Cálculo III   2ª Prova   02/09/2013

---

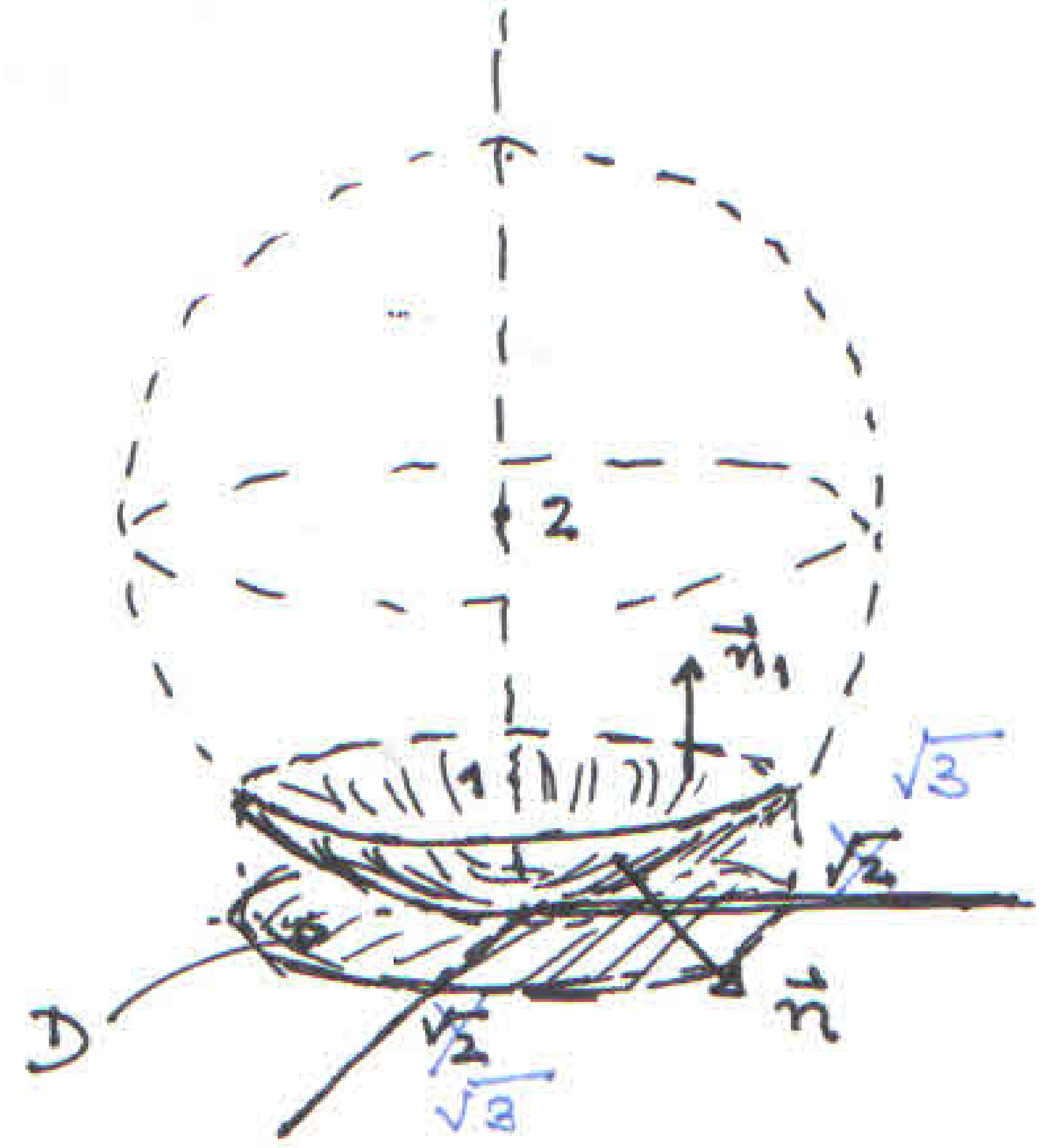
① Calcular $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}(\vec F)\cdot\vec n\, dS$, onde

