1. Integrais Duplas

1.1. Integrais Duplas sobre Retângulos.

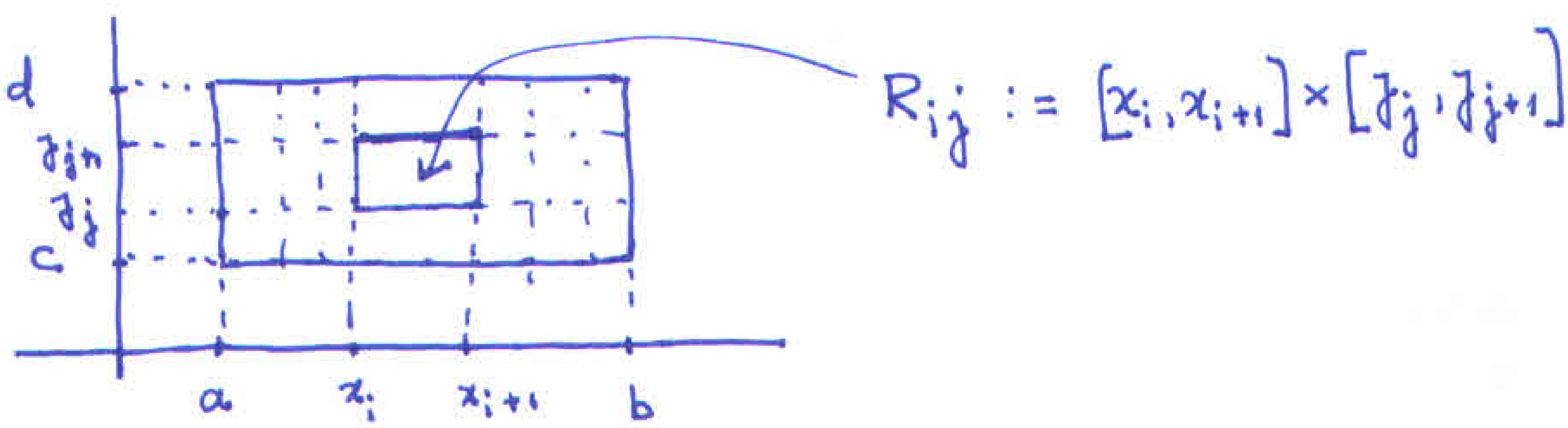
Consideremos uma função limitada $f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$

$$\left(\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \,,\, c \leq y \leq d\} \right)$$

Sejam $P_1 := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e $P_2 := \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ partições dos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$ respect. tais que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad , \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b \quad ,$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n} \, .$$



$P_1 \times P_2$ é uma partição do retângulo $\mathcal{R}$ e os n^2 subretangulos $R_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ cobrem $\mathcal{R}$. Seja $c_{ij} \in R_{ij}$, $i,j = 0,1,\ldots,n-1$, um ponto arbitrário e consideremos a soma

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \, \Delta x \, \Delta y$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.

S_n diz-se "soma de Riemann" de f sobre $\mathcal{R}$.

<u>Def. 1.1.</u> Dizemos que $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ sse $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe qualquer que seja a escolha dos $c_{ij} \in \mathcal{R}_{ij}$ e qualquer que sejam as partições P_1 e P_2.

Neste caso denotamos este limite por

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

e chamamos de <u>integral dupla de f sobre $\mathcal{R}$</u>.

<u>Teorema 1.2</u> Se $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e contínua, então f é integrável.

1.3- Propriedades da integral dupla

(a) <u>Linearidade</u>

sejam $f, g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ funções integráveis e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então a função $\alpha f + \beta g$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\cancel{\iint_{\mathcal{R}} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dx\,dy$$

Dem: Queremos ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i,j} \left(\alpha f(c_{ij}) + \beta g(c_{ij})\right) \Delta x \Delta y$

existe e que de fato,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j} \left(\alpha f(c_{ij}) + \beta g(c_{ij})\right) \Delta x \Delta y = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y \; +$$

$$+ \; \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j} g(c_{ij}) \Delta x \Delta y$$

Como os dois limites do lado direito da igualdade acima existem já que as funções f e g são integraveis em $\mathcal{R}$, isto segue das propiedades dos limites. #

(b) Se $f, g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são integráveis sobre $\mathcal{R}$ e $\forall (x,y) \in \mathcal{R}$, $f(x,y) \leq g(x,y)$, então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dx\,dy$$

(c) Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são retângulos, e f é integrável em $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, então f é integrável em $\mathcal{R}$ e

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

1.4. Integrais Iteradas

Para uma função $f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada definida num retângulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$, uma integral iterada de f sobre $\mathcal{R}$ é uma integral do tipo

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

Para calculá-la, calculamos a integral $\int_a^b f(x,y)\,dx$ como uma integral de uma variável em x, com y fixo, o resultado será uma função de y que agora integramos nessa variável nos limites de integração c e d.

