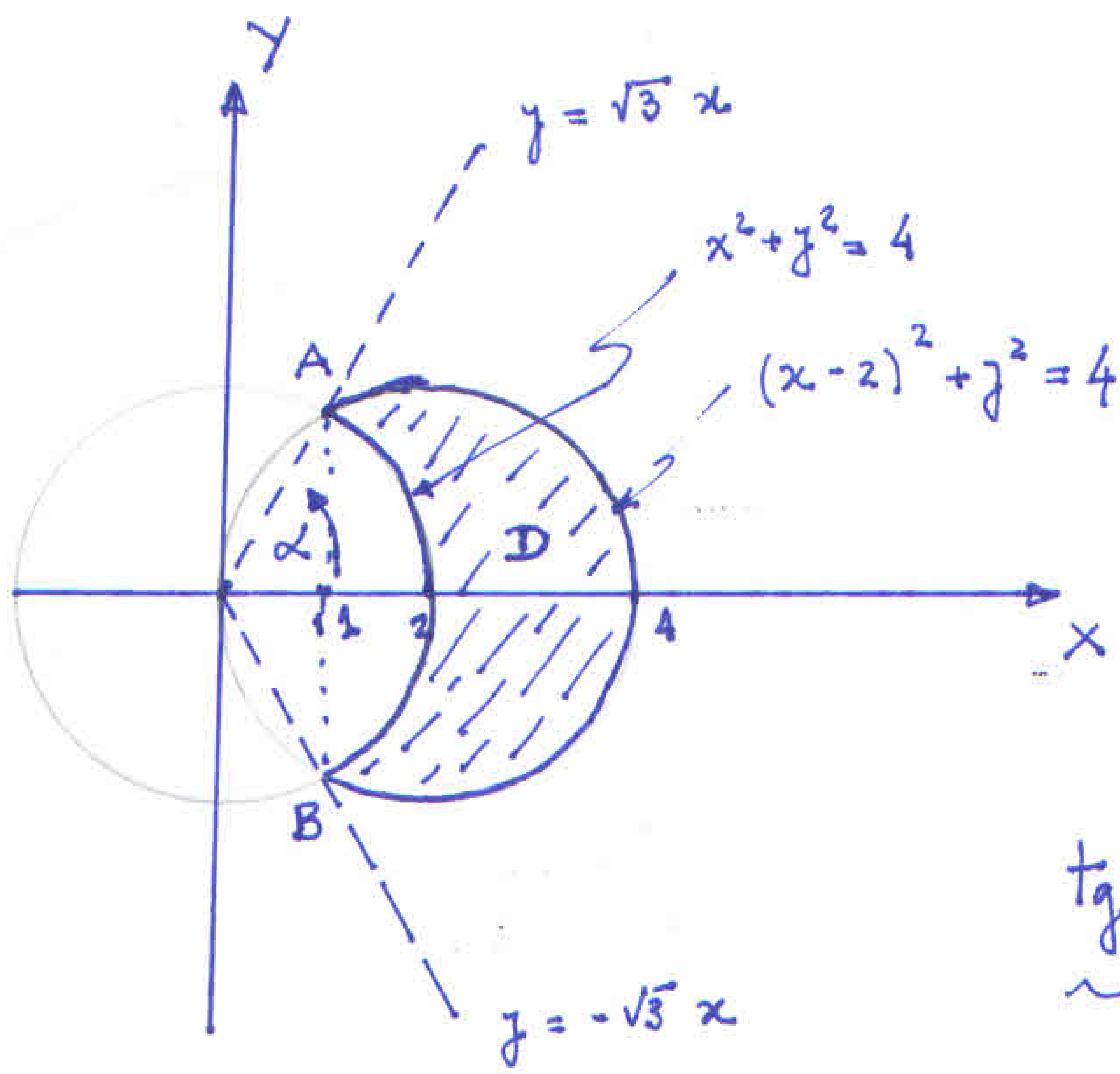
$$\begin{cases} x = u^{-1/2} v^{1/2} \\ y = u^{1/2} v^{1/2} \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} v^{1/2} \cdot -\frac{1}{2} u^{-3/2} & \frac{1}{2} v^{-1/2} u^{-1/2} \\ \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{1/2} & \frac{1}{2} u^{1/2} v^{-1/2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{-1}{2u}}$$

$$\iint_D xy^3 \, dA = \int_{D_{uv}} uv^2 \left| \frac{-1}{2u} \right| du\,dv = \frac{1}{2} \int_1^3 \int_1^4 v^2 \, dv\, du$$

$$= \dots = \underline{\underline{21}}$$

3



$$tg\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \pi/3$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ (x-2)^2+y^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-4x+4+y^2=4$$

$$\Rightarrow 4-4x+4=4$$

$$\Rightarrow 4x=4 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$1+y^2=4 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow \boxed{y=\pm\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{A=(1,\sqrt{3}), \quad B=(1,-\sqrt{3})}$$