$\vec F(x,y,z) = (e^x - y)\vec i + (xz + y^2)\vec j + 2yz\,\vec k$ e

$$S: \begin{cases} z \leq 1 \\ x^2+y^2+z^2-4z=0 \end{cases}$$

<u>Solução</u>

Considere $\tilde S = S \cup S_1$, onde



S_1 é dada por :

$$S_1 : \begin{cases} z = 1 \\ (x,y)\in D : x^2+y^2 \leq \cancel{2}\ 3 \end{cases}$$

S_1 orientada por $\vec n_1 = (0,0,1) = \vec k$ e

$$dS_1 = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+0+0}\,dx\,dy = dx\,dy$$

$$\underbrace{dS_1 = dx\,dy}$$

Seja W o sólido limitado por $\tilde S$ $(\partial W = \tilde S)$

Pelo Teor. de Gauss, temos

$$\iint_{\tilde S = \partial W} \operatorname{rot}(\vec F)\cdot\vec n\, d\tilde S = \iiint_W \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec F)\, dV$$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec F) = 0$ ✓✓

$$\therefore \iint_{\tilde S} \operatorname{rot}(\vec F)\cdot\vec n\, d\tilde S = 0$$

$$\therefore \quad \iint_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = - \iint_{S_1} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1\, dS_1$$

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x - y & xz + y^2 & 2yz \end{vmatrix} = (2z - x,\ 0,\ z+1)$$

(Em S_1 temos $z = 1$). Logo

$$\iint_{S_1} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1\, dS_1 = \iint_D (2-x, 0, 2)(0,0,1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D 2\, dx\, dy = 2\, \text{área}\, (D)$$

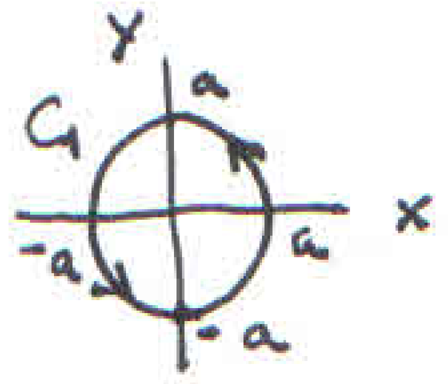
$$= 2\pi (\cancel{\sqrt{2}})^2_{\sqrt{3}} = \cancel{4}^{6}\pi$$

$$\therefore \quad \boxed{\iint_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = -\cancel{4\pi} \ -6\pi}$$

(2) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$ definido em $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Calcule:

(a) $\displaystyle\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $C_1 : x^2+y^2 = a^2$, $a>0$ orientada positivamente



Solução

Note que a região limitada por C_1 não está contida em D $\big((0,0)\notin D\big)$ ... Não podemos aplicar o Teor. de Green.

Parametrizamos C_1 por: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\text{sen}\,t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Então $dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$

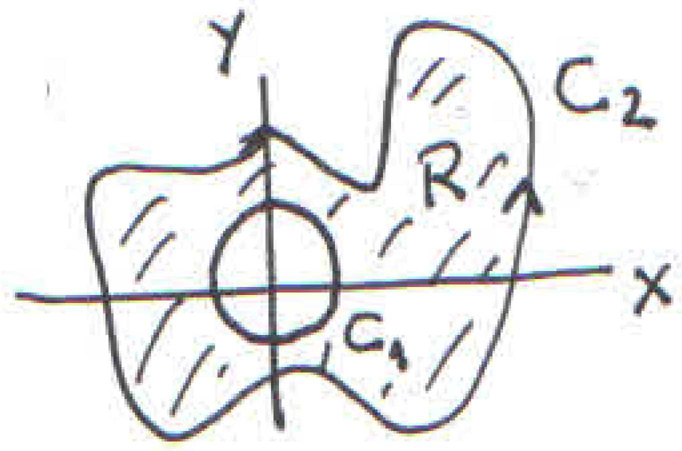
$$\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a\,\text{sen}\,t}{a^2}(-a\,\text{sen}\,t) + \frac{a\cos t}{a^2}(a\cos t)\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(b) $\displaystyle\oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C_2 é uma curva fechada, C^1 por partes, que envolve à origem e está orientada positivamente.