Analogamente calcula-se a integral

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx$$

1.5 Exemplos

(a) Calcule $\int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 x^3 y^2 \, dy \right\} dx$

Solução:

$$\int_{-1}^2 x^3 y^2 dy = \frac{x^3 y^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{x^3}{3}\left(2^3 - (-1)^3 \right)$$

$$= \frac{x^3}{3}(8+1) = \frac{9x^3}{3} = 3x^3$$

$$\int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 x^3 y^2 dy \right\} dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = 3/4$$

$$\therefore \int_0^1 \left\{ \int_{-1}^2 x^3 y^2 dy \right\} dx = 3/4$$

(b) Calcule $\int_1^2 \int_1^2 y e^{xy} \, dx \, dy$

Solução

$$\int_1^2 y e^{xy} dx = e^{xy} \Big|_{x=1}^{x=2} = e^{2y} - e^{y}$$

$$\int_1^2 (e^{2y} - e^{y}) dy = \left(\frac{1}{2} e^{2y} - e^{y} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} e^4 - e^2 - \frac{1}{2} e + e$$

$$\therefore \int_1^2 \int_1^2 y e^{xy} dx \, dy = \frac{1}{2} e^4 - e^2 + \frac{1}{2} e$$

O teorema abaixo relaciona a integral dupla com as integrais iteradas.

~~Teorema~~

1.6 Teorema de Fubini*

Seja $f: \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ contínua no retângulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$. Então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx$$

1.7. Exemplo:

Calcule $\iint_{\mathcal{R}} (2xy + y^2)\,dx\,dy$ onde $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$

Solução:

$$\iint_{\mathcal{R}} (2xy + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (2xy + y^2)\,dx \right\} dy = \ldots = 5/6$$

* Guido Fubini, matemático italiano (19/01/1879 – 06/06/1943)
Doutorou-se em 1900 com uma tese sobre Paralelismo de Clifford em Espaços Elípticos.

1.8.- Integração Dupla em Regiões mais Gerais

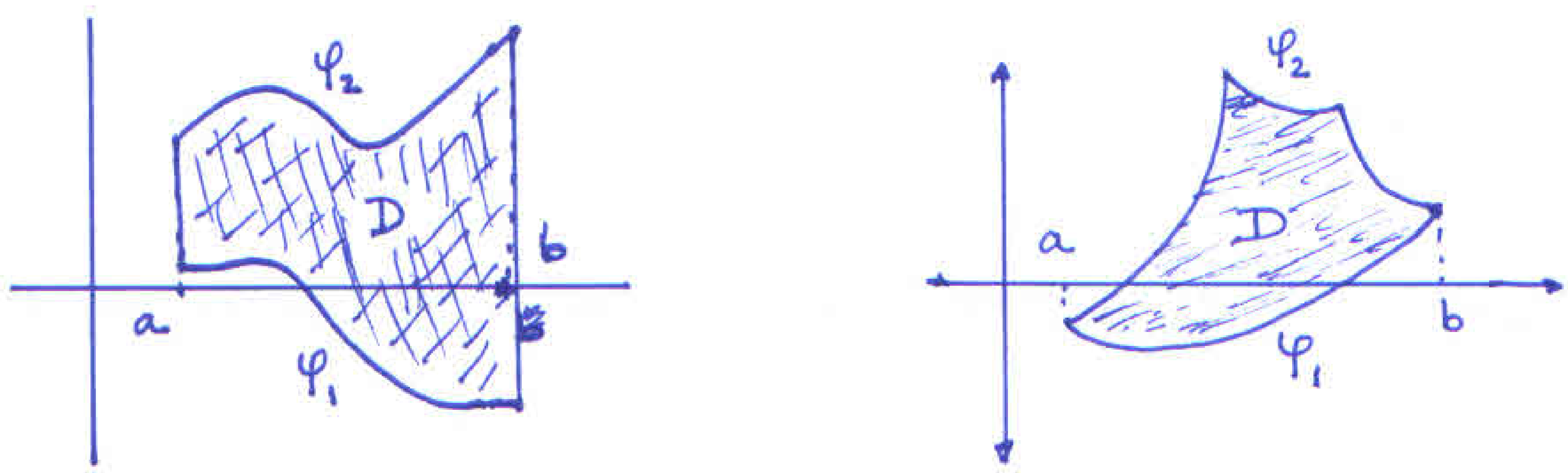
Consideraremos três tipos especiais de subconjuntos do plano que utilizaremos para estender o conceito de integral dupla sobre retângulos a regiões mais gerais.

Tipo 1

Uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ é de tipo 1 sse pode ser descrita como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

onde $\varphi_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções contínuas tais que $\forall x \in [a,b]$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$



