

Capítulo 3

Cálculo Vetorial

O objetivo deste capítulo é o estudo de “vetores” de um ponto de vista geométrico e analítico. De acordo com a necessidade, a abordagem do assunto será formal ou informal. O estudo axiomático é visto em cursos de Introdução à Álgebra Linear.

3.1 Segmentos Orientados

Sejam A e B dois pontos, com $A \neq B$. A única reta que passa por A e B é chamada de *reta suporte*.

Um *segmento de reta* determinado por A e B , denotado por $\overline{AB}$, é o conjunto de pontos formado por A e B e os pontos da reta suporte que estejam entre A e B . Neste caso, A e B chamam-se os *pontos extremos*.

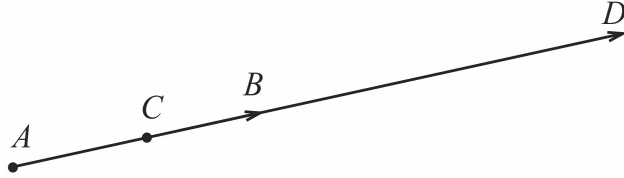


Um *segmento orientado* é um segmento $\overline{AB}$ mais a escolha de um de seus extremos. O extremo escolhido é chamado *origem* ou *ponto inicial* do segmento orientado e o outro é chamado de *extremidade* ou *ponto final*. Se A é o extremo escolhido, denotaremos por $\overrightarrow{AB}$. Formalmente, um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ pode ser definido como um par $(\overline{AB}; A)$, formado pelo segmento $\overline{AB}$ e um ponto inicial A .

Observação 3.1 1. Um segmento orientado pode ser visualizado como uma flexa cuja cauda representa o ponto inicial e a cabeça representa o ponto final.



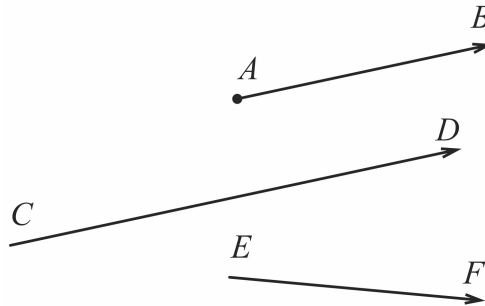
2. Os pontos são também considerados como segmentos orientados e, nesse caso, chamados de segmentos nulos. Assim, o ponto A pode ser identificado com o segmento orientado $\overrightarrow{AA}$.
3. Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são chamados colineares se eles têm a mesma reta suporte.



O comprimento ou a norma do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, denotado por $\|\overrightarrow{AB}\|$, é o comprimento do segmento $\overline{AB}$, isto é, a distância entre os pontos A e B .

Observação 3.2 Se $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$, então $A = B$.

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ segmentos orientados não nulos. Dizemos que eles têm a mesma direção se as respectivas retas suporte são paralelas (podendo ser coincidentes).

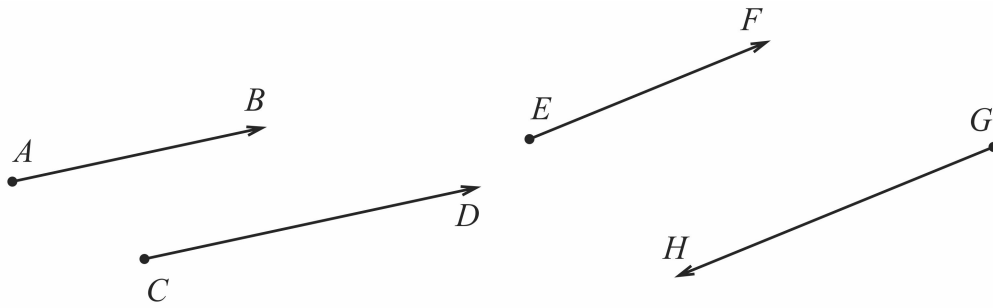


Note que, na ilustração, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção, enquanto $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EF}$ não têm.

Dado o segmento orientado não nulo $\overrightarrow{AB}$ e A' um ponto fora de sua reta suporte, dizemos que $\overrightarrow{A'B'}$ é uma translação paralela de $\overrightarrow{AB}$ se $\overrightarrow{AB}$, tem a mesma direção que $\overrightarrow{A'B'}$, e $\overrightarrow{AA'}$, tem a mesma direção que $\overrightarrow{BB'}$ ou, em outras palavras, se $AA'B'B$ é um paralelogramo.

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ segmentos orientados não nulos. Dizemos que eles têm o mesmo sentido se uma das afirmações ocorre: 1) têm a mesma direção, são não colineares e $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = \emptyset$; 2) são colineares e, dada a translação paralela $\overrightarrow{C'D'}$ de $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{C'D'}$ têm mesmo sentido.

Se $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} \neq \emptyset$, no primeiro caso, ou se $\overrightarrow{AC'} \cap \overrightarrow{BD'} \neq \emptyset$, no segundo caso, então dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm sentido opostos.



Observação 3.3 1. Note que, na ilustração, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm mesmo sentido, enquanto $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{GH}$ têm sentidos opostos.

Observação 3.4 Não se comparam sentidos de segmentos orientados que possuem direções diferentes. No caso do segmento orientado nulo, a direção e o sentido são indefinidos.

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ segmentos orientados não nulos. Dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são *equipolentes* (ou *equivalentes*), denotado por $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, se ambos são segmentos nulos ou então se eles têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, isto é, se um pode ser obtido do outro por uma translação paralela.

Proposição 3.5 Sejam A e B dois pontos.

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$; (*reflexividade*)
2. Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$; (*simetria*)
3. Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, então $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$; (*transitividade*)

4. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AB}$ não colinear a $\overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ determinam um paralelogramo.
5. Dados um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e um ponto P , existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{PQ}$. ■

3.2 Vetores

Um *vetor* ou *vetor livre* determinado por um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é a classe de todos os segmentos orientados que são equivalentes a $\overrightarrow{AB}$.

- Observação 3.6** 1. Note a diferença entre um segmento orientado e um vetor. Um segmento orientado é um segmento de reta direcionado, o qual é firmemente fixado e tem um ponto inicial e final bem definidos, enquanto um vetor é uma classe inteira de segmentos, onde cada um deles é chamado representante do vetor e denotado por $\vec{a}$.
2. Quando visualizamos um vetor $\vec{a}$, usualmente fazemos desenhando uma única flexa, mas com o entendimento que, esta flexa representando $\vec{a}$ é determinada, a menos de translações paralelas, e podendo ser livremente movida paralela a ela própria.

