UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

Cálculo III - 3^a Prova

João Pessoa, 31 de março de 2025

Professor: Pedro A. Hinojosa

Nome: ____________________________________Matrícula: ____________________

Questão 1 *(2.5 pts) Seja C a curva interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$, $z \geq 0$, com o plano $x - y = 0$. Determine o valor de a sabendo que $\int_C xyzds = 27$.*

Questão 2 *(2.5 pts.) Calcule:* $\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$. *A curva C é a elipse* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Questão 3 *(2.5 pts) Determine o trabalho realizado pelo campo $\overrightarrow{F} = x\,\overrightarrow{i} + (x^3 + 3xy^2)\,\overrightarrow{j}$ em uma partícula que inicialmente está no ponto $(-2, 0)$, se move ao longo do eixo X para o ponto $(2, 0)$ e então se move ao longo da semi circunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial.*

Questão 4 *(2.5 pts) Considere o campo $\overrightarrow{F} = e^z\,\overrightarrow{i} + 2yz\,\overrightarrow{j} + (xe^z + y^2)\,\overrightarrow{k}$*

(a) Mostre, justificando sua resposta, que $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo;

(b) Determine um potencial para o campo $\overrightarrow{F}$;

(c) Calcule a integral de linha $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, onde C é a curva parametrizada por $\alpha : [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (\cos t, sen\, t, t)$

Questão 5 (Extra) *(1.0 pts) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Verifique que:*

$$div(f\nabla f) = f\Delta f + ||\nabla f||^2.$$

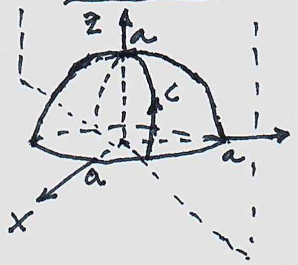
Boa Prova !!

C3 2024.2 Prova 3

(1) $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2, & a>0 \\ z \geq 0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$\int_C xyz\,ds = 27$ $\qquad$ $a = ?$

Solução:



$x = y$

$2x^2 + z^2 = a^2$

$(\sqrt{2}x)^2 + z^2 = a^2$

$\begin{cases} \sqrt{2}x = a\cos t \\ z = a\,\text{sen}\,t \end{cases}$

Podemos parametrizar a curva C por

$$\alpha(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, a\,\text{sen}\,t\right), \quad t \in [0, \pi]$$

Temos:

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\text{sen}\,t, -\frac{a}{\sqrt{2}}\text{sen}\,t, a\cos t\right)$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \frac{a^2}{2}\text{sen}^2 t + \frac{a^2}{2}\text{sen}^2 t + a^2\cos^2 t$$

$$= a^2\text{sen}^2 t + a^2\cos^2 t = a^2$$

$$\therefore \|\alpha'(t)\| = a$$

$$\int_C xyz\,ds = \int_0^\pi \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \cdot a\,\text{sen}\,t \cdot a\,dt$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^\pi \cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^\pi = -\frac{a^4}{6}(-1-1) = \frac{2a^4}{6} = \frac{a^4}{3}$$

$$\int_C xyz\,ds = 27 \Rightarrow \frac{a^4}{3} = 27$$

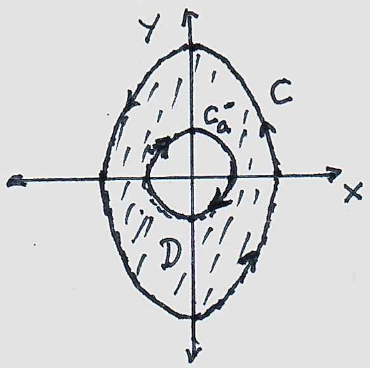
$$\Rightarrow a^4 = 3\cdot 27 = 3^4$$

$$\therefore \underline{\underline{a = 3}} \qquad (a>0)$$

② Calcular $\displaystyle\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

$C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

solução



$C_a: x^2+y^2 = a^2$ $\quad (0<a<2)$

Seja D o domínio limitado por $C \cup C_a$ (orientado positivamente)

$\partial D = C \cup C_a^-$

$P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\quad Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