Solução:



Também não podemos aplicar o Teor. de Green, $(0,0)$ está na região limitada por C_2.

Não podemos usar a definição pois não conhecemos a equação da curva C_2.

Isolamos $(0,0)$ pela circunf. C_1 da parte (a)

$C_1: x^2+y^2=a^2$ com a suficientemente pequeno para que

$C_1 \cap C_2 = \phi$ (C_1 dentro da região limitada por C_2)

seja R a região limitada por C_1 e C_2, $\partial R = C_1 \cup C_2$

R não contém $(0,0)$ logo podemos aplicar o Teor de Green em R

$$\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] Q = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Logo $\displaystyle\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Daí $\displaystyle\int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

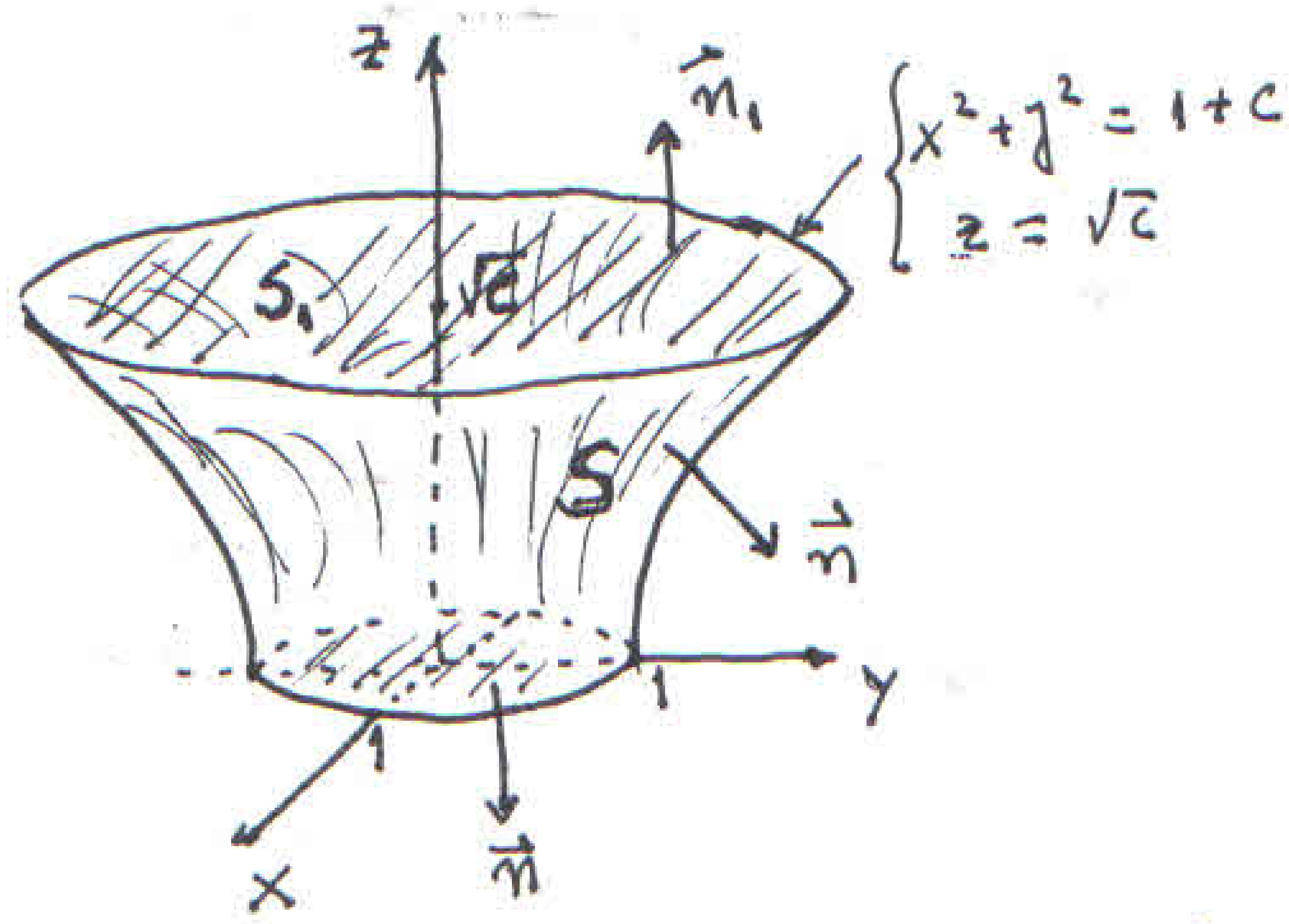
(3) $\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{cy}{2} + ze^{x}, \frac{cx}{2} - ze^{y}, xy\right)$, $c > 0$