Se $\vec{a}$ é representado por um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, denotaremos por $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores determinados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, respectivamente. Dizemos que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são *iguais*, denotado por $\vec{a} = \vec{b}$, se, e somente se, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Exemplo 3.7 Na figura acima temos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Isto significa que os pontos A e B têm a mesma posição mútua como os pontos C e D ou E e F .

É conveniente, às vezes, expressar a posição mútua de dois pontos A e B , considerando as posições de A e B relativas a um ponto de referência fixado 0, chamado de *origem*. Mais precisamente: suponhamos que um ponto de referência fixado 0 no “espaço” seja escolhido. Então:

1. Para cada vetor $\vec{a}$ existe um único segmento orientado representando $\vec{a}$, o qual origina-se de 0. Reciprocamente, cada segmento orientado originando-se em 0 representa um único vetor $\vec{a}$, a saber, a classe de todas as suas translações paralelas.

Conclusão: Existe uma correspondência biunívoca entre vetores e segmentos orientados originando-se em 0.

2. Para cada ponto A no “espaço” existe um único segmento orientado, a saber, $\overrightarrow{0A}$. Reciprocamente, cada segmento orientado originando-se em 0 determina um único ponto no “espaço”, a saber, sua cabeça.

Conclusão: Existe uma correspondência biunívoca entre segmentos orientados originando-se em 0 e pontos no “espaço.”

O segmento orientado $\overrightarrow{OA}$ é chamado o *vetor posição* do ponto A relativo à origem O . Usualmente denotaremos pontos por letras maiúsculas e os correspondentes vetores posições por letras minúsculas. Assim escrevemos

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{p} = \overrightarrow{OP} \text{ e } \vec{0} = \overrightarrow{AA} \text{ o vetor nulo.}$$

3.3 Adição de Vetores

Sejam A , B e C três pontos tais que $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. A soma de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, denotada por $\vec{a} + \vec{b}$, é definida por

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}.$$

Vamos mostrar que a soma de dois vetores está bem definida, isto é, não depende da escolha do ponto A . De fato, suponhamos que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \text{ e } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}.$$

Então

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}.$$

Observação 3.8 (Regra do Paralelogramo) Note que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ é a diagonal do paralelogramo gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

O vetor *inverso* (ou o *oposto*) de um vetor $\vec{a}$, denotado por $-\vec{a}$, é o vetor obtido de $\vec{a}$ mudando apenas o sentido. Assim, se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, então $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

Proposição 3.9 Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores quaisquer. Então:

1. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (o vetor nulo é o elemento neutro da adição);
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (o vetor inverso é o elemento inverso da adição).

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Observando as figuras, obtemos o resultado. ■

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer. A *diferença* entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definida como

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a}).$$

Assim, se $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, então $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, pois $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ implica que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OA})) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}) + (-\overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{b} - \vec{a}.\end{aligned}$$

Observação 3.10 *As propriedades associativa e comutativa da adição de vetores implicam que uma soma de um certo número de vetores é independente da maneira pela qual estes vetores são combinados ou associados. Por exemplo, se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são vetores quaisquer, então*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d}) = [\vec{b} + (\vec{a} + \vec{c})] + \vec{d}$$

e esta pode ser escrita sem confusão como

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}.$$

Exemplo 3.11 *Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores quaisquer tais que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Mostrar que $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.*

Solução.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a} + \vec{0} \\ &= \vec{a} + [\vec{b} + (-\vec{b})] \\ &= [\vec{a} + \vec{b}] + (-\vec{b}) \\ &= \vec{c} - \vec{b}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.12 *Sejam A, B, C, D e E os vértices de um polígono (fechado). Mostrar que*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}.$$

Solução. Vamos primeiro construir o polígono.

Pela figura, obtemos que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

Como $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.13 *Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro. Se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Escreva os vetores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CD}$ em termos dos vetores $\vec{a}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.*

Solução. Vamos primeiro construir o tetraedro.

Pela figura, obtemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{a} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{a} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}. \end{aligned}$$

3.4 Multiplicação por escalar

A segunda operação que queremos introduzir é a multiplicação de um vetor por um número real (um elemento de $\mathbb{R}$). Neste contexto, os números reais são chamados de *escalares*.

Sejam $\vec{a}$ um vetor qualquer e x um escalar ($x \in \mathbb{R}$). O *produto* de x por $\vec{a}$, denotado por $x\vec{a}$, é o vetor obtido de $\vec{a}$ mudando o comprimento de $\vec{a}$ pelo fator x , mantendo o mesmo sentido, se x é positivo e invertendo-o se x é negativo. Nesse caso, $\|x\vec{a}\| = |x| \|\vec{a}\|$. frequentemente, denotaremos por $\frac{\vec{a}}{x}$ o vetor $\frac{1}{x}\vec{a}$, para $x \in \mathbb{R}^*$.

Proposição 3.14 *Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ vetores quaisquer e x, y escalares quaisquer. Então:*

1. $x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}$;
2. $(x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$;
3. $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$;
4. $1\vec{a} = \vec{a}$;
5. Se $x = 0$ ou $\vec{a} = \vec{0}$, então $x\vec{a} = \vec{0}$;
6. Se $x\vec{a} = \vec{0}$, então $x = 0$ ou $\vec{a} = \vec{0}$.

Prova. Vamos provar apenas o item 3. Se $x = 0$, nada há para ser provado. Se $x \neq 0$, então observando as figuras e usando semelhança de triângulos, obtemos o resultado. ■

Sejam A e B pontos distintos e $X \in \overline{AB}$. A *razão simples* ou *razão de divisão* $(A, B; X)$ é um escalar λ tal que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{XB}$$

Observação 3.15 1. Se $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ com relação a uma origem qualquer O , então

$$\vec{x} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{x}) \Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1 + \lambda}, \text{ se } \lambda \neq -1.$$

Neste caso,

$$\frac{\|\overrightarrow{AX}\|}{\|\overrightarrow{XB}\|} = |\lambda|.$$

2. Se $(A, B; X) = \lambda$, dizemos que X divide o segmento $\overline{AB}$ na razão λ . Em particular, se $\lambda = 1$, dizemos que X é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Em termos de vetores posições significa que

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

3. Seja r é a reta suporte de A e B . Sejam $X \in r$ e $\lambda = (A, B; X)$. Se $X \in \overline{AB}$, então $0 < \lambda < \infty$. Se $X \notin \overline{AB}$, então ou X está à esquerda de A , neste caso, $-1 < \lambda < 0$ ou X está à direita de B , neste caso, $\lambda < -1$. Além disso, se $X = A$, então $\lambda = 0$ e se $X = B$, então $\lambda = \infty$.

