

Integral de Superf. de um campo escalar

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada por

$$\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Seja $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar ^{contínuo} definido num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ t.q. $\varphi(D) \subset A$.

Definimos a integral de superfície do campo $f(x, y, z)$ sobre a superfície S como:

$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &:= \iint_S f(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}_{dS} \, du \, dv \end{aligned}$$

Exemplos:

- 1) Se S é o gráfico da função ~~$z = z(x, y)$~~ , $(x, y) \in D$,
então $z = z(x, y)$

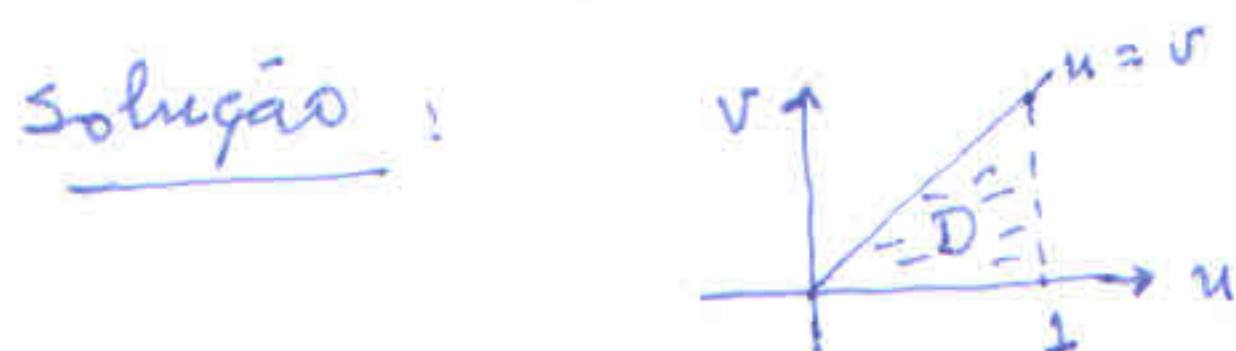
$$\begin{aligned} \iint_S f \, dS &= \iint_S f(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

2) Se $f(x, y, z) = 1$ em S , então $\iint_S 1 \, dS = \iint_S dS = \text{área}(S)$

3) Calcule $\iint_S xy \, dS$, onde S é a superf. parametrizada por

$\varphi(u, v) = (u, v, 2u + v - 1)$ com $(u, v) \in D$ e

$D: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}$



$\varphi_u = (1, 0, 2)$, $\varphi_v = (0, 1, 1)$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1)$, $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{6}$

$\therefore dS = \sqrt{6} \, du \, dv$

$\iint_S xy \, dS = \iint_D u \cdot v \sqrt{6} \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^u uv \sqrt{6} \, dv \, du$

$= \int_0^1 \sqrt{6} u \cdot \frac{v^2}{2} \Big|_0^u \, du = \int_0^1 \frac{\sqrt{6}}{2} u \cdot u^2 \, du$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} \int_0^1 u^3 \, du = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{8}$

