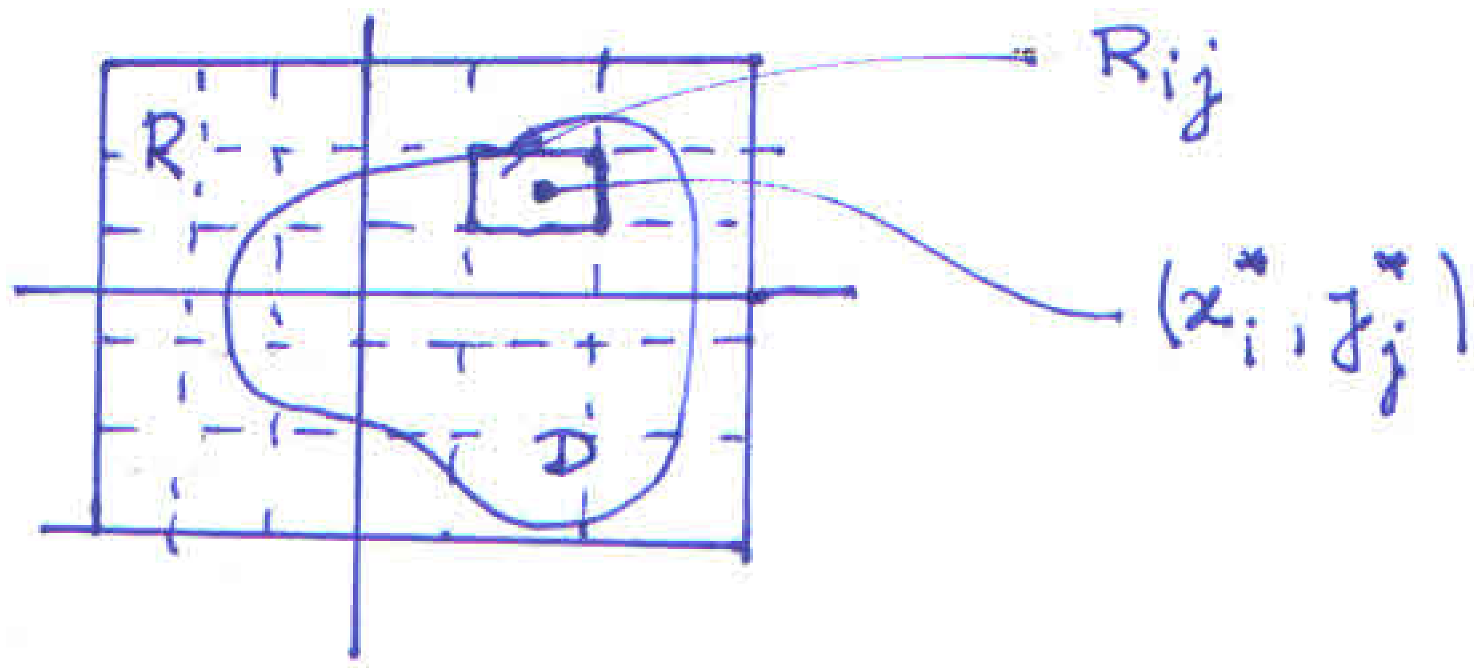
Aplicações da Integral Dupla

Massa

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região compacta que representa uma lâmina e $\delta : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva que representa a densidade superficial de massa (massa por unidade de área)



Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo que contém D. Divida R em n^2 subretângulos R_{ij} e seja $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$.