Exemplo 3.16 *Mostrar que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se ao meio.*

1ª Solução. Sejam A, B, C, D os vértices do paralelogramo e M, N os pontos médios das diagonais AC e BD , como mostra a figura.

Expressando todos em termos de vetores posições em relação a uma origem qualquer O , obtemos que

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \text{ e } \vec{n} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}.$$

Como $\vec{b} - \vec{a} = -(\vec{d} - \vec{c})$ temos que

$$\begin{aligned} \vec{n} - \vec{m} &= \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \\ &= \frac{(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{d} - \vec{c})}{2} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \vec{n} - \vec{m} = \vec{0}.$$

Portanto, $M = N$.

2ª Solução. Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

Portanto, $M = N$.

Exemplo 3.17 *Mostrar que em um quadrilátero qualquer, os pontos médios dos lados formam um paralelogramo.*

1.ª Solução. Sejam A, B, C, D os vértices do quadrilátero e P, Q, R, S os pontos médios, como mostra a figura.

Expressando todos em termos de vetores posições em relação a uma origem qualquer O , obtemos que

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \text{ e } \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\vec{q} - \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \vec{r} - \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \text{ e} \\ \vec{s} - \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) = \vec{r} - \vec{q} \Rightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}\end{aligned}$$

Portanto, o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.

2.ª Solução. Pela figura, obtemos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{CR} &= \overrightarrow{RD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \text{ e } \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}.\end{aligned}$$

Como

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} \text{ e } \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DS}$$

temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DS} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SR} &= \vec{0} + \overrightarrow{SR} \\ &= (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}) + \overrightarrow{SR} \\ &= \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR}) \\ &= \overrightarrow{PQ} + \vec{0} = \overrightarrow{PQ}. \end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. Portanto, o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.

EXERCÍCIOS

1. Sejam P , A e B três pontos. Seja C um ponto no segmento $\overline{AB}$ tal que

$$\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{m}{n}.$$

Escreva o vetor $\overrightarrow{PC}$ em termos dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.

2. Sejam $ABCD$ um paralelogramo e M , N os pontos médios dos lados AB e AD , respectivamente. Mostrar que

$$\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CA}.$$

3. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Junte o vértice A com os pontos médios dos lados BC e CD , respectivamente. Mostrar que as duas retas assim obtidas divide a diagonal BD em três partes iguais.
4. Sejam $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ dois segmentos que interceptam-se em M . Se M é o ponto médio destes segmentos Mostrar que $ABCD$ é um paralelogramo.
5. Sejam ABC um triângulo equilátero e M , N os pontos médios dos lados AB e BC , respectivamente. Mostrar que MBN é também um triângulo equilátero.

6. Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam M um ponto no lado AB e N um ponto no lado AC tais que

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Escreva o vetor $\overrightarrow{NM}$ em termos dos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

7. Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam K , M e N os pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente, e P um ponto qualquer no interior deste triângulo. Mostrar que

$$\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

8. Sejam ABC um triângulo qualquer e D um ponto qualquer no lado AB tal que $\overrightarrow{DB} = a\overrightarrow{AD}$ com $a \neq -1$. Escreva $\overrightarrow{CD}$ em termos de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$.

9. Mostrar que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.

10. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que em um quadrilátero qualquer, os pontos médios dos lados formam um paralelogramo.

11. Seja $ABCD$ um trapézio qualquer com lados paralelos AB e DC . Sejam M e N os pontos médios dos lados AD e BC , respectivamente. Mostrar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

12. Mostrar que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio qualquer é paralelo aos outros dois lados.

13. Sejam P_i , $i = 1, \dots, 6$, os vértices de um polígono regular centrado na origem O . Mostrar que

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_1P_4} + \overrightarrow{P_1P_5} + \overrightarrow{P_1P_6} = 6\overrightarrow{P_1O}.$$

14. Sejam P_i , $i = 1, \dots, 6$, os vértices de um polígono regular centrado na origem O e $\overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{OP_i}$. Mostrar que

$$\overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 + \overrightarrow{p}_3 + \overrightarrow{p}_4 + \overrightarrow{p}_5 + \overrightarrow{p}_6 = \overrightarrow{0}.$$

Generalize para um polígono regular qualquer.

15. Sejam $ABCD$ um tetraedro e M o ponto médio do lado CD . Escreva o vetor $\overrightarrow{BM}$ em termos dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

16. Seja M o ponto médio do lado BF do cubo da figura abaixo. Escreva o vetor $\overrightarrow{HM}$ em termos dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.

17. Seja ABC um triângulo qualquer. Mostrar que:

(a) Se AD , BE e CF são suas medianas, então

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}.$$

(b) Existe um triângulo com lados paralelos às medianas de ABC e com os comprimentos destas?

18. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Escreva os vetores $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ em termos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

19. Sejam A , B e C pontos distintos. Mostrar que A , B e C são colineares se, e somente se, existem $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ tais que

$$x + y + z = 0 \text{ e } x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

3.5 Dependência e independência linear

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores. Então os vetores $\vec{a} + x\vec{b}$, onde $x \in \mathbb{R}$, são obtidos medindo externamente os múltiplos de $\vec{b}$ da cabeça de $\vec{a}$.

Sejam P um ponto e $\vec{a}$ um vetor não nulo. Seja r a reta que passa em P na direção do vetor $\vec{a}$. Então

$$\begin{aligned} r &= \{\vec{p} + t\vec{a} : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \vec{p} + \mathbb{R}\vec{a}, \end{aligned}$$

onde $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

Assim, $X \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} - \vec{p} = t\vec{a}$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a},$$

onde $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX}$. Isto significa que: um ponto arbitrário de r pode ser alcançado de O primeiro indo de O para r via $\overrightarrow{p}$ e então anda ao longo de r via um certo múltiplo de $\overrightarrow{a}$.

Exemplo 3.18 *Sejam A e B pontos distintos. A reta r passando por A e B é dada por*

$$r = \{x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} : x, y \in \mathbb{R} \text{ e } x + y = 1\},$$

onde $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$.

Solução. Vamos primeiro construir a reta que passa por A e B .

