

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prolongamento de soluções (Continuação)

Na aula anterior a esta vimos que se $f(x, y)$ é uma função contínua com derivada contínua a solução do problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ tem solução no intervalo maximal (w_+, w_-) , nesta aula vamos ampliar esta idéia provando o seguinte teorema;

Teorema: Suponhamos que $\Omega = \{x, y : a < x < b\}$ seja uma faixa e que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua tal que $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e limitada. Então para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe uma solução do problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ definida no intervalo (a, b) .

Dem. Sendo $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ contínuas, já sabemos que o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ tem uma única solução definida num intervalo $(\alpha - x_0, \alpha + x_0) \subset (a, b)$, sendo f_y contínua em a, b já sabemos que existe uma constante $k_1 = \max |f_y(x, y)| : (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ e $k_2 = \sup |f_y| : x, y \in \Omega$ e além disso podemos re-escrever a função $f(x, y)$ da seguinte maneira, $f(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0)$ e pela desigualdade triangular obtemos, $|f(x, y)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0)|$ e pelo teorema do valor médio temos, $|f(x, y)| \leq k_2 + k_1 |y - y_0|$ e como sabemos que o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ é equivalente a $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$, temos, substituindo $f(s, y(s))$ pela desigualdade do teorema do valor médio que , $|y - y_0| \leq k_2 + y_0 + k_1 \int_{x_0}^x |y(s) - y_0| ds$. Tomando $\alpha(x) = \int_{x_0}^x |y(s) - y_0| ds$, consequentemente temos, $\alpha'(x) = |y(x) - y_0| \leq k_2 + y_0 + k_1 \alpha(x)$. Reescrevendo esta desigualdade, temos, $\alpha' - k_1 \alpha \leq k_2$, multiplicando esta desigualdade por $e^{-k_1 x}$ obtemos $\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot e^{-k_1 x}) \leq (k_2 + y_0) e^{-k_1 x}$, integrando ambos membros desta desigualdade temos, $\alpha(x) \cdot e^{-k_1 x} \leq \alpha(x_0) - \frac{k_2}{k_1} e^{-k_1 x}$, Isolando o valor de $\alpha(x)$ temos, $\alpha(x) \leq \alpha(x_0) e^{k_1 x} - \frac{k_2}{k_1}$, o que indica que $y(x) \leq \text{const.}$

Isto demonstra que $y(x)$ não tende ao infinito.

A desigualdade acima é válida em um contexto mais geral e designada como desigualdade de Gronwall.

Lema de Gronwall: Sejam α , β e δ funções tais que $\beta \geq 0$ e

$$\delta'(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s) \delta(s) ds$$

Então

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s) \alpha(s) e^{\int_{x_0}^s \beta(u) du} ds$$

Particularmente se $\alpha(x) = k = \text{const.}$ temos;

$$\delta(x) \leq k e^{\int_{x_0}^x \beta(s) ds}$$

A demonstração segue o mesmo método praticado acima.

Exemplos 1:

Considere o problema de valor inicial ;

$$(*) \begin{cases} y' = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \geq x_0 > 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Observamos que $f(x, y)$ é contínua e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ que é contínua e limitada para todo $x > 0$, então a solução do problema (*) está definida em $[0, +\infty)$

Exemplos 2: Considere o problema de valor inicial ;

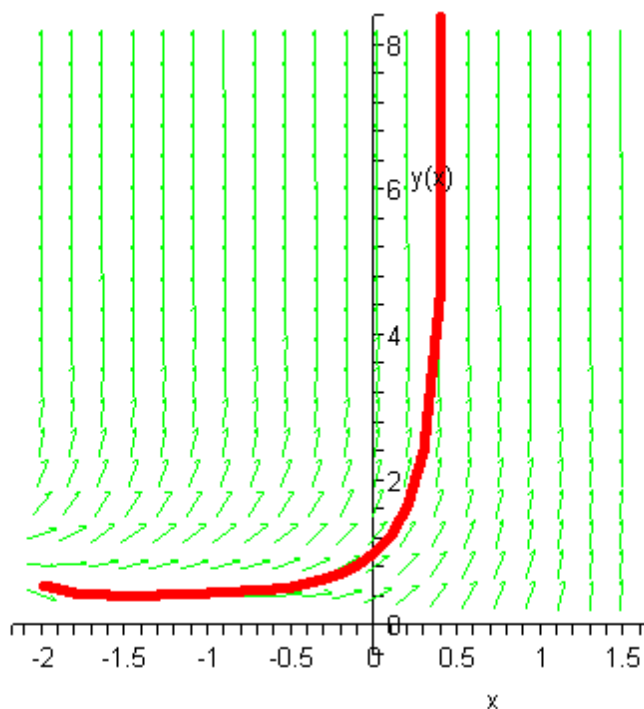
$$(**) \begin{cases} y' = (2 - y) \cdot \sin(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Observe que $f(x, y) = (2 - y) \sin(x)$ é uma função contínua com $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ contínua e limitada para todo $x \in \mathbb{R}$, então a solução de (**) está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