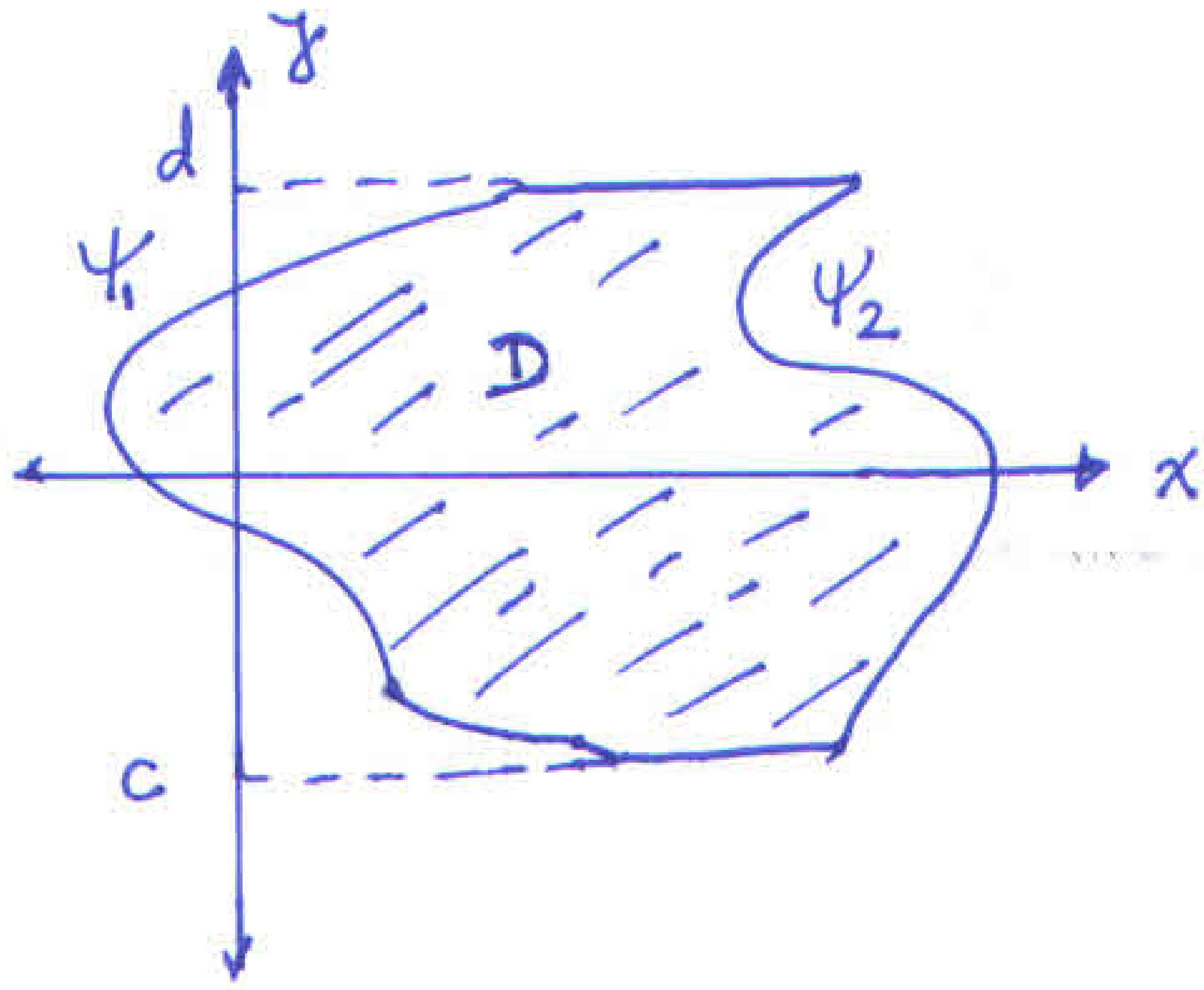
Regiões do tipo 1.