Assim, $X \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{a} + t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\ &= (1 - t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}.\end{aligned}$$

Fazendo $x = 1 - t$ e $y = t$, obtemos que

$$\overrightarrow{x} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} \text{ onde } x + y = 1$$

Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ vetores quaisquer. Dizemos que um vetor $\overrightarrow{c}$ é *combinação linear* de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ se existirem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}.$$

Dizemos que $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são *linearmente dependentes* (LD) ou *colineares* se existirem $x, y \in \mathbb{R}$, não ambos nulos, tais que

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}.$$

Caso contrário, dizemos que $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são *linearmente independentes* (LI) ou *não colineares*, isto é, a única solução da equação vetorial

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

é a trivial $x = y = 0$.

Observação 3.19 *Note que $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são LD se, e somente se, um deles é múltiplo escalar do outro, isto é, eles têm a mesma direção. Note, também, que todo vetor $\overrightarrow{a}$, com $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, é sempre LI.*

Exemplo 3.20 Seja $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores LI. Então os vetores $\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$ são LI.

Solução. Seja $x, y \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que a única solução da equação vetorial

$$x(\vec{a} - \vec{b}) + y(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

é a trivial $x = y = 0$. Como

$$x(\vec{a} - \vec{b}) + y(\vec{a} + \vec{b}) = (x + y)\vec{a} + (y - x)\vec{b}$$

temos que

$$x(\vec{a} - \vec{b}) + y(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow (x + y)\vec{a} + (y - x)\vec{b} = \vec{0}.$$

Assim, por hipótese,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - x = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $x = y = 0$. Portanto, os vetores $\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$ são LI.

Sejam P um ponto, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores linearmente independentes. Seja π um plano que passa por P e é paralelo ou coincidente ao plano gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Então

$$\begin{aligned} \pi &= \{\vec{p} + s\vec{a} + t\vec{b} : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \vec{p} + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b}, \end{aligned}$$

onde $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

Assim, $X \in \pi$ se, e somente se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x} - \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ se, e somente se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{a} + t\vec{b},$$

onde $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. Isto significa que: um ponto arbitrário de π pode ser alcançado de O primeiro indo de O para π via $\vec{p}$ e então anda dentro de π uma certa distância na direção de $\vec{a}$ e uma certa distância na direção de $\vec{b}$.

Exemplo 3.21 Sejam A, B e C pontos não colineares. O plano π passando por A, B e C é dado por

$$\pi = \{x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x + y + z = 1\},$$

onde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

Solução. Vamos primeiro construir o plano que passa por A , B e C ..

Assim, $X \in \pi$ se, e somente se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}.\end{aligned}$$

Fazendo $x = 1 - s - t$, $y = s$ e $z = t$, obtemos que

$$\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ onde } x + y + z = 1.$$

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores quaisquer. Dizemos que um vetor $\vec{d}$ é *combinação linear* de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ se existirem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Dizemos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD ou *coplanares* se existirem $x, y, z \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}.$$

Caso contrário, dizemos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI ou *não coplanares*, isto é, a única solução da equação vetorial

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

é a trivial $x = y = z = 0$.

Observação 3.22 Note que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois, isto é, eles são coplanares. Note, também, que se pelo menos um dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ for o vetor nulo $\vec{0}$, então os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são sempre LD.

Exemplo 3.23 Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ três vetores LI. Então os vetores $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ são LI.

Solução. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que a única solução da equação vetorial

$$x\vec{a} + y(\vec{a} + \vec{b}) + z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

é a trivial $x = y = z = 0$. Como

$$x\vec{a} + y(\vec{a} + \vec{b}) + z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (x + y + z)\vec{a} + (y + z)\vec{b} + z\vec{c}$$

temos que

$$x\vec{a} + y(\vec{a} + \vec{b}) + z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \Leftrightarrow (x + y + z)\vec{a} + (y + z)\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}.$$

Assim, por hipótese,

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $x = y = z = 0$. Portanto, os vetores $\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ são LI.

Seja $\mathbf{V}$ o conjunto de todos os vetores. Um conjunto

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

é uma base de $\mathbf{V}$ se todo vetor $\vec{u}$ de $\mathbf{V}$ pode ser escrito de modo único como uma combinação linear dos vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, isto é,

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

onde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Isto significa que: para obter $\vec{u}$ temos que fazer x_1 vezes o comprimento de $\vec{e}_1$ na direção de $\vec{e}_1$, então x_2 vezes o comprimento de $\vec{e}_2$ na direção de $\vec{e}_2$ e finalmente x_3 vezes o comprimento de $\vec{e}_3$ na direção de $\vec{e}_3$.

Observação 3.24 *Para verificar que um conjunto*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

é uma base de $\mathbf{V}$, basta mostrar que os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são LI. Isto significa, intuitivamente, que $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ estão localizados em direções diferentes e $\vec{e}_3$ sai do plano gerado por $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

O conjunto

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

de vetores linearmente independentes de $\mathbf{V}$ é chamado uma *base ordenada* de $\mathbf{V}$ ou um *sistema de coordenadas* para $\mathbf{V}$. O escalar x_i é a i -ésima coordenada de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$. Note que, se

$$\vec{v} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3,$$

então

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3$$

e

$$x\vec{u} = (xx_1)\vec{e}_1 + (xx_2)\vec{e}_2 + (xx_3)\vec{e}_3.$$

Assim, a i -ésima coordenada de $\vec{u} + \vec{v}$ e $x\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$ é $(x_i + y_i)$ e (xx_i) , respectivamente.

Seja $\mathbb{R}^3$ o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) , onde $x, y, z \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos a adição e a multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^3$ como:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

e

$$x(x_1, x_2, x_3) = (xx_1, xx_2, xx_3).$$

É fácil verificar que $\mathbb{R}^3$ com estas operações satisfaz todas as propriedades do conjunto de vetores $\mathbf{V}$.

Conclusão. Cada base ordenada de $\mathbf{V}$ determina uma correspondência biunívoca

$$\vec{u} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$$

entre o conjunto dos vetores $\mathbf{V}$ e o conjunto dos ternos ordenados $\mathbb{R}^3$.

Observação 3.25 *É conveniente, às vezes, usar a matriz das coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{B}$:*

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

ao invés do terno (x_1, x_2, x_3) das coordenadas.

Exemplo 3.26 *Mostrar que as medianas de um triângulo se interceptam em um ponto, o qual é um ponto de trisseção de cada mediana.*

Solução. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vetores gerando o triângulo, conforme figura.