A massa M de D é aproximada pela soma

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*, y_j^*) \; \Delta A$$

onde definimos $\delta(x_i^*, y_j^*) = 0$ se $(x_i^*, y_j^*) \notin D$

Assim, é razoável definir a massa M de D como

$$M := \iint_D \delta(x,y) \, dx \, dy$$

Note que se $\delta(x,y) \equiv K = \text{cte}$ então $M = K \cdot A(D)$

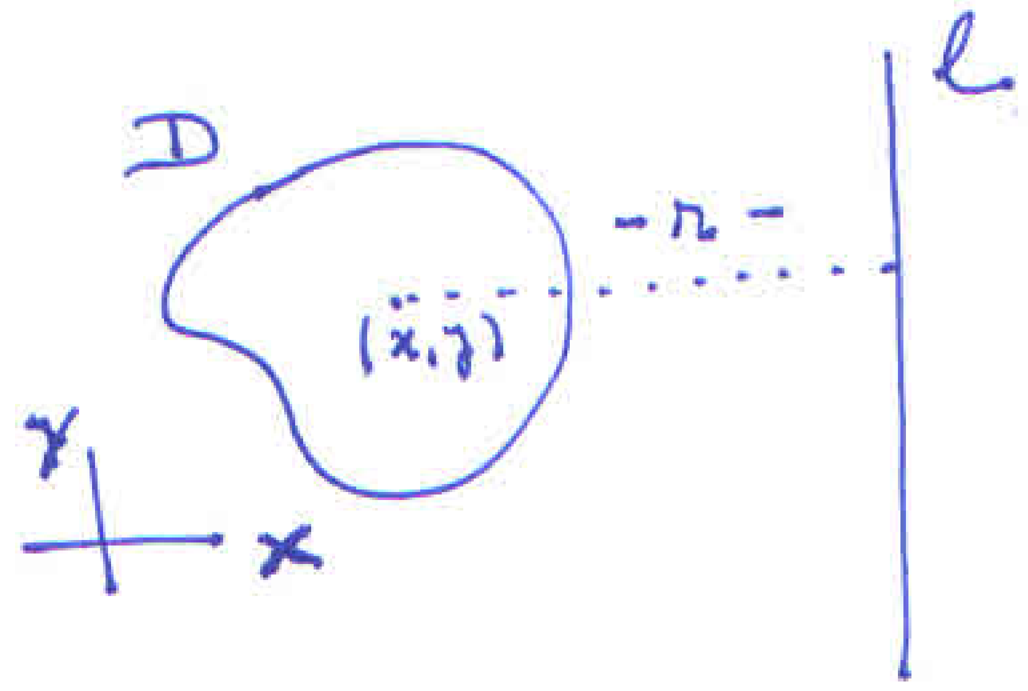
Neste caso, dizemos que a lâmina D é homogênea.

Momento de Inércia

O momento de inércia da lâmina D em relação a um eixo ℓ é dado por

$$I_\ell := \iint_D r^2(x,y)\,\delta(x,y)\,dx\,dy$$

onde $r(x,y)$ é a distância de (x,y) ao eixo ℓ



Por exemplo, os momentos de inércia de D em relação aos eixos X e Y são dados respectivamente por

$$I_X = \iint_D y^2\,\delta(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad I_Y = \iint_D x^2\,\delta(x,y)\,dx\,dy$$

$I_X + I_Y = \iint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy$ é chamado de momento de inércia polar em relação à origem

Centro de Massa

1. Considere um sistema finito de partículas $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, ..., $P_n = (x_n, y_n)$; com massas $m_1, \dots, m_n$ respectivamente. Os momentos de massa deste sistema em relação aos eixos X e Y são definidos por:

$$M_x := \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{e} \quad M_y := \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

O centro de massa do sistema corresponde a um ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ que se comporta como se a massa total $M := \sum_{i=1}^{n} m_i$ do sistema se concentra-se toda neste ponto. Assim,

$$M\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad M\bar{y} = M_x$$

ou

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{e}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

#

2. Se ao invés de considerarmos um sistema finito de partículas consideramos uma lâmina plana D com densidade de massa dada por uma função contínua e positiva $\delta(x,y)$ então definimos