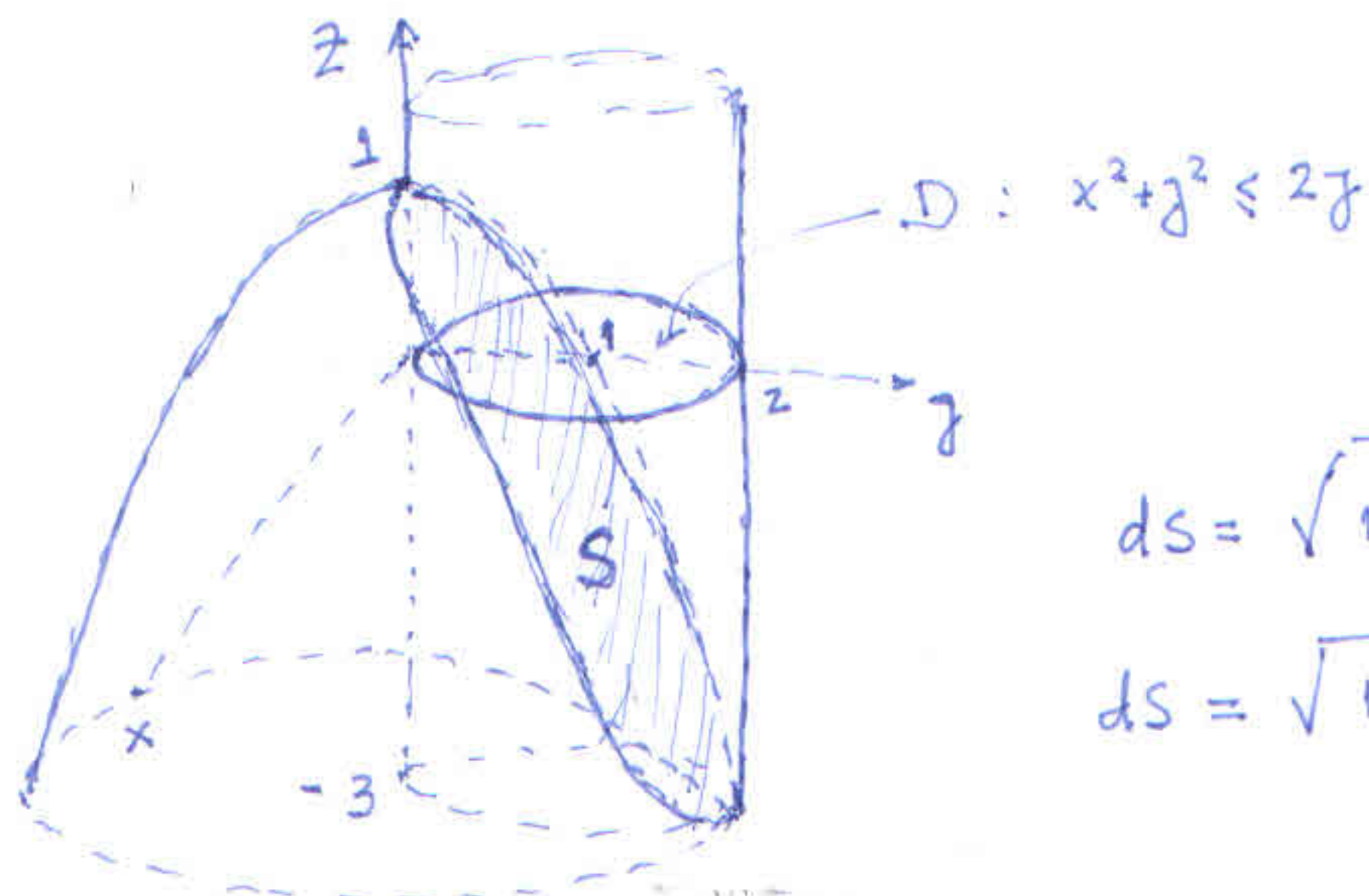
4) Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \, dS$, onde S é a superf.

$z = 1 - x^2 - y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$

Solução

$S: z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D$

$D: x^2 + y^2 \leq 2y$



$$D: x^2 + y^2 \leq 2z$$

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

$$= \iint_D dx dy = \text{Área}(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

Se a superf. S representa uma lâmina delgada e $\delta = \delta(x, y, z)$ é a densidade superficial (que supomos contínua), então a massa M de S é dada por

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

O momento de inércia de S em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_S r^2(x, y, z) \delta(x, y, z) dS$$

onde $r(x, y, z)$ = distância do ponto (x, y, z) ao eixo E .

Em particular se o eixo E é:

o eixo z , então $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

o eixo x , então $r(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$

o eixo y , então $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$.