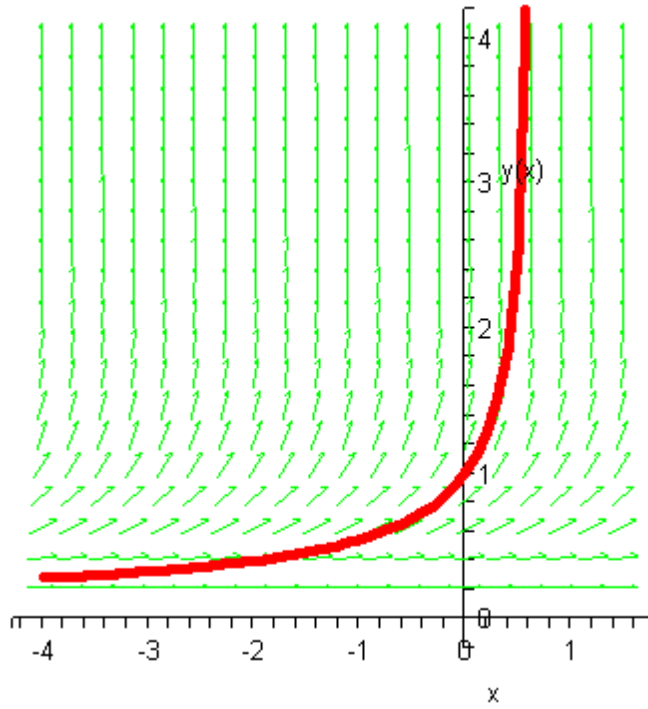
Exemplo 3 : Estudo o intervalo maximal de solução do P. V. I.;

$$\begin{cases} y' = (1+x)^3 + y^{5/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Considerando $f(x, y) = (x+1)^3 + y^{5/3}$ é uma função continua com derivada continua e que, portanto possui uma única solução em algum intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, além do mais observe que $f(x, y) = (x+1)^3 + y^{5/3} > y^{5/3}$. Considere $g(u) = u^{5/3}$, cuja problema de valor inicial $u' = u^{5/3}$ $u(0) = 1$ tem solução dada por $u(t) = \frac{-3}{2(t - \frac{3}{2})^{3/2}}$, a qual esta definida no intervalo $(-\infty, 3/2)$ e explode para $+\infty$ em $3/2$, então a luz da proposição que estudamos na aula anterior $y(x) > u(x)$ e explode para $+\infty$ quando $x \rightarrow x^*$ para algum $x^* \in (-\infty, 3/2)$ o aspecto gráfico da solução é o seguinte;



$$\begin{cases} y' = (1+x)^3 + y^{5/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

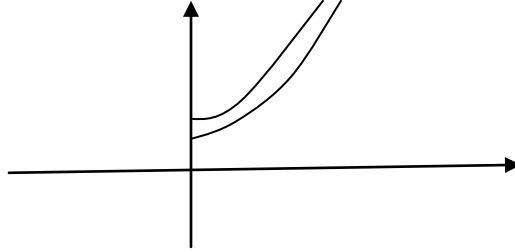


Digite a equação aqui.

$$\begin{cases} u' = u^{5/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

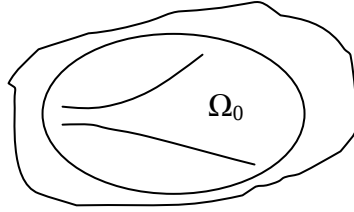
Dependência contínua dos dados iniciais.