Então as medianas são:

$$\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}, \frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{2} \text{ e } \frac{\vec{v} - 2\vec{u}}{2}.$$

Assim, as medianas se interceptam em um ponto P se, e somente se, existem escalares x , y e z tais que

$$x \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} \right) = \vec{v} + y \left(\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{2} \right) \text{ e } x \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} \right) = \vec{u} + z \left(\frac{\vec{v} - 2\vec{u}}{2} \right).$$

Estas equações podem ser re-escrita como

$$\begin{cases} (x - y)\vec{u} + (x + 2y - 2)\vec{v} = \vec{0} \\ (x + 2z - 2)\vec{u} + (x - z)\vec{v} = \vec{0} \end{cases}.$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI temos que

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 2 \\ x + 2z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

Portanto, as medianas se interceptam em um ponto P se, e somente se, o sistema acima tem solução. É fácil verificar que o sistema tem uma única solução

$$x = y = z = \frac{2}{3}.$$

Teorema 3.27 (Ceva) *Dado um triângulo ABC , escolhemos um ponto R no segmento $\overline{BC}$, um ponto S no segmento $\overline{AC}$ e um ponto T no segmento $\overline{AB}$. Sejam $\lambda_1 = (A, B; T)$, $\lambda_2 = (B, C; R)$ e $\lambda_3 = (C, A; S)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. Os segmentos $\overline{AR}$, $\overline{BS}$ e $\overline{CT}$ são concorrentes;
2. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ e $1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 \neq 0$;
3. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ e cada um dos três números $1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2$, $1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3$ e $1 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$ é diferente de zero.

Prova. Primeiro vamos desenhar a figura.

Expressando todos em termos de vetores posições em relação a uma origem qualquer O , obtemos que

$$\vec{t} = \frac{\vec{a} + \lambda_1 \vec{b}}{1 + \lambda_1}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{b} + \lambda_2 \vec{c}}{1 + \lambda_2}, \quad \text{e} \quad \vec{s} = \frac{\vec{c} + \lambda_3 \vec{a}}{1 + \lambda_3}.$$

Em particular, tomando $O = C$, obtemos que

$$\vec{t} = \frac{\vec{a} + \lambda_1 \vec{b}}{1 + \lambda_1}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{b}}{1 + \lambda_2}, \quad \text{e} \quad \vec{s} = \frac{\lambda_3 \vec{a}}{1 + \lambda_3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \vec{a} + x \left(\frac{\vec{b}}{1 + \lambda_2} - \vec{a} \right) \\ \overrightarrow{BS} &= \vec{b} + y \left(\frac{\lambda_3 \vec{a}}{1 + \lambda_3} - \vec{b} \right) \\ \overrightarrow{CT} &= z \left(\frac{\vec{a} + \lambda_1 \vec{b}}{1 + \lambda_1} \right). \end{aligned}$$

Assim, os segmentos $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BS}$ e $\overrightarrow{CT}$ se interceptam em um ponto P se, e somente se,

$$\vec{a} + x \left(\frac{\vec{b}}{1 + \lambda_2} - \vec{a} \right) = \vec{b} + y \left(\frac{\lambda_3 \vec{a}}{1 + \lambda_3} - \vec{b} \right) = z \left(\frac{\vec{a} + \lambda_1 \vec{b}}{1 + \lambda_1} \right),$$

ou ainda,

$$(1 - x) \vec{a} + \frac{x}{1 + \lambda_2} \vec{b} = \frac{\lambda_3 y}{1 + \lambda_3} \vec{a} + (1 - y) \vec{b} = \frac{z}{1 + \lambda_1} \vec{a} + \frac{\lambda_1 z}{1 + \lambda_1} \vec{b}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \left[(1 - x) - \frac{\lambda_3 y}{1 + \lambda_3} \right] \vec{a} + \left[\frac{x}{1 + \lambda_2} + (y - 1) \right] \vec{b} &= \vec{0} \\ \left[(1 - x) - \frac{z}{1 + \lambda_1} \right] \vec{a} + \left[\frac{x}{1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_1 z}{1 + \lambda_1} \right] \vec{b} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LI temos que

$$\begin{cases} x + \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} y = 1 \\ \frac{1}{1 + \lambda_2} x + y = 1 \\ x + \frac{1}{1 + \lambda_1} z = 1 \\ \frac{1}{1 + \lambda_2} x - \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} z = 0. \end{cases}$$

Assim, os segmentos $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BS}$ e $\overrightarrow{CT}$ se interceptam em um ponto P se, e somente se, o sistema acima tem solução. Agora vamos mostrar as equivalências.

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) Suponhamos que $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BS}$ e $\overrightarrow{CT}$ sejam concorrentes. Então o sistema tem solução x , y e z . Resolvendo para x a primeira e a segunda equação, fica

$$x = 1 - \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} y = (1 + \lambda_2)(1 - y) \Rightarrow (1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3) y = \lambda_2(1 + \lambda_3).$$

Assim, se $1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 = 0$, então $\lambda_2(1 + \lambda_3) = 0$ e $\lambda_2 = 0$. Logo, $1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 = 1 \neq 0$, o que é impossível. Portanto, $1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ e, consequentemente,

$$y = \frac{\lambda_2(1 + \lambda_3)}{1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3} \quad \text{e} \quad x = \frac{1 + \lambda_2}{1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3}.$$

Por outro lado,

$$z = (1 + \lambda_1)(1 - x) = \frac{(1 + \lambda_1)\lambda_2\lambda_3}{1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{1 + \lambda_1}{(1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3)\lambda_1}$$

se, e somente se, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, pois $\lambda_1 \neq 0$. Reciprocamente, suponhamos que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ e $1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Então o sistema tem solução

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + \lambda_2}{1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3}, \quad y = \frac{\lambda_2(1 + \lambda_3)}{1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3} \text{ e} \\ z &= \frac{(1 + \lambda_1)\lambda_2\lambda_3}{1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{1 + \lambda_1}{(1 + \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3)\lambda_1}. \end{aligned}$$

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Suponhamos, por absurdo, que $1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_2(1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) \\ &= \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_1 \\ &= \lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + 1, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. A recíproca é imediata. ■

3.6 Mudança de Bases

Sejam

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

duas bases ordenadas de $\mathbf{V}$. Então, para cada vetor $\vec{v} \in \mathbf{V}$ existem únicos $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\ \vec{v} &= y_1 \vec{u}_1 + y_2 \vec{u}_2 + y_3 \vec{u}_3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como $\vec{u}_i \in \mathbf{V}$ temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$, tais que

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 &= a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 &= a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo $\vec{u}_i$ na segunda equação de (3.1), obtemos que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= y_1 \vec{u}_1 + y_2 \vec{u}_2 + y_3 \vec{u}_3 \\ &= y_1 \left(\sum_{i=1}^3 a_{i1} \vec{e}_i \right) + y_2 \left(\sum_{i=1}^3 a_{i2} \vec{e}_i \right) + y_3 \left(\sum_{i=1}^3 a_{i3} \vec{e}_i \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 a_{1j} y_j \right) \vec{e}_1 + \left(\sum_{j=1}^3 a_{2j} y_j \right) \vec{e}_2 + \left(\sum_{j=1}^3 a_{3j} y_j \right) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Pela primeira equação de (3.1) e unicidade das coordenadas, obtemos que

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3.\end{aligned}$$

Em forma de matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Fazendo

$$[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

obtemos que

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [\vec{u}]_{\mathcal{B}'}.$$

A matriz $\mathbf{M} = [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ é a *matriz de mudança da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$* . Comparando $\mathbf{M}$ com (3.2), notamos esta matriz é obtida colocando as coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ de $\vec{u}_i$ na i -ésima coluna.