E temos, respectivamente:

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dS$$

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dS$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dS$$

O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \delta(x, y, z) dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y \delta(x, y, z) dS$$

$$\bar{z} = \iint_S z \delta(x, y, z) dS.$$

Exemplos:

- 1) calcule a massa da superf. S que corresponde à parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo $\delta(x, y, z) = y^2$ sua densidade

Solução:

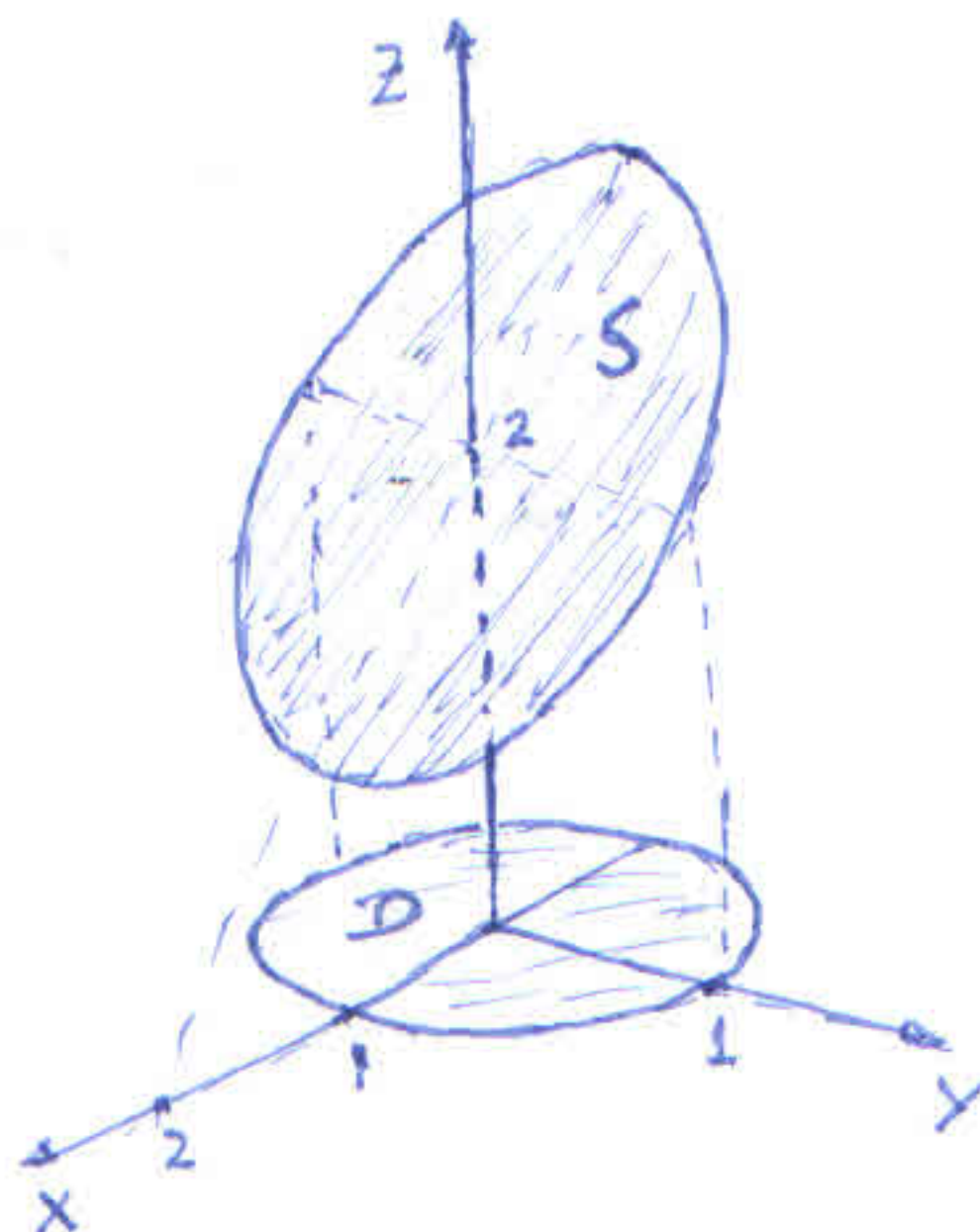
$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

$S: z = f(x, y) = 2 - x$ com

$(x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\boxed{dS = \sqrt{2} dx dy}$$



$$\begin{aligned} \therefore M &= \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_D y^2 \sqrt{2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \iint_D y^2 dx dy \end{aligned}$$

Em coord. polares:

$$M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right|_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \text{ u.m.}$$