$$M_x := \iint_D y\,\delta(x,y)\,dA \qquad \text{e}$$

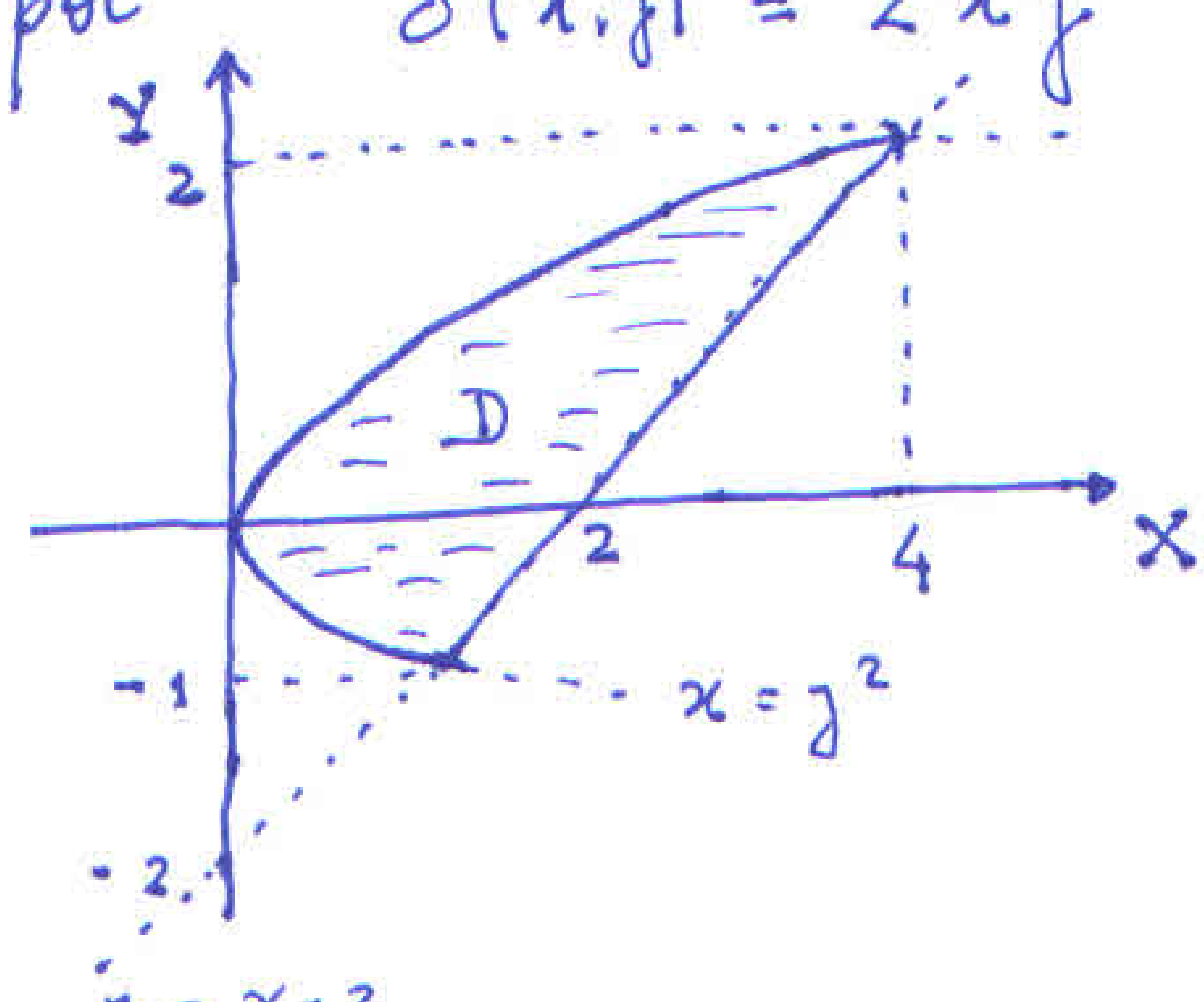
$$M_y := \iint_D x\,\delta(x,y)\,dA \, .$$

O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ da lâmina D é dado por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

Exemplo

Determine o centro de massa da região D limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x - y = 2$, sendo a densidade dada por $\delta(x,y) = 2xy$



$$M = \iint_D \delta(x,y)\,dA = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} 2xy\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2 y \Big|_{y^2}^{2+y} dy = \int_{-1}^{2} \left(y(2+y)^2 - y \cdot y^4 \right) dy$$

$$= \ldots = \frac{45}{4}$$

O centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ é dado por

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA}{M} \quad e \quad \overline{y} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA}{M}$$

$$\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} 2x^2 y\,dx\,dy = \ldots\ldots$$

$$= 603/20$$

$$\iint_D y\,\delta(x,y)\,dA = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{2+y} 2xy^2\,dx\,dy = \ldots$$

$$= 531/35$$

Daí

$$\overline{x} = \frac{603/20}{45/4} = \frac{201}{75} \quad , \quad \overline{y} = \frac{531/35}{45/4} = \frac{236}{175}$$