Além da questão da existência e unicidade de solução para P.V.I., para que a teoria faça sentido fisicamente, é necessário mostrar que ambas as soluções $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ dependam continuamente dos dados iniciais. Dizer que as soluções, $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, dependem continuamente dos dados iniciais, significa dizer que quando $\alpha_1(x_0)$ está próximo $\alpha_2(x_0)$, as soluções, $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ estão muito próximas também.



Teorema: (Dependência contínua): Com as mesmas hipóteses do TEU, se $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, são soluções do P.V.I. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definidas em $[x_0, x_1]$, então existe $K > 0$ tal que;

$$|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x_0) - \alpha_2(x_0)| e^{K|x-x_0|}$$



Dem. Considere $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$, soluções do PVI, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definidas num intervalo $[x_0, x_1]$

De modo que seus gráficos estejam contidas numa região limitada Ω_0 . E seja K uma constante tal como a constante que limita $|f(x, \alpha_1(x)) - f(x, \alpha_2(x))|$. Como

$$|\alpha'_1(x) - \alpha'_2(x)| = |f(x, \alpha_1(x)) - f(x, \alpha_2(x))|$$

e como $\alpha'_1(x) = \alpha_1(x_0) + f(x, \alpha_1(x))$ e $\alpha'_2(x) = \alpha_2(x_0) + f(x, \alpha_2(x))$, temos que

$$|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x_0) - \alpha_2(x_0)| + \int_{x_0}^x |f(x, \alpha_1(x)) - f(x, \alpha_2(x))| dx, \text{ sabendo-se}$$

que f satisfaz as hipóteses do TEU, e que portanto existe $K > 0$ tal que; $|f(x, \alpha_1(x)) -$

$f(x, \alpha_2(x))| \leq K|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)|$, daí segue que,

$$|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x_0) - \alpha_2(x_0)| + K \int_{x_0}^x |\alpha_1(x) - \alpha_2(x)| dx$$

Por um procedimento idêntico ao usado no lema de Gronwall, temos;

$$|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x_0) - \alpha_2(x_0)| e^{K(x-x_0)}$$

Exemplos: Analise a dependência contínua das soluções dos problemas indicados abaixo nos casos particulares dados:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy+x+y+1} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x+y+7} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- a) Esboce as linhas de fase da equação diferencial, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}$
- b) Discuta o comportamento das soluções com a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$
- c) Aplique a técnica analítica para o problema de valor inicial, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}$, $y(0) = \frac{1}{2}$ e compare seus resultados com a discussão na parte (a).

SISTEMAS LINEARES TEORIA BÁSICA.2

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ x'_3 = p_{31}(t)x_1 + p_{32}(t)x_2 + \cdots p_{3n}(t)x_n + g_3(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Para discutir este sistema de maneira mais eficiente vamos usar a notação matricial,

$$(*) \quad X' = AX + g(t)$$

Onde X indica o vetor coluna dado por $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ e A indica a matrix,

$$A = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

e $g(t)$ é o vetor coluna dado por $g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t), \dots, g_n(t))^T$.

DEFINIÇÃO: Dizemos que uma função vetorial $X = \varphi(t)$ é uma solução se suas componentes satisfazem o sistema (*).

Para garantir a existência de solução vamos supor que as funções $p_{ij}(t)$ e $g_i(t)$ sejam contínuas, o que garante que $X' = (x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n)^T$ é contínuas e portanto concluímos que X é de classe $C^1(I)$, onde $I = (a, b)$.

Definição: Dizemos que o sistema (*) é homogêneo se $g(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Para nossa análise vamos considerar inicialmente os sistemas homogêneos,

$$X' = AX$$

Existem vários métodos para se resolver sistemas não-homogêneos que exploraremos posteriormente, para os sistemas homogêneos vamos considerar a seguinte notação

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{31}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ x_{32}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ x_{3k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}$$

Para denotar soluções específicas de (*) usamos a notação $X_i^{(j)} = X_{ij}$, onde i = ésima componente da j = ésima coluna.

Os principais resultados das soluções (*) estão descritos abaixo:

TEOREMA: Se as funções $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções do sistema $X' = AX$, então a combinação linear, $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ também é uma solução. (chamado principio da superposição).

Demonstração: Seja $X(t) = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t)$, temos que $X' = c_1x'^{(1)} + c_2x'^{(2)} = c_1Ax^{(1)} + c_2Ax^{(2)} = A(c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t)) = AX$.