A massa da lâmina D é dada por

$$M = \iint_D \delta(x,y)\,dA = \iint_D (x^2+y^2)^{-1/2}\,dA$$

Passamos para coord. polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \end{cases}$ $\quad x^2+y^2=r^2$, $\quad dA = r\,dr\,d\theta$

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2$$

$$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2=4x \Rightarrow r^2=4r\cos\theta \Rightarrow r=4\cos\theta$$

Então

$$D_{r\theta}: \begin{cases} -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3 \\ 2 \leq r \leq 4\cos\theta \end{cases}$$

Daí,

$$M = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{2}^{4\cos\theta} (r^2)^{-1/2}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{2}^{4\cos\theta} \frac{1}{r}\cdot r\,dr\,d\theta$$

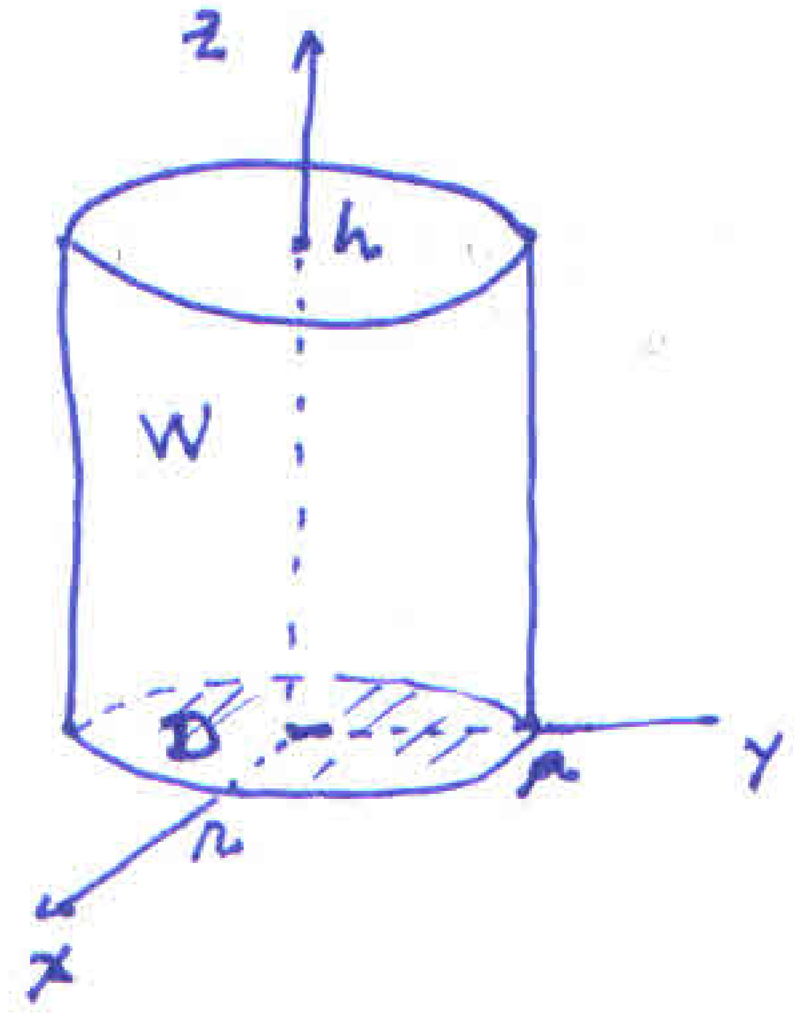
$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4\cos\theta-2)\,d\theta = (4\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\theta)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= \left(4\,\mathrm{sen}\,\pi/3 - 2\pi/3\right) - \left(4\,\mathrm{sen}(-\pi/3) - 2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$

4



Escolha os eixos coord. de modo que o eixo de simetria seja o eixo z e a base esteja no plano xy

A eq. do cilindro sobre o plano xy é $x^2+y^2=r^2$ com $0 \leq z \leq h$.

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ x^2+y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq h\}$$

a função densidade é dada por $\delta(x,y,z) = kz$

(densidade em $P=(x,y,z)$ proporcional à distância de P à base do sólido W, neste caso o plano xy)

$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$$= k \iiint_W (x^2+y^2)\,z\,dV = k \iint_D \int_0^h (x^2+y^2)\,z\,dz\,dx\,dy$$

$$= k \iint_D (x^2+y^2) \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^h dx\,dy = \frac{k \cdot h^2}{2} \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Passando para coord. polares temos $x^2+y^2=R^2$
$dx\,dy = R\,dR\,d\theta$ e

$$D_{R\theta} \begin{cases} 0 \leq R \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