Observação 3.28 A matriz $\mathbf{M}$ é invertível, pois para cada $i = 1, 2, 3$, temos que

$$\vec{u}_i = a_{i1}\vec{e}_1 + a_{i2}\vec{e}_2 + a_{i3}\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\vec{e}_j \quad (3.3)$$

e para cada $j = 1, 2, 3$, temos que

$$\vec{e}_j = b_{j1}\vec{u}_1 + b_{j2}\vec{u}_2 + b_{j3}\vec{u}_3 = \sum_{k=1}^3 b_{jk}\vec{u}_k. \quad (3.4)$$

Fazendo $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B} = [b_{jk}]$, obtemos $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathbf{A}^t$ e $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^t$. Substituindo a equação (3.4) na equação (3.3), obtemos

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 b_{jk} \vec{u}_k \right) = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk} \right) \vec{u}_k.$$

Como $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é uma base para $\mathbf{V}$ temos que

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{I}_3.$$

Portanto,

$$[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t = (\mathbf{AB})^t = (\mathbf{I}_3)^t = \mathbf{I}_3 \Rightarrow [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \mathbf{M}^{-1}.$$

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases ordenadas de $\mathbf{V}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ determinam a *mesma orientação* se $\det(\mathbf{M}) > 0$. Caso contrário, elas determinam *orientação oposta*, onde $\mathbf{M}$ é a matriz de mudança de base.

???????????

Se P é um ponto qualquer do espaço, o vetor $\overrightarrow{OP}$ pode ser escrito em termos dos sistemas $0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ e $0, \overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + x_3 \overrightarrow{k} \\ &= y_1 \overrightarrow{u}_1 + y_2 \overrightarrow{u}_2 + y_3 \overrightarrow{u}_3\end{aligned}$$

veja figura 3.1.

Figura 3.1:

Escrevendo os vetores $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$, obtemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i} &= a_{11} \overrightarrow{u}_1 + a_{21} \overrightarrow{u}_2 + a_{31} \overrightarrow{u}_3 \\ \overrightarrow{j} &= a_{12} \overrightarrow{u}_1 + a_{22} \overrightarrow{u}_2 + a_{32} \overrightarrow{u}_3 \\ \overrightarrow{k} &= a_{13} \overrightarrow{u}_1 + a_{23} \overrightarrow{u}_2 + a_{33} \overrightarrow{u}_3\end{aligned}$$

sendo

$$a_{r1} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u}_r, a_{r2} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u}_r \text{ e } a_{r3} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{u}_r, r = 1, 2, 3$$

substituindo essas equações em

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + x_3 \overrightarrow{k} \\ &= y_1 \overrightarrow{u}_1 + y_2 \overrightarrow{u}_2 + y_3 \overrightarrow{u}_3\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}& (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \overrightarrow{u}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \overrightarrow{u}_2 \\ & + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \overrightarrow{u}_3 = y_1 \overrightarrow{u}_1 + y_2 \overrightarrow{u}_2 + y_3 \overrightarrow{u}_3\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.29 Calcular as coordenadas do ponto $P(1, 0, 2)$ no sistema de coordenadas $0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, onde

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}), \vec{u}_3 = \vec{k}.$$

Solução: Observe que

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 \\ \vec{j} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 \\ \vec{k} &= 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + 1\vec{u}_3\end{aligned}$$

e, portanto, escrevendo na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

de onde, temos: $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_3 = 2$.

???????????

Exemplo 3.30 Sejam

$$\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\},$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{a} \\ \vec{u}_2 &= \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{u}_3 &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

duas bases ordenadas de $\mathbf{V}$. Então $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ determinam a mesma orientação.

Solução. Como

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} \\ \vec{u}_2 &= 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} \\ \vec{u}_3 &= 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

temos que a matriz de mudança de base é

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\det(\mathbf{M}) = 1 > 0$.

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$ e $\vec{c} - \vec{a}$ são LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
2. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Mostrar que $\mathcal{B}' = \{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{c}, \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^3$. Elas têm a mesma orientação?
3. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Mostrar que $\{\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}, 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, -\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}\}$ é um conjunto LD.
4. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores LI tais que $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$ e $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Mostrar que $ABCD$ é um trapézio.
5. A **seção ouro** ou **divisão harmônica** de um segmento $\overline{AB}$ é a escolha de um ponto X entre A e B tal que

$$\frac{\|\overrightarrow{AX}\|}{\|\overrightarrow{XB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{XB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Determinar a razão de divisão $(A, B; X)$ se X é escolhido desta maneira.

6. Sejam P_1, P_2, P_3 postos colineares e $\lambda = (P_1, P_2; P_3)$. Mostrar que o conjunto de todas as razões de divisões $(P_i, P_j; P_k)$, onde $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, é igual a

$$\left\{ \lambda, \frac{1}{\lambda}, -(1 + \lambda), -\frac{1}{1 + \lambda}, -\frac{\lambda}{1 + \lambda}, -\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right\}.$$

7. Sejam A, B, C e D pontos. Mostrar que:

- (a) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\vec{c} - \vec{d} = t(\vec{a} - \vec{b}),$$

onde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$.

(b) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se se, e somente se,

$$x(\vec{a} - \vec{b}) + y(\vec{c} - \vec{d}) = \vec{0}$$

implica que $x = y = 0$, onde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$.

8. Considere duas semi-retas originando-se de um ponto comum O . Escolha dois pontos A e R da primeira diferente de O e dois pontos B e S da segunda diferente de O , de modo que existam $x, r, y, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$x + r = y + s = 0 \text{ e } x\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OR} = y\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OS} = \vec{0}.$$

Mostrar que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{RS}$ são paralelos se, e somente se, $x = s$ ($y = r$).