Sabemos que:

i) $\displaystyle\oint_{C_a} P\,dx + Q\,dy = 2\pi$ $\qquad$ Feito em aula (mais de uma vez)

ii) $Q_x - P_y = 0$

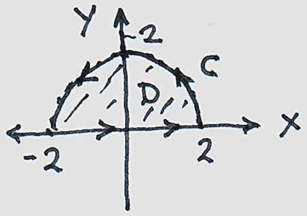
Green (Em D)

$$0 = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \oint_C P\,dx + Q\,dy + \underbrace{\int_{C_a^-} P\,dx + Q\,dy}_{-2\pi}$$

Daí, $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = 2\pi$

(3) $\vec{F} = x\vec{i} + (x^3 + 3xy^2)\vec{j}$



$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$$

Solução:

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ o domínio limitado por C ($\partial D = C$)
(Note que D está orientado positivamente)

Green

$$\int_{C = \partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D (Q_x - P_y)\,dA$$

$$\left.\begin{array}{l} P = x \Rightarrow P_y = 0 \\ Q = x^3 + 3xy^2 \Rightarrow Q_x = 3x^2 + 3y^2 \end{array}\right\} Q_x - P_y = 3(x^2+y^2)$$

Coord. Polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad x^2+y^2 = r^2 \quad dxdy = r\,dr\,d\theta$

$$D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D (Q_x - P_y)\,dA = \int_D 3(x^2+y^2)\,dA$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^\pi r^2 \cdot r\,d\theta\,dr = 3\pi \int_0^2 r^3\,dr$$

$$= 3\pi \left. \frac{1}{4} r^4 \right|_0^2 = 3\pi \cdot 4 = 12\pi$$

(4) $\vec{F} = e^z\,\vec{i} + 2yz\,\vec{j} + (xe^z + y^2)\,\vec{k}$

(a) $\vec{F}$ é conservativo.

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^z & 2yz & xe^z+y^2 \end{pmatrix}$$

$$= (2y - 2y)\vec{i} - (e^z - e^z)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

$\therefore$ $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ e como $\mathrm{Dom}(\vec{F}) = \mathbb{R}^3$, $\vec{F}$ é conservativo.

(b) Um potencial para $\vec{F}$.

Queremos $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} f_x = e^z \\ f_y = 2yz \quad e \\ f_z = xe^z + y^2 \end{cases}$

$$f_x = e^z \Rightarrow f = xe^z + g(y,z)$$

$$\Rightarrow f_y = \frac{\partial g}{\partial y} = g_y \text{ , mas } f_y = 2yz$$

$\therefore$ $g_y = 2yz$, daí $g = y^2 z + h(z)$

Logo $f = xe^z + y^2 z + h(z)$. $\therefore$ $f_z = xe^z + y^2 + h'(z)$

$$f_z = xe^z + y^2 \Rightarrow h'(z) = 0$$

$$\therefore\ h(z) = \text{cte} = C$$

Daí, $\underline{\underline{f = xe^z + y^2 z + C}}$

(c) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = ?$ $\quad C: \alpha: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\alpha(2\pi)) - f(\alpha(0))$$

$\alpha(0) = (1,0,0)$, $f(1,0,0) = 1 + c$

$\alpha(2\pi) = (1,0,2\pi)$, $f(1,0,2\pi) = e^{2\pi} + c$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = (e^{2\pi} + c) - (1 + c)$$
$$= e^{2\pi} - 1$$

(5) $$\operatorname{div}(f \nabla f) = \operatorname{div}\left(f \cdot (f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k})\right)$$
$$= \operatorname{div}\left(f \cdot f_x \vec{i} + f f_y \vec{j} + f f_z \vec{k}\right)$$
$$= (f f_x)_x + (f f_y)_y + (f f_z)_z$$
$$= f_x \cdot f_x + f f_{xx} + f_y f_y + f f_{yy} + f_z f_z + f f_{zz}$$
$$= f(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + f_x^2 + f_y^2 + f_z^2$$
$$= f \Delta f + \|\nabla f\|^2$$

$$\therefore \operatorname{div}(f \nabla f) = f \Delta f + \|\nabla f\|^2$$