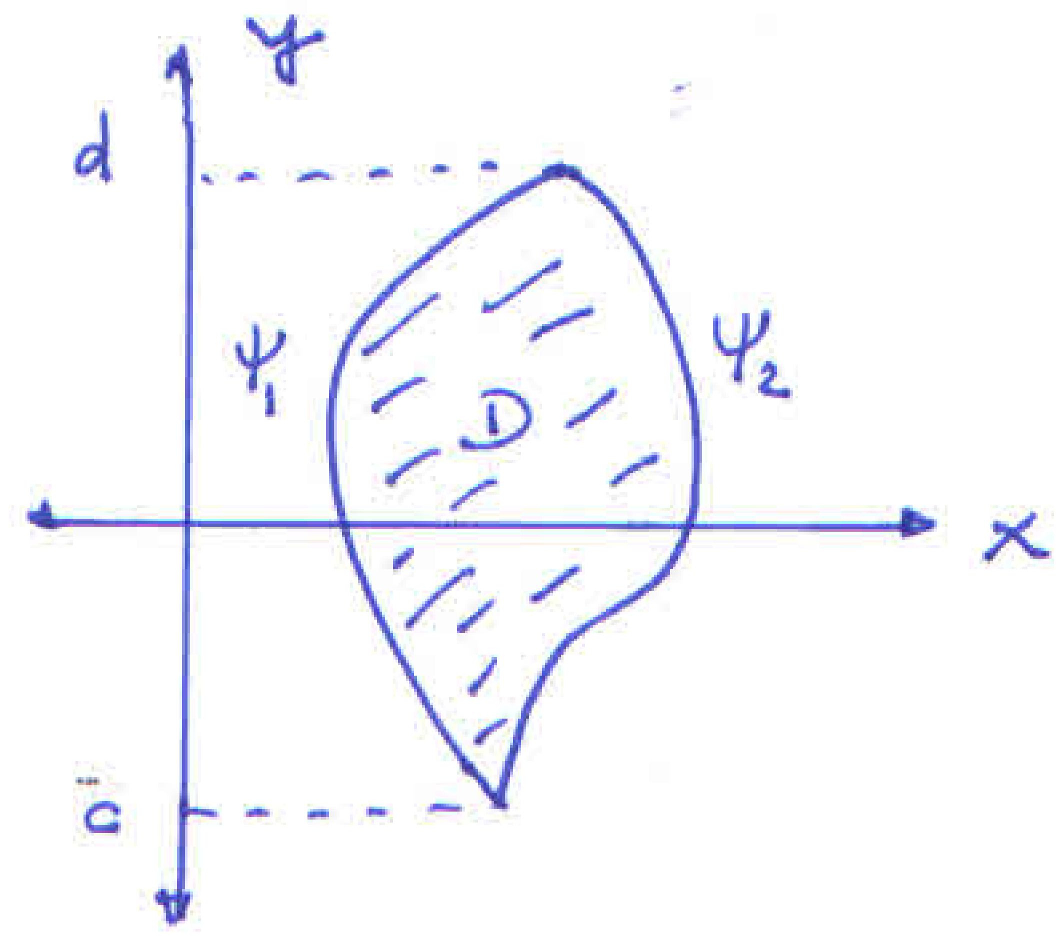
Tipo 2

D é uma região do tipo 2 sse pode ser descrita como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

onde $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $\forall y \in [c,d]$, $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$





Regiões do tipo 2

Tipo 3

D é uma região do tipo 3, sse pode ser descrita como uma região tipo 1 ou uma região tipo 2.

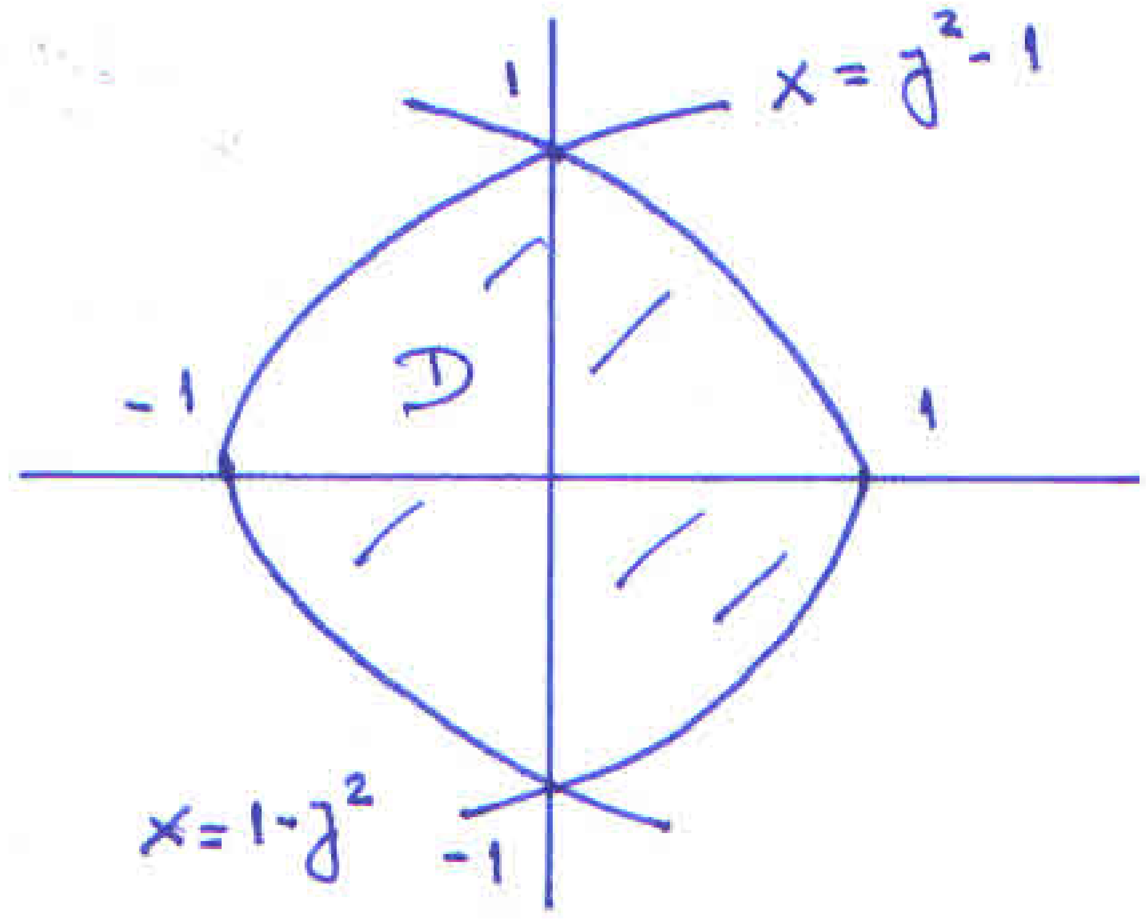
Regiões dos tipos 1, 2 e 3 serão chamadas regiões elementares.

Regiões elementares são fechadas e limitadas.

1.9. Exemplos

(a) Seja D a região limitada pelas curvas $y^2 - x = 1$ e $y^2 + x = 1$.

