UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 6 : Cálculo III (2012.2)
Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 *Os campos abaixo são conservativos. Determine uma função potencial para cada um deles.*

(a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy^2 - y^3)\overrightarrow{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\overrightarrow{j}$; *Resp.* $\varphi(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y$.

(b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 2xy\overrightarrow{i} + (x^2 + z\cos yz)\overrightarrow{j} + y\cos yz\overrightarrow{k}$; *Resp.* $\varphi(x,y,z) = x^2y + \sin yz$.

(c) $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^{x+y} + 1)\overrightarrow{i} + e^{x+y}\overrightarrow{j}$; *Resp.* $\varphi(x,y) = e^{x+y} + x$.

(d) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j}$; *Resp.* $\varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2$.

(e) $\overrightarrow{F}(x,yx) = (6xy^2 + 2z^2)\overrightarrow{i} + 9x^2y^2\overrightarrow{j} + (4xz + 1)\overrightarrow{k}$;
Resp.$\varphi(x,y,z) = x^2y^3 + 2xz^2 + z$.

(f) $\overrightarrow{F}(x,y) = (\cos(xy) - xy\sin(xy))\overrightarrow{i} - x^2\sin(xy)\overrightarrow{j}$; *Resp.* $\varphi(x,y) = x\cos(xy)$.

(g) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = yze^{xyz}\overrightarrow{i} + xze^{xyz}\overrightarrow{j} = xye^{xyz}\overrightarrow{k}$. *Resp.* $\varphi(x,y,z) = e^{xyz}$.

2 *Mostre que a integral,* $\int_A^B (2x+y^3)dx + (3xy^2+4)dy$ *independe do caminho ligando os pontos* A *e* B*. Calcule essa integral no caso* $A = (0,1)$ *e* $B = (2,3)$.

Note que, o campo $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x+y^3)\overrightarrow{i} + (3xy^2+4)\overrightarrow{j}$ *é* C^1 *em* $\mathbb{R}^2$*, que* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$*, e que* $\mathbb{R}^2$ *é simplesmente conexo. Para calcular a integral note que o campo* $\overrightarrow{F}$ *é conservativo. Resp. 66.*

3 *Use o teorema de Green para calcular a área da região limitada pela(s) curva(s) dadas.*

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; *(uma elipse)* *Resp.* πab.

(b) $y = x^2$ *e* $x = y^2$; *Resp.* $\frac{1}{3}$.

(c)

4 *Calcule, usando o teorema de Green, as integrais abaixo.*

(a) $\oint_C e^x \sin y dx + (x + e^x\cos y)dy$*, onde* C *é a elipse* $3x^2 + 8y^2 = 24$ *orientada no sentido anti-horário.* *Resp.* $2\sqrt{6}\pi$.

(b) $\oint_C 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx + (\ln(x^2+y^2) + x)\,dy$*, onde* C *é a curva parametrizada por* $\alpha(t) = (4 + 2\cos(t), 4 + \sin t)$*, com* $0 \leq t \leq 2\pi$. *Resp.* 2π.

5 *O seguinte exercício fornece uma maneira de calcular a área de um poligono qualquer no plano.*

(a) *Mostre que* $\int_C xdy - ydx = a_1b_2 - a_2b_1$*, onde* C *é o segmento de reta com ponto inicial* (a_1,b_1) *e ponto final* (a_2,b_2);

(b) *Considere o poligono* $\mathcal{P}$ *de vértices* $(a_1,b_1),(a_2,b_2),...,(a_n,b_n)$ *(ordenados no sentido anti-horário). Mostre que a área de* $\mathcal{P}$ *é dada pela metade de*

$$(a_1b_2 - a_2b_1) + (a_2b_3 - a_3b_2) + ... + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}).$$