Podemos generalizar este resultado dizendo que se $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$, são soluções do sistema $X' = AX$, então $X = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + c_3x^{(3)} + \dots + c_nx^{(n)}$, quaisquer que seja as constantes, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$.

EXEMPLO: As funções $x^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t}$ e $x^{(2)} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t}$ são

soluções da equação

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$$

De acordo com o teorema anterior temos

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$$

Aplicando o teorema repetidamente chegamos a conclusão que toda combinação linear de soluções do problema (*) também é solução, o problema é saber se toda solução de (*) é deste tipo. Sejam $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$, soluções de (*) e considere a matriz $X(t)$ cujas colunas são os vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Em analogia com os sistemas de equações algébricas os vetores colunas da matriz $X(t)$ são linearmente independente para um valor de t se, somente se $\det X(t) \neq 0$ para esse valor de t . Esse determinante é chamado o Wronskiano das n -soluções $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$.

TEOREMA: Se as funções $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções linearmente independente do sistema (*) em cada ponto $t \in (a, b)$, então cada solução $X(t) = \varphi(t)$ do sistema (*) pode ser expressa como combinação linear de $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$

$$\varphi(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

exatamente de uma maneira.

Dem. Consiste em mostrar que dado qualquer solução $\varphi(t)$ de (*), é da forma $\varphi(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} + \dots + c_n x^{(n)}$ para valores apropriados de $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$. Seja $t = t_0 \in (a, b)$ e seja $\varepsilon = \varphi(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $X(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} + \dots + c_n x^{(n)}$ que satisfaça a condição inicial $X(t_0) = \varepsilon$. Em outras palavras queremos saber existe constantes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ tais que,:

$$c_1 x^{(1)}(t_0) + c_2 x^{(2)}(t_0) + c_3 x^{(3)}(t_0) + \dots + c_n x^{(n)}(t_0) = \varepsilon,$$

ou em forma escalar:

$$c_1 x_{11}(t_0) + c_2 x_{12}(t_0) + c_3 x_{13}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) = \varepsilon_1$$

$$c_1 x_{21}(t_0) + c_2 x_{22}(t_0) + c_3 x_{23}(t_0) + \dots + c_n x_{2n}(t_0) = \varepsilon_2$$

$$c_1 x_{31}(t_0) + c_2 x_{32}(t_0) + c_3 x_{33}(t_0) + \dots + c_n x_{3n}(t_0) = \varepsilon_3$$

.

$$c_1 x_{n1}(t_0) + c_2 x_{n2}(t_0) + c_3 x_{n3}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) = \varepsilon_n.$$

A condição necessária e suficiente para este sistema ter uma única solução é o,

$$\det. \begin{pmatrix} x_{11}(t_0) & x_{12}(t_0) & \dots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & x_{n2}(t_0) & \dots & x_{nn}(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Mas por hipótese as funções $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ são linearmente independentes, logo o sistema tem uma única solução.

DEFINIÇÃO: Qualquer conjunto de soluções linearmente independentes do sistema (*) é chamado conjunto fundamental de soluções.

TEOREMA: Se $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções linearmente independente de equação (*) no intervalo (a, b) , então o $W[x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}]$ ou é nulo ou nunca se anula.

Comentários: A importância deste teorema reside no fato de nos livrarmos de calcular o Wronskiano em cada ponto do intervalo (a, b) e também determinar se as soluções $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ são linearmente independente.

A demonstração deste Teorema só depende de mostrarmos que:

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \dots + p_{nn})W$$

Para facilitar a demonstração vamos mudar a notação e fazer para um sistema 2x2 equações esperando ser fácil compreender a generalização para sistemas nxn, para isto considere:

$$(P) \begin{cases} x' = p_{11}x + p_{12}y \\ y' = p_{21}x + p_{22}y \end{cases}$$

e vamos considerar:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

soluções de (P) cujo Wronskiano é:

$$W[X_1, X_2] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

Sendo X_1 e X_2 soluções de (P) temos,

$$(P1) \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}x + p_{12}y \\ p_{21}x + p_{22}y \end{pmatrix} \text{ e } (P2) \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}x + p_{12}y \\ p_{21}x + p_{22}y \end{pmatrix}$$

e como $\frac{d}{dt}(x_1 y_2 - y_1 x_2) = x'_1 y_2 + x_1 y'_2 - y'_1 x_2 - y_1 x'_2 = (x'_1 y_2 - y'_1 x_2) + (x_1 y'_2 - y_1 x'_2)$

Substituindo (P1) e (P2) nesta equação e fazendo os devidos cancelamentos obtemos,

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W$$

Esta é denominada fórmula de Abel-Liouville. Esta formula é importante porque significa que;

$$W[X_1, X_2] = W[X_1(t_0), X_2(t_0)]e^{-\int_{t_0}^t (p_{11}(s) + p_{22}(s))ds}$$

O que significa que o valor do $W[X_1, X_2]$ depende dos dados iniciais.