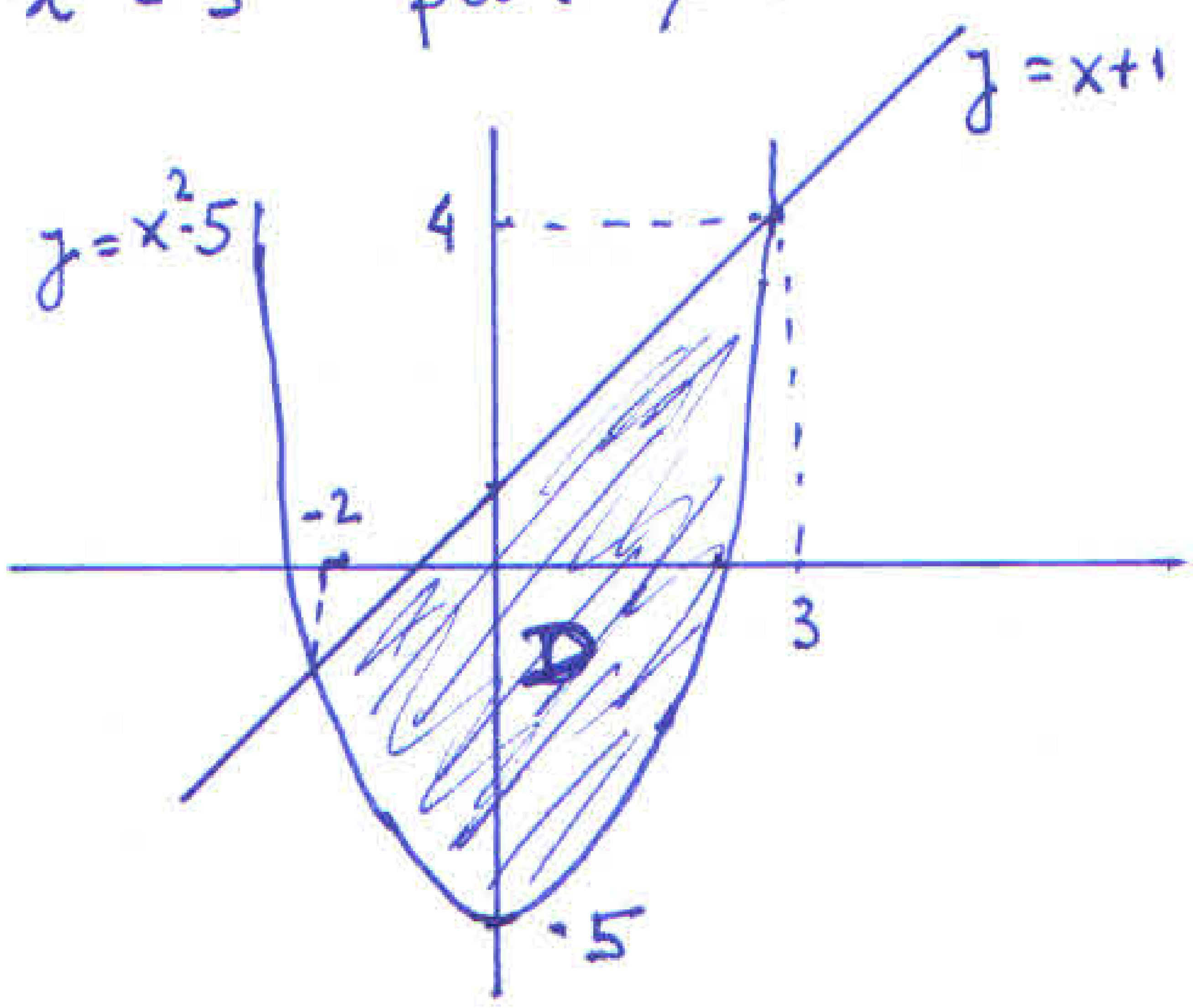
D pode ser descrita como:



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \ , \ y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2\}$$

D é uma região tipo 2.

(b) A região D limitada pelas curvas $y = x+1$ e $y = x^2 - 5$ pode ser descrita como



$x+1 = x^2 - 5$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3$, $x = -2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 3 \ , \ x^2 - 5 \leq y \leq x+1\}$$

D é região do tipo 1.

1.10. Extensão da Integral Dupla

Sejam D uma região elementar, $\mathcal{R}$ um retângulo tal que $D \subset \mathcal{R}$ e $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada.

Defina

$$\tilde{f}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathcal{R} \setminus D \end{cases}$$

$\tilde{f}$ é limitada e contínua, exceto, tal vez nos pontos de ∂D.

Se ∂D é uma união finita de curvas, que podemos pensar como gráfico de funções contínuas, então $\tilde{f}$ é uma função integrável sobre $\mathcal{R}$.