S : $\begin{cases} \text{união do hiperboloide de uma folha } x^2+y^2-z^2=1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{c} \\ \text{com o disco } x^2+y^2 \leq 1, \ z=0 \end{cases}$

Calcular o valor de c sabendo $\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = -6\pi$

onde $\vec{n}$ é o campo normal apontando para fora de S.

Solução:



$$\left. \begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ z=\sqrt{c} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2+y^2=1+c$$

A interseção do hiperboloide com o plano $z=\sqrt{c}$ é a circunf. $x^2+y^2=1+c$ no plano $z=\sqrt{c}$

Para aplicar o Teor. de Gauss "fechamos" S com S_1,

S_1: Parte do plano $z=\sqrt{c}$ limitada pela circunf. $x^2+y^2=1+c$

S_1 : $\begin{cases} z=\sqrt{c} \\ x^2+y^2 \leq 1+c \end{cases}$

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ a região t.q. $\partial W = S \cup S_1$.

Pelo Teor. de Gauss, temos

$$\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = \iiint_W div\left(rot(\vec{F})\right) dV$$

$div\left(rot(\vec{F})\right) = 0$ e $\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = -6\pi$

então
$$\iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = 6\pi \quad \ldots\ldots (*)$$

Por outro lado,
$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\frac{cy}{2} + ze^x & \frac{cx}{2} - ze^y & xy \end{vmatrix}$$

$$= \left(x + e^y, e^x - y, \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right)$$

$$= (x + e^y, e^x - y, c)$$

$\vec{n}_1 = \vec{k} = (0,0,1)$

$dS_1 = dx\,dy$

$$S_1 : \begin{cases} z = \sqrt{c} \\ (x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{1+c}\right)^2 \end{cases}$$

logo
$$\iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = \iint_D (x + e^y, e^x - y, c) \cdot (0,0,1) \, dx\,dy$$

$$= \iint_D c \, dx\,dy = c \cdot \text{área}(D) = c \cdot \pi (1+c)$$

Portanto, substituindo em $(*)$.

$$\pi c (1+c) = 6\pi, \quad \text{donde} \quad \underline{c = 2} \quad \text{ou} \quad \underline{c = -3}$$

e como $c > 0$, temos $\underline{c = 2}$

④ $S: \ \varphi(u,v) = (u, v, 2u+v)$, $(u,v) \in D: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}$

$\delta(x,y,z) = x+y+z$ (densidade)

Determinar a massa de S.

Solução:

$$M = \iint_S \delta(x,y,z)\,dS = \iint_S (x+y+z)\,dS$$

$$= \iint_D (u+v+(2u+v)) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$$= \iint_D (3u+2v) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (1,0,2) \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (0,1,1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (-2,-1,1) \quad , \quad \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Logo $M = \sqrt{6} \iint_D (3u+2v)\,du\,dv = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^u (3u+2v)\,dv\,du$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 (3uv + v^2) \Big|_{v=0}^{v=u} du = \sqrt{6} \int_0^1 (3u^2+u^2)\,du = \sqrt{6} \int_0^1 4u^2\,du$$

$$= 4\sqrt{6}\, \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$