Com estes teoremas percebemos a importância de identificarmos os conjuntos fundamentais de soluções de um sistema, este é o objetivo do próximo teorema.

TEOREMA: sejam:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

Além disso, suponha que $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções do sistema (*) satisfazendo as condições iniciais,

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, x^{(2)}(t_0) = e^{(2)}, \dots, x^{(n)}(t_0) = e^{(n)},$$

Respectivamente, onde t_0 é um ponto qualquer no intervalo (a, b) . Então ,

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)},$$

é um conjunto fundamental de solução do sistema (*).

Dem. A existência de solução é garantida pelo teorema de existência já demonstrado e para ver que, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ é um conjunto fundamental de solução basta verificar que o Wronskiano dessas soluções é igual a 1.

Comentários: Uma vez encontrado um conjunto fundamental de solução pode-se encontrar outros conjuntos a partir deste formando-se combinações lineares. O conjunto encontrado no teorema é o mais simples. Em resumo, qualquer conjunto de n soluções linearmente independente é um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo: Considere os vetores $x^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x^{(2)} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$:

- Calcule o Wronskino de $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$
- Em que intervalos $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são linearmente independentes?
- Que conclusão se pode tirar sobre os coeficientes do sistema de equações diferenciais satisfeito por $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$?
- Encontre este sistema de equação e verifique a conclusão do item (c).

Sol.

- $W[x^{(1)} x^{(2)}] = t^2$
- Para todo $t \neq 0$
- Pelo menos um dos coeficientes tem que ser descontínuo, pois as soluções não estão definidas em $x = 0$. Pois como as soluções são l.i. fora da origem e l.d. na origem então os coeficientes não podem ser contínuos.

d) Basta encontrar a matriz do sistema. Então se $X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ temos $\frac{dX^{(1)}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $X^{(2)} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ temos $\frac{dX^{(2)}}{dt} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$, resulta que se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é a matriz do sistema temos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ isto implica que } \begin{cases} a_{11}t + a_{12} = 1 \\ a_{21}t + a_{22} = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \text{ isto implica que } \begin{cases} a_{11}t^2 + a_{12}(2t) = 2t \\ a_{21}t^2 + a_{22}(2t) = 2 \end{cases}$$

Então obtemos os sistemas:

$$\begin{cases} a_{11}t + a_{12} = 1 \\ a_{11}t^2 + a_{12}(2t) = 2t \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a_{21}t + a_{22} = 0 \\ a_{21}t^2 + a_{22}(2t) = 2 \end{cases}$$

Resolvendo estes dois sistemas supondo para $t \neq 0$ obtemos a matriz;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

E portanto, considerando $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ temos

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} X \text{ ou explicitamente, } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^2}x + \frac{2}{t}y \end{cases}$$

MÉTODOS DE OBTENÇÃO DE SOLUÇÃO

Vamos analisar as possibilidades de obtenção de solução e analisar seus comportamentos. Nosso pré-suposto é que para equação do tipo $x' = ax$ o leitor já está familiarizado com os dois métodos usuais de solução, o da separação de variável e o das aproximações sucessivas (Método de Picard). Para introduzir a metodologia vamos considerar inicialmente exemplos particulares:

Exemplo 1 Considere o seguinte vetor $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, seja o sistema

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

Neste sistema temos $\frac{dx}{dt} = x$ e $\frac{dy}{dt} = y$. Daí temos que $x(t) = c_1 e^t$ e $y(t) = c_2 e^{2t}$. Temos que $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ e $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ é um sistema fundamental de solução, logo a $X^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{(2)}$. Observe também que algebricamente, a solução deste sistema é

uma curva parametrizada na sua forma vetorial, isto é, $\alpha(t) = (ce^t, ke^{2t})$, cujas coordenadas estão relacionadas entre si pela equação, $y = \frac{k}{c}x^2$. O conjunto de todas estas curvas é chamado espaço fase do sistema. O plano que contém estas curvas é chamado plano de fase. Um ponto importante se observar é que $x = 0$ e $y = 0$ é uma solução do sistema, neste sentido o ponto (0,0) do plano de fase represente um ponto de equilíbrio do sistema. Voltamos a explorar estas idéias mais adiante quando tivermos mais fundamentos matemáticos para isto.