1.11. Definição

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável sobre D sse $\tilde{f}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$. Neste caso, definimos

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

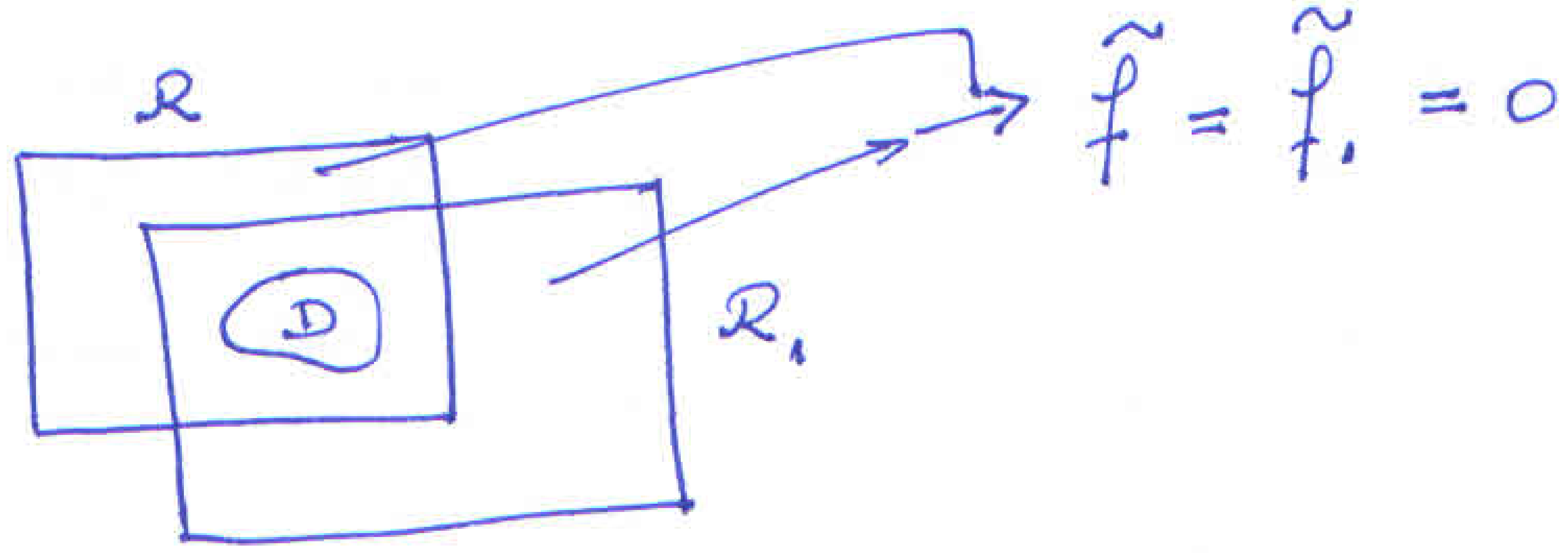
Note que $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ não depende da escolha do retângulo $\mathcal{R}$ que usamos na sua definição pois, se $\mathcal{R}_1$ é outro retângulo t.q. $D \subset \mathcal{R}_1$ e

$\tilde{f}_1 : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida como antes,

$$\tilde{f}_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathcal{R}_1 \setminus D \end{cases}$$

então $$\iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}_1} \tilde{f}_1(x,y)\,dx\,dy$$

já que $\tilde{f} = \tilde{f}_1 = 0$ onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_1$ "diferem"



1.12. <u>Proposição</u>

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada sobre D, então

(a) Se D é uma região do tipo 1,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

(b) se D é do tipo 2,

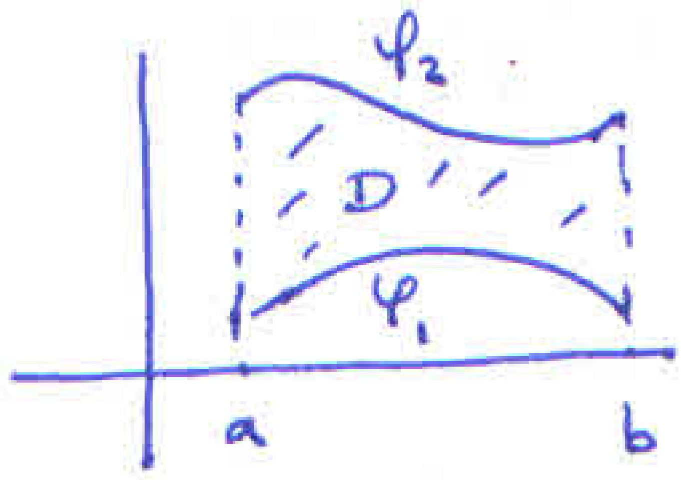
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

1.13. <u>Corolário</u>

Se $f \equiv 1$, ou seja, se $f(x,y) = 1 \ \forall (x,y) \in D$, então

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{área}(D)$$

<u>Dem</u>:



suponha, por exemplo, que D é de tipo 1, então

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] dx$$

$$= \text{área}(D)$$

1.14. <u>Corolário</u>:

Se $f(x,y) \geqslant \ \forall (x,y) \in D$, então

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \text{volume}(W)$$

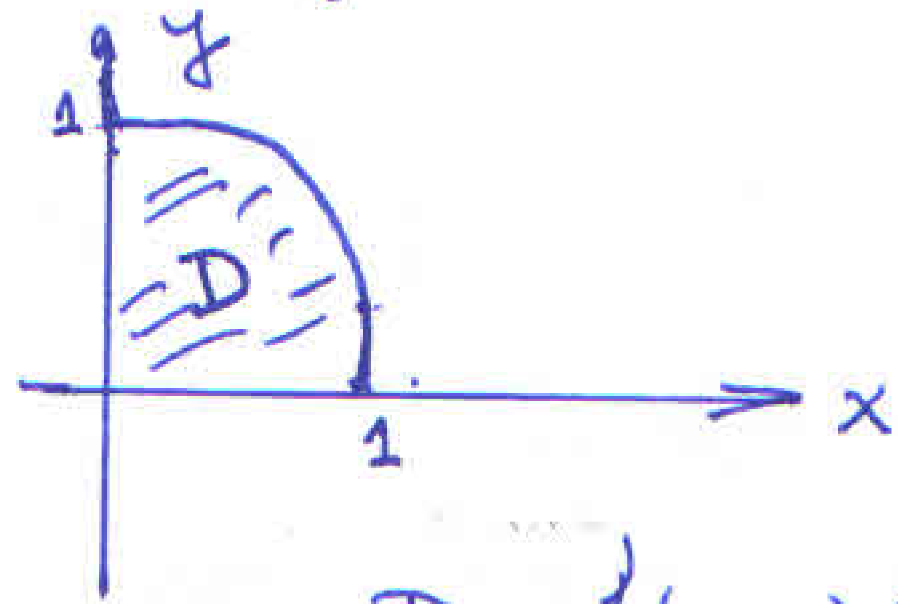
onde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}$

é o sólido limitado, por cima pelo gráfico de f e por baixo pelo domínio D.

1.15. Exemplos

(a) Calcule $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$, onde D é a região limitada por $x^2+y^2=1$, no 1º quadrante

Solução



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

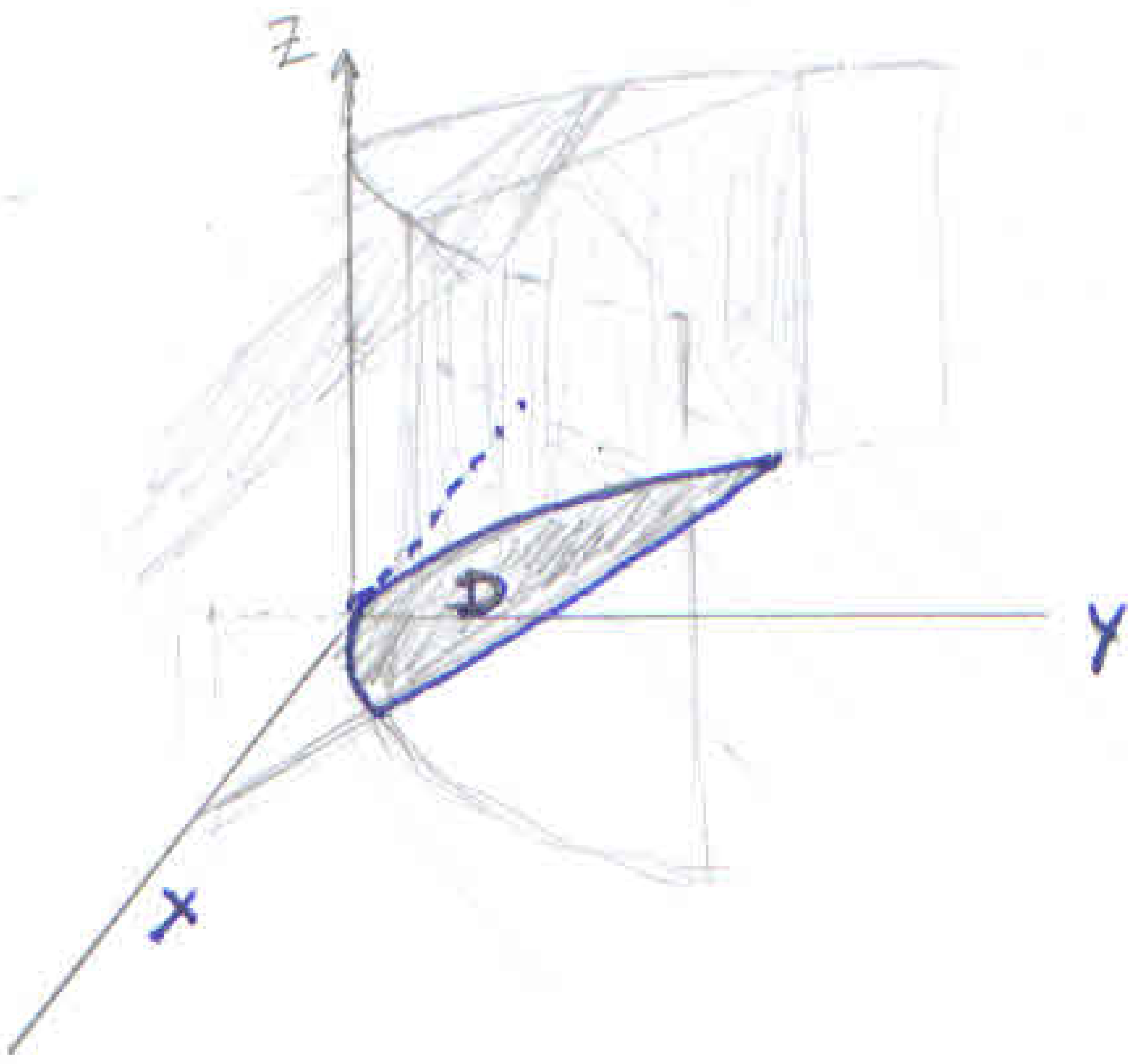
(estamos considerando D do tipo 2)