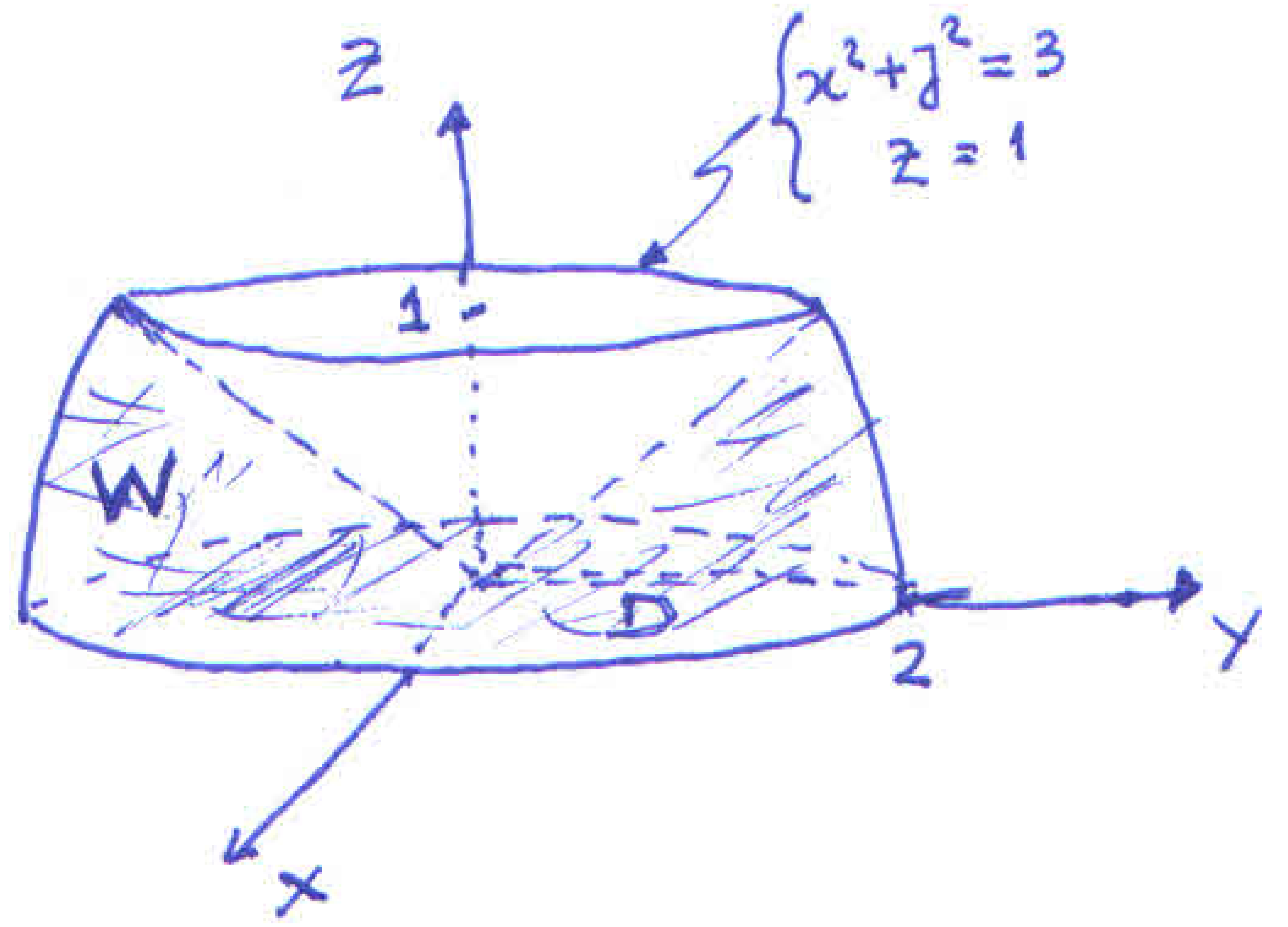
Logo

$$I_z = \frac{kh^2}{2} \iint_{D_{R\theta}} R^2 \cdot R \, dR \, d\theta = \frac{kh^2}{2} \iint_{D_{R\theta}} R^3 \, dR \, d\theta$$

$$= \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} R^3 \, dR \, d\theta = \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \Big|_0^{r} d\theta$$

$$= \frac{kh^2}{2} \cdot \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{kh^2 r^4}{4} \pi$$

5



Volume acima do plano $z=0$ dentro da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e abaixo do cone $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{3}=4$$

ou $\quad 4(x^2+y^2)=12$

$\therefore \quad \underline{x^2+y^2=3} \quad$ e $\quad \underline{z=1}$

Note que a projeção de W sobre o plano xy é o disco $D: x^2+y^2 \leq 4$

W em coord. esféricas

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \rho\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{\phi = \pi/3}$$

$$\therefore \quad \pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$$

Logo

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \\ \pi/3 \leq \phi \leq \pi/2 \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle vol(W) = \iiint_W dV = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$$= \int_0^{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta\, d\phi\, d\rho = 2\pi \int_0^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\rho$$

$$= \ldots\ldots = \frac{8\pi}{3}$$