9. Sejam A, B, C, R, S e T pontos dados como no Teorema de Ceva tais que os segmentos $\overline{AR}$, $\overline{BS}$ e $\overline{CT}$ interceptam-se em um ponto comum P . Mostrar que

$$(P, A; R) + (P, B; S) + (P, C; T) = -1.$$

10. Seja ABC um triângulo qualquer. Mostrar que suas medianas interceptam-se em um ponto comum. (Sugestão: Use o Teorema de Ceva.)
11. Seja ABC um triângulo qualquer. Mostrar que os três bissetores internos interceptam-se em um ponto comum. (Sugestão: Use a Lei dos Senos e o Teorema de Ceva.)
12. Seja ABC um triângulo qualquer. Mostrar que as três alturas interceptam-se em um ponto comum.
13. (**Teorema de Menelao**) Dado um triângulo ABC , escolhemos um ponto R no segmento $\overline{BC}$, um ponto S no segmento $\overline{AC}$ e um ponto T no segmento $\overline{AB}$. Mostrar que R, S e T são colineares se, e somente se,

$$(A, B; T)(B, C; R)(A, C; S) = -1.$$

14. (**Teorema de Desargues**) Dados dois triângulos ABC e PQR tais que $A \neq P$, $B \neq Q$, $C \neq R$ e os pares de retas suportes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$; $\overline{AC}$ e $\overline{PR}$; $\overline{BC}$ e $\overline{QR}$ sejam concorrentes. Mostrar que as retas suportes dos segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{CR}$ são concorrentes ou paralelas se, e somente se, os pontos de interseções das retas suportes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$; $\overline{AC}$ e $\overline{PR}$; $\overline{BC}$ e $\overline{QR}$ sejam colineares.

3.7 Produto escalar

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não nulos de $\mathbf{V}$. O ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é a figura geométrica formada pelos segmentos $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, onde O é um ponto qualquer do espaço e A, B são escolhidos de modo que $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Vamos denotar o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ por

$$\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ vetores não nulos de $\mathbf{V}$ e θ o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O *produto escalar (interno)* de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido como

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

Note que, na definição de produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não especificamos se o ângulo θ é medido de $\vec{a}$ para $\vec{b}$ ou de $\vec{b}$ para $\vec{a}$ e nem se é medido no sentido horário ou anti-horário. Portanto, cada escolha para θ dar o mesmo resultado para $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, pois

$$\cos \theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta - 2\pi).$$

Assim,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle.$$

Além disso, se $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$, definimos

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0.$$

Proposição 3.31 *Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer de $\mathbf{V}$. Então:*

1. $\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$;
2. O menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right);$$

3. $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais (perpendiculares) se, e somente se, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

Prova. Vamos provar apenas o item 3. Note que,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\| = 0, \|\vec{b}\| = 0 \text{ ou } \cos \theta = 0.$$

■

Seja $\vec{a}$ um vetor não nulo de $\mathbf{V}$. Todo vetor $\vec{b}$ de $\mathbf{V}$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}'',$$

onde $\vec{b}'$ é um vetor com a mesma direção que $\vec{a}$ e $\vec{b}''$ é ortogonal a $\vec{a}$.

A componente $\vec{b}'$ é chamada a *projeção* de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ e denotada por $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$. Em outras palavras, $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ é por definição o único vetor $\vec{v} \in \mathbf{V}$ tal que $\vec{b} - \vec{v}$ seja ortogonal a $\vec{a}$. Esta definição de projeção é motivada da física, por exemplo, se aplicamos uma força constante $\vec{F}$ ao longo de uma trajetória, então, em cada momento, somente aquela parte de $\vec{F}$ que age na direção de $\vec{v}$ da trajetória contribui para o trabalho feito por $\vec{F}$. Neste caso, o trabalho W é dado por

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle.$$

Proposição 3.32 *Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores de $\mathbf{V}$ com $\vec{a} \neq \vec{0}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \|\vec{b}\| \cos \theta \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2};$
2. $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{c};$
3. $\text{Pr}_{\vec{a}}(x \vec{b}) = x \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b};$
4. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} \rangle.$

Prova. 1. Pela figura.

o comprimento da $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ é

$$\|\vec{b}\| \cos \theta$$

e

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

é um vetor de comprimento unitário na direção de $\vec{a}$. Logo,

$$\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \|\vec{b}\| \cos \theta \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.$$

2. Vamos primeiro ver geometricamente,

Seja

$$\pi = \{\vec{v} \in \mathbf{V} : \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = 0\}$$

o plano perpendicular a $\vec{a}$. Como

$$\vec{b} - \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} \in \pi \text{ e } \vec{c} - \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{c} \in \pi$$

temos que

$$(\vec{b} + \vec{c}) - (\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{c}) = (\vec{b} - \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}) + (\vec{c} - \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{c}) \in \pi$$

Por outro lado, o único vetor $\vec{v} \in \mathbf{V}$ tal que

$$(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{v} \in \pi$$

é, por definição, a projeção $\vec{b} + \vec{c}$ sobre $\vec{a}$, a saber: $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c})$. Segue que

$$\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{c}.$$

3. É similar a 2. Para provar 4. Seja θ o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Como o ângulo entre $\vec{a}$ e $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ é igual a 0° , obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} \rangle &= \|\vec{a}\| \|\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}\| \cos 0^\circ \\ &= \|\vec{a}\| \|\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}\| \\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.33 *Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores quaisquer de $\mathbf{V}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$;
2. $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$;
3. $\langle \vec{a}, x \vec{b} \rangle = x \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$;
4. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ se, e somente se, $\vec{a} = \vec{0}$.
5. $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*).
6. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (*Desigualdade Triangular*).

