Questão 1 [2,0 pt]

Divide-se um arame de comprimento L em duas partes. Uma das partes estará destinada para construir um quadrado e a outra parte para construir um triângulo equilátero. Qual é o comprimento de cada parte para que a soma das áreas das figuras obtidas seja a menor possível? É possível encontrar uma divisão tal que a soma das áreas do quadrado e do triângulo equilátero seja máxima? Justifique.

Solução

Denotemos por x o lado do quadrado e por y o lado do triângulo equilátero. A soma das áreas das duas figuras é

$$A = x^2 + y^2\frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{1}$$

Seja L o comprimento do arame. Temos

$$L = 4x + 3y,$$

de onde segue

$$y = \frac{L-4x}{3}. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), temos

$$A(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(L-4x)^2 = \left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}Lx + \frac{\sqrt{3}}{36}L^2.$$

Como x e y são grandezas positivas, devemos ter

$$x \in (0, L/4).$$

Note que a obrigatoriedade da divisão em duas partes impede que o intervalo da definição de x seja fechado em qualquer um dos extremos. Como $A(x)$ é uma função quadrática com coeficiente lider positivo, $A(x)$ assume um valor mínimo em $\mathbb{R}$ no ponto

$$x_0 = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}L}{2\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)} = \frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}.$$

Como

$$\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}} < \frac{L}{4} \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} < 1,$$

vemos que $x_0 \in (0, L/4)$. Logo x_0 é o ponto de mínimo para $A(x)$. Assim, os comprimentos que resultam em área mínima são

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}L,\ y_0 = \frac{L-4x_0}{3} = \frac{3}{9+4\sqrt{3}}L.$$

O valor máximo deveria ser atingido em um dos extremos do intervalo, mas como já observamos, nos extremos do intervalo não temos divisão do arame em duas partes. Logo não há uma divisão que nos dê uma área máxima.

Questão 2 [2,0 pt]

(a) Usando o fato de que $x^4 = (x^4 + 1) - 1$, mostre que

$$x^{2014} = ((x^4 + 1) - 1)^{503} \cdot x^2 = [(x^4 + 1) \cdot q(x) + (-1)^{503}] \cdot x^2$$

para algum polinômio $q(x)$. Conclua que o resto da divisão de x^{2014} por $x^4 + 1$ é $-x^2$.

(b) Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 2x^{2014} + 15x^5 + 9x - 2014$ pelo polinômio $d(x) = x^4 + 1$.

Sugestão para o item (b): Use o fato que o resto da divisão de $p_1(x) + p_2(x)$ por $d(x)$ é igual à soma $r_1(x) + r_2(x)$ dos restos $r_1(x)$ e $r_2(x)$ das divisões de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por $d(x)$, respectivamente.

Solução

(a) Usando a expansão pelo Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned} x^{2014} &= x^{4\times 503} \cdot x^2 = ((x^4 + 1) - 1)^{503} \cdot x^2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{503} \binom{503}{k} (x^4 + 1)^k (-1)^{503-k} \right) \cdot x^2 \\ &= \left((-1)^{503} + (x^4 + 1) \sum_{k=1}^{503} \binom{503}{k} (x^4 + 1)^{k-1} (-1)^{503-k} \right) \cdot x^2 \\ &= \left((-1)^{503} + (x^4 + 1) q(x) \right) \cdot x^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$x^{2014} = (x^2 q(x))(x^4 + 1) - x^2,$$

onde $q(x) = \sum_{k=1}^{503} \binom{503}{k} (x^4 + 1)^{k-1} (-1)^{503-k}$. Portanto $-x^2$ é o resto da divisão de x^{2014} por $x^4 + 1$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} 2x^{2014} + 15x^5 + 9x - 2014 &= 2(x^2 q(x))(x^4 + 1) - 2x^2 + 15x(x^4 + 1) - 15x + 9x - 2014 \\ &= (2x^2 q(x) + 15x)(x^4 + 1) - 2x^2 - 6x - 2014. \end{aligned}$$

Assim, o resto da divisão de $p(x)$ por $x^4 + 1$ é $r(x) = -2x^2 - 6x - 2014$.

Questão 3 [2,0 pt]

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Mostre que existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Solução

Teorema 8.8 do livro-texto.

Questão 4 **[2,0 pt]**

Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população de uma cidade fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo-se que a população de uma cidade era de 750 mil habitantes em 1990 e 1 milhão de habitantes em 2010, calcule:

(a) A população estimada para 2020;

(b) Em que ano a população da cidade alcançará a marca de 2 milhões de habitantes?

Observação: Caso julgue necessário, use as igualdades aproximadas a seguir: $\ln 4 = 1,386$, $\ln 3 = 1,098$, $e^{0,144} = 1,154$

Solução

Denotemos por a o fator de multiplicação e por $P(t)$ a população no ano t. Fixado um ano t_0, temos

$$P(1+t_0) = aP(t_0),\ P(2+t_0) = aP(1+t_0) = a^2P(t_0), \cdots, P(n+t_0) = a^nP(t_0).$$

Fazendo $t = t_0 + n$, temos

$$P(t) = a^{t-t_0}P(t_0).$$

(a) Temos

$$P(2010) = a^{2010-1990}P(1990) \Rightarrow 1\ 000\ 000 = a^{20} \times 750\ 000 \Rightarrow a^{20} = \frac{1\ 000\ 000}{750\ 000} = \frac{4}{3}.$$

Isto implica

$$\begin{aligned}\ln a &= \frac{1}{20}(\ln 4 - \ln 3)\\ &= \frac{1}{20}(1,386 - 1,098)\\ &= 0,0144.\end{aligned}$$

Usando esses dados, temos

$$\begin{array}{rcccl} P(2020) &=& a^{2020-2010}P(2010) &=& a^{10} \times 1\ 000\ 000\\ &=& (e^{\ln a})^{10} \times 1\ 000\ 000 &=& e^{10\times\ln a}1\ 000\ 000\\ &=& e^{0,144} \times 1\ 000\ 000 &=& 1\ 154\ 000, \end{array}$$

isto é, a população em 2020 será de 1 154 000 habitantes.

(b) Denote por t o ano em que a população alcançará a marca de 2 milhões de habitantes. Temos

$$P(t) = 2\ 000\ 000 = a^{t-2010}P(2010) = a^{t-2010} \times 1\ 000\ 000,$$

isto é,

$$a^{t-2010} = 2 \Rightarrow (t-2010)\ln a = \ln 2.$$

Isto implica

$$t = 2010 + \frac{\ln 2}{\ln a} = 2010 + \frac{\ln 4}{2\ln a} = 2010 + \frac{0,693}{0,0144} \approx 2010 + 48,1.$$

Assim a população atingirá 2 milhões de habitantes no início de 2058.

Questão 5 **[2,0 pt]**

Resolva a equação

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Solução

Denote por $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{2}\right)$ e $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{2}\right)$. Desta forma, temos $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Calculando a tangente desse ângulo e aplicando a fórmula da tangente da soma de dois ângulos, temos

$$\begin{aligned}
1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \\
&= \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)} \\
&= \frac{\left(\frac{1+x}{2}\right)+\left(\frac{1-x}{2}\right)}{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1-x^2}{4}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$1-\frac{1-x^2}{4} = 1 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Note que isso implica $(\alpha,\beta) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ ou $(\alpha,\beta) = (0, \frac{\pi}{4})$.