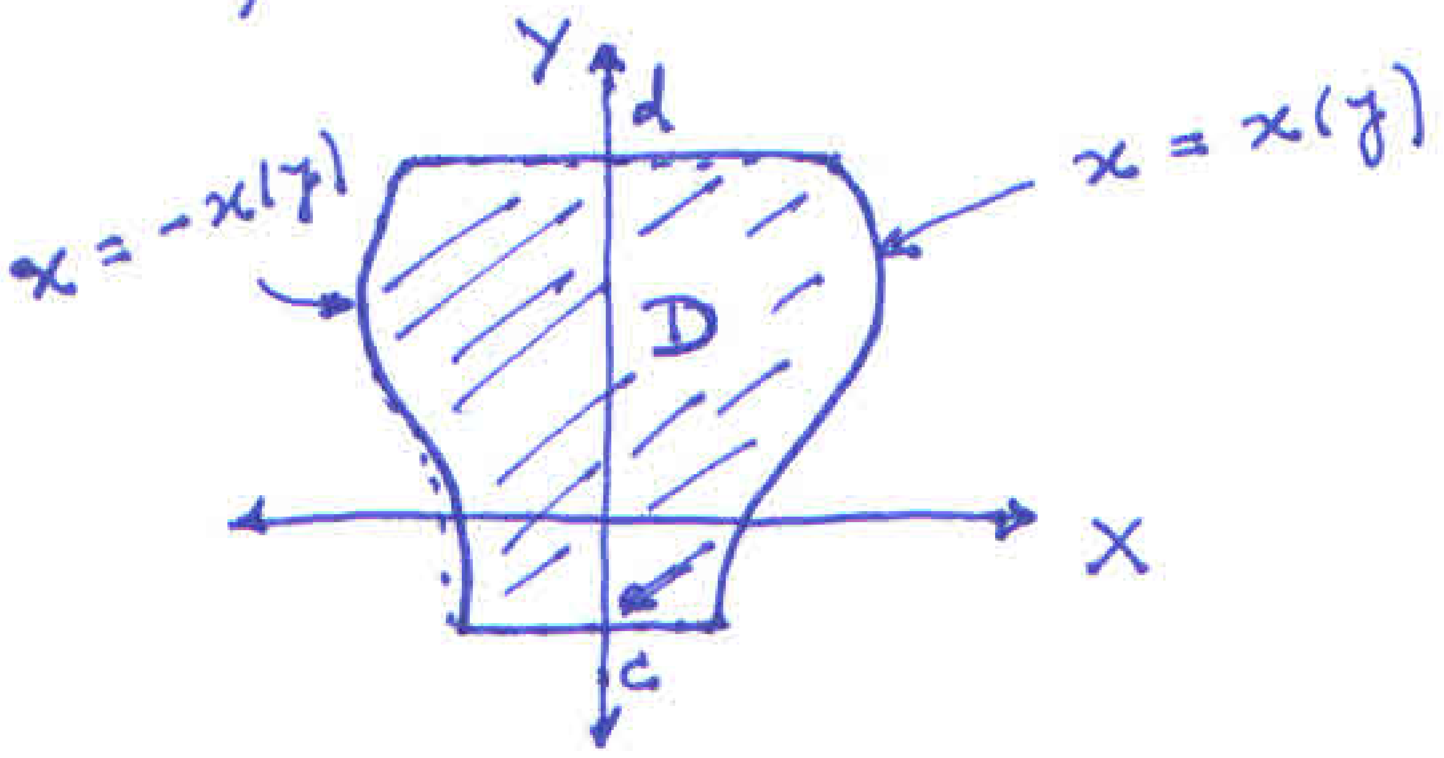
Simetria em Integrais Duplas

Em Cálculo II (acho) apreenderam (acredito) que se $f = f(x)$ é uma função impar, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

No caso de integrais duplas temos o seguinte:

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio simétrico em relação, por exemplo, ao eixo Y



D é limitado à direita pela curva $x = x(y)$ e à esquerda pela curva $x = -x(y)$

Seja $f = f(x,y)$ uma função contínua simétrica na variável x (i.e. $f(-x,y) = -f(x,y)$). Então

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

De fato, neste caso,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_{-x(y)}^{x(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_c^d 0 \cdot dy = 0$$

Analogamente, se o domínio D é simétrico em relação ao eixo X e $f(x,y)$ é ímpar na variável Y (i.e. $f(x,-y) = -f(x,y)$), então $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$

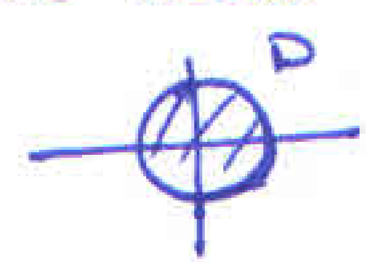
<u>Exemplo</u>:

Calcule

$$I = \iint_D \left[(x^2+y^2)\,\text{sen}\,y + x^3y^2\right] dx\,dy$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2 \ (r>0)\}$

(D é um círculo de raio r com centro na origem)



<u>Solução</u>:

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,\text{sen}\,y\,dx\,dy + \iint_D x^3y^2\,dx\,dy$$

<u>Note que</u>: ① $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\text{sen}\,y$ é ímpar na variável y. e D é simétrico em relação ao eixo X.

Logo $$\iint_D (x^2+y^2)\,\text{sen}\,y\,dx\,dy = 0$$

② $g(x,y) = x^3y^2$ é ímpar na variável x e D é simétrico em relação ao eixo Y, logo

$$\iint_D x^3y^2\,dx\,dy = 0$$

Assim, $I = 0$ //