



Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
<http://www.mat.ufpb.br>

2ª Prova: Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

20 de fevereiro de 2025

Prof: Pedro A. Hinojosa

Nome: _____ Matrícula: _____

Obs: Esta prova vale 5 pontos.

1 (2,0 pts.) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, verifique que eles determinam um paralelepípedo e calcule o seu volume.

2 (2,0 pts.) Considere os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (-1, 0, -3)$ e $C = (2, 1, 0)$.

(a) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo;

[(b)] Calcule a área do triângulo $\triangle ABC$;

3 (1,0 pto.) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam uma base ortogonal positiva. Sabendo que $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ e $|\vec{c}| = 3$, calcule o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Boa Prova

① $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ determinam um paralelepípedo se e só se eles são l.i.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 0 + 0 - 2 + 0 - 8 + 3 = -7 \neq 0$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. logo determinam um paralelepípedo.

~~#~~ ~~o~~ O volume desse paralelepípedo é:

$|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|$ valor absoluto do produto misto.

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = -7$$

$$\therefore \text{volume} = |-7| = \underline{\underline{7}}$$

② $A = (1, 2, 1)$, $B = (-1, 0, -3)$, $C = (2, 1, 0)$

(a) A , B e C são vértices de um triângulo

(b) calcular área(ΔABC)

(a) A , B e C são vértices de um triângulo se e só se eles não são colineares

$$\vec{AB} = [-2, -2, -4]$$

$$\vec{AC} = [1, -1, -1]$$

$\vec{AB} \not\parallel \vec{AC}$, Logo A, B e C não são colineares.

$\therefore$ A, B e C são vértices de um triângulo

$$(b) \text{ área } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{4 + 36 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\text{área } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{14} = \sqrt{14}$$

③ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ base ortogonal positiva.

$$\|\vec{a}\| = 6, \|\vec{b}\| = 5 \text{ e } \|\vec{c}\| = 3.$$

calcular $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (o produto misto de $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$)

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ base ortogonal} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{c}$$

e como a base é positiva, $\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0^\circ$

$$\therefore \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 1$$

$$\therefore [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \xrightarrow{3} 3 \\ = 3 \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad (\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2)$$

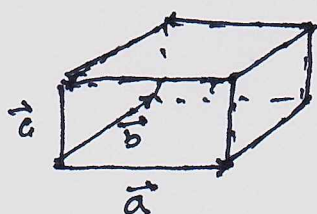
$$\therefore \operatorname{sen} \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = 1$$

Logo

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = 6 \cdot 5 = 30$$

Dai

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 30 \cdot 3 = \underline{\underline{90}}$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam um paralelepípedo (cubo)

cujos volume é $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$

$$\text{Dai } |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90.$$

e como a base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é positiva

$$\underline{\underline{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 90}}$$