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)\,dy = 2/3$$

(b) Determine o volume do sólido limitado por $z = 2x+1$, $x = y^2$ e $x - y = 2$

Solução



$$\text{vol} = \iint_D (2x+1)\,dx\,dy$$

$$D: \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq y+2 \end{cases}$$

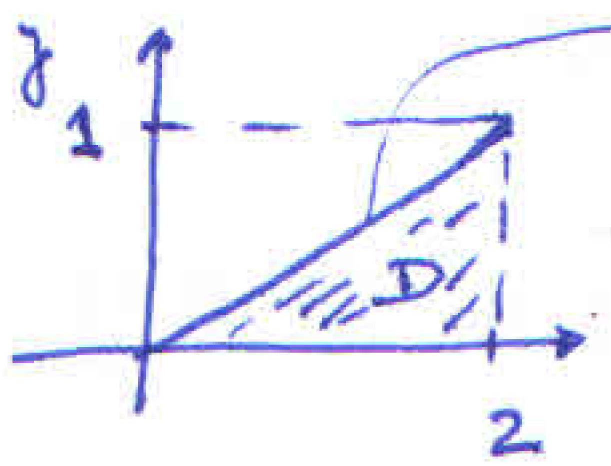
$$\text{vol} = \int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} (2x+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} (x^2+x)\Big|_{y^2}^{y+2} = \int_{-1}^{2} (5y+6-y^4)\,dy$$

$$= \frac{189}{10}$$

(c) Calcule $\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2}\,dx\,dy$

<u>Solução</u>:

Observe que não podemos integrar nessa ordem, pois $\int e^{x^2}dx$ não é uma função elementar (Lembre dos cálculos I e II). Então vamos inverter a ordem de integração



$x = 2y \longrightarrow y = x/2$

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 2y \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Escrevemos D na forma:

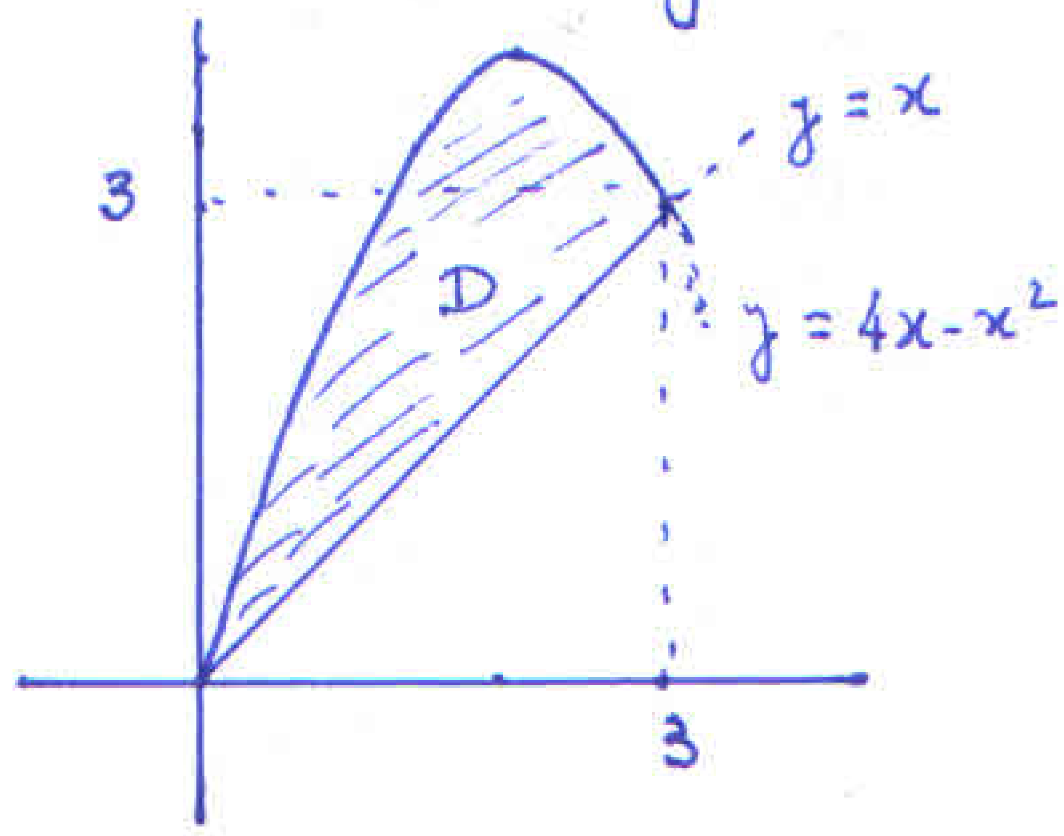
$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x/2 \end{cases}$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{x/2} 4e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 4e^{x^2} \cdot \frac{x}{2}\,dx = \int_0^2 2x\,e^{x^2}\,dx = e^{x^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1$$

(d) Calcule a área da região D limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$



$$4x - x^2 = x$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$\underline{x = 0 \ , \ x = 3}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x \leq y \leq 4x - x^2 \end{cases}$$

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^3 \int_x^{4x-x^2} dy\,dx = \int_0^3 (4x - x^2 - x)\,dx$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2} - 9 = 9/2$$

$\therefore$ área(D) = 9/2 u.a.