Exemplo 2 – Considere o sistema:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

Neste caso temos $\frac{dx}{dt} = x$ o que implica que $x(t) = ce^t$ e $\frac{dy}{dt} = 2x + y$, isto é, $\frac{dy}{dt} = 2ce^t + y$, ou seja $\frac{dy}{dt} - y = 2ce^t$, e como já sabemos resolver esta equação, temos que, $y(t) = \mu e^t + 2cte^t$. Neste caso temos;

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^t \\ \mu e^t + 2cte^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \mu \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2ct \end{pmatrix} e^t$$

Observe que $X(t) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} e^t + e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ tc \end{pmatrix} \right] = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)}$, onde

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} e^t \text{ e } X^{(2)} = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ tc \end{pmatrix} \right]$$

A metodologia desenvolvida acima é específica para estes tipos de matrizes, para sistemas completamente acoplados (todas as equações envolve mais de uma variável) as dificuldades em se aplicar a metodologia acima é muito grande a sua generalização para sistemas acoplados, não traz benefício metodológico. Nestes casos apelamos para os métodos da álgebra linear.

Nossa premissa é que o leitor está familiarizado com as operações da álgebra matricial, vamos relembra que um operador $T: R^n \rightarrow R^n$ está associado a uma matriz $A_{n \times n}$ que é caracterizada por $T(e^i) = Ae^i$, isto é, A é matriz do operador T na base canônica R^n . Seja $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ outra base do R^n e seja $B = (b_{ij})$ a matriz do operador T nesta base, isto é $T(v_i) = Bv_i$. A relação entre a matriz A e B de T é dada pela matriz Q de mudança de base, onde $Q(e^i) = v_i$. A matriz Q é inversível e

$$AQe^i = \sum_{i=1}^n b_{ij}v_i = QB e^j$$

isto é, $AQ = QB$, neste caso as matrizes A e B são habitualmente chamadas de *Matrizes Semelhantes*. No jargão da Álgebra Linear diz-se que duas matrizes A e B são semelhantes ou conjugadas se,

$$A = QBQ^{-1}$$

Do ponto de vista da Álgebra Linear, dada duas matrizes $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ do operador $T: R^n \rightarrow R^n$ os sistemas $X' = AX$ e $Y' = BY$ são a mesma equação $X' = TX$ nas coordenadas das respectivas bases. Do ponto de vista das matrizes conjugadas os sistemas $X' = AX$ e $Y' = BY$ são os mesmos, a menos de mudanças de coordenadas da pela matriz de mudança de base Q , conforme provaremos na próxima proposição.

Proposição: Se Q é uma matriz de tal que $A = Q^{-1}BQ$, então Q transforma as soluções de $Y' = BY$ nas soluções de $X' = AX$, ou seja, as afirmações abaixo são equivalentes,

- $Y(t)$ é solução de $Y' = BY$
- QY é uma solução de $X' = AX$, isto é $X = QY$

Dem. Sendo A e B matrizes com coeficientes constantes temos que Q é independente de t , logo derivando $X = QY$ temos, $X' = QY' = QBY = AQY = AX$.

Em virtude da proposição acima, como já sabemos resolver sistemas cuja matriz é diagonal então já sabemos resolver sistemas gerais do tipo $X' = AX$ mesma que seja só conjugada a uma matriz diagonal. Uma matriz A é dita diagonalizável se A é a conjugada de uma matriz diagonal. A razão deste proposição é porque, se A é a matriz associada a um operador $T: R^n \rightarrow R^n$ e se Q é a matriz dos auto-vetores de T , então $AQ = QD$ onde D é a matriz diagonal dos autovalores de A . Portanto, temos $A = QDQ^{-1}$. Desta forma uma sistema fica completamente resolvido se conseguimos diagonalizar sua matriz associada