Prova. Vamos provar apenas os itens 2. e 5. Se $\vec{a} = \vec{0}$, nada há para ser provado. Se $\vec{a} \neq \vec{0}$, então

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} &= \text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) \\
 &= \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{c} \\
 &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \\
 &= \left(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \right) \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.
 \end{aligned}$$

Assim, comparando os coeficientes, obtemos que

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle.$$

Agora, vamos provar 5., se $\vec{a} = \vec{0}$, nada há para ser provado. Se $\vec{a} \neq \vec{0}$, então a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$, satisfaz $f(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como

$$\begin{aligned}
 \|\vec{b} - t\vec{a}\|^2 &= \langle \vec{b} - t\vec{a}, \vec{b} - t\vec{a} \rangle \\
 &= \langle \vec{b}, \vec{b} - t\vec{a} \rangle - t \langle \vec{a}, \vec{b} - t\vec{a} \rangle \\
 &= \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - t \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - t \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + t^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\
 &= \|\vec{b}\|^2 - 2t \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + t^2 \|\vec{a}\|^2
 \end{aligned}$$

temos que

$$\|\vec{a}\|^2 t^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + \|\vec{b}\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função quadrática $f(t)$ não pode ter duas raízes reais distintas. Assim, o discriminante de $f(t)$ deve ser menor do que ou igual zero e, assim,

$$\left(-2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right)^2 - 4 \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right)^2 \leq \left(\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \right)^2.$$

Portanto, extraindo a raiz quadrada desta desigualdade, obtemos que

$$\left| \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|.$$

■

Exemplo 3.34 *Mostrar que um paralelogramo é um losango, se e somente se, suas diagonais são ortogonais.*

Solução. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores gerando o paralelogramo, conforme figura.

Então $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ são as diagonais. Como

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

temos que

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Leftrightarrow \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 0.$$

Exemplo 3.35 *Mostrar que todo ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.*

Solução. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores mostrados na figura.

Como $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ temos, pelo Exemplo 3.34, que

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 0,$$

isto é,

$$\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 3.36 *Sejam ABC um triângulo qualquer e D um ponto qualquer no lado AB . Mostrar que $\|\overrightarrow{CD}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$ ou $\|\overrightarrow{CD}\| \leq \|\overrightarrow{BC}\|$.*

Solução. Pelo Exercício 8, temos que

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{a}{1+a}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{1+a}\overrightarrow{BC}.$$

Assim, pela desigualdade triangular,

$$\|\overrightarrow{CD}\| \leq \frac{a}{1+a}\|\overrightarrow{AC}\| + \frac{1}{1+a}\|\overrightarrow{BC}\|.$$

Como em um triângulo qualquer ABC , $\|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{BC}\|$ ou $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$, temos que

$$\|\overrightarrow{CD}\| \leq \frac{a}{1+a}\|\overrightarrow{BC}\| + \frac{1}{1+a}\|\overrightarrow{CD}\| = \left(\frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+a}\right)\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|.$$

3.8 Bases ortogonais

Seja $\overrightarrow{u} \in \mathbf{V}$ um vetor qualquer. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é *vetor unitário* se

$$\|\overrightarrow{u}\| = 1.$$

Se $\overrightarrow{v} \in \mathbf{V}$ é um vetor qualquer não nulo, então

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

é um vetor unitário de mesma direção que $\overrightarrow{v}$. Neste caso, dizemos que $\overrightarrow{u}$ é a *normalização* de $\overrightarrow{v}$.

Seja

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$$

uma base de $\mathbf{V}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base ortogonal* de $\mathbf{V}$ se

$$\langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_3 \rangle = \langle \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3 \rangle = 0,$$

isto é, os vetores $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ e $\overrightarrow{e}_3$ são dois a dois ortogonais. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base ortonormal* ou *sistema de coordenadas cartesianas* de $\mathbf{V}$ se $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal e

$$\langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

onde δ_{ij} é o *símbolo de Kronecker*, isto é, os vetores $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ e $\overrightarrow{e}_3$ são dois a dois ortogonais e unitários.

Proposição 3.37 *Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbf{V}$. Então*

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{v}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3, \forall \vec{v} \in \mathbf{V}.$$

Prova. Dado $\vec{v} \in \mathbf{V}$ existem únicos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle &= \langle x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \vec{e}_j \rangle \\ &= x_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_j \rangle + x_2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_j \rangle + x_3 \langle \vec{e}_3, \vec{e}_j \rangle \\ &= x_j, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{v}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3. \quad \blacksquare$$

Observação 3.38 *O escalar $x_j = \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle$ é chamado o coeficiente de Fourier de $\vec{v}$ em relação a $\vec{e}_j$.*

Proposição 3.39 *Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbf{V}$. Se*

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \text{ e } \vec{v} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3,$$

então:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$;
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$;
3. *O menor dos dois ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é*

$$\theta = \arccos \left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \right);$$

4. $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$.

Prova. Vamos provar apenas o item 1.

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \sum_{i=1}^3 y_i \vec{e}_i \rangle \\ &= x_1 \langle \vec{e}_1, \sum_{i=1}^3 y_i \vec{e}_i \rangle + x_2 \langle \vec{e}_2, \sum_{i=1}^3 y_i \vec{e}_i \rangle + x_3 \langle \vec{e}_3, \sum_{i=1}^3 y_i \vec{e}_i \rangle \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{aligned}$$



Seja

$$\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$$

uma base qualquer de $\mathbf{V}$. Escolhendo $\vec{u}_1 = \vec{a}$, já vimos que o vetor

$$\vec{u}_2 = \vec{b} - \frac{\langle \vec{b}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1$$

é ortogonal ao vetor $\vec{u}_1$ e claramente $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são linearmente independentes e estão no plano gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Assim, os vetores coplanares a $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são da forma

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2,$$

para alguns $x, y \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\langle \vec{c} - (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2), \vec{u}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\langle \vec{c}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}.$$

Analogamente,

$$\langle \vec{c} - (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2), \vec{u}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\langle \vec{c}, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2}.$$

Assim, o vetor

$$\vec{u}_3 = \vec{c} - \frac{\langle \vec{c}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{c}, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2$$

é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$. Portanto,

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbf{V}$. Este processo de ortogonalização é conhecido como o *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Conclusão. A partir de uma base qualquer de $\mathbf{V}$ podemos obter uma base ortogonal de $\mathbf{V}$.

Sejam A , B e C pontos no espaço tais que

$$\mathcal{B} = \{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$$

seja uma base ortonormal de $\mathbf{V}$. Vamos definir os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ como:

$$\vec{i} = \overrightarrow{OA}, \vec{j} = \overrightarrow{OB} \text{ e } \vec{k} = \overrightarrow{OC}.$$

Portanto, os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ satisfazem às seguintes relações:

$$\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0 \text{ e } \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = 1.$$

Neste caso, dizemos que

$$\mathcal{B} = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$$

é a *base canônica* de $\mathbf{V}$.

Sejam P um ponto qualquer no espaço e $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Então existem únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} x &= \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta_1, \text{ onde } \theta_1 = \angle(\vec{v}, \vec{i}); \\ y &= \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta_2, \text{ onde } \theta_2 = \angle(\vec{v}, \vec{j}); \\ z &= \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta_3, \text{ onde } \theta_3 = \angle(\vec{v}, \vec{k}). \end{aligned}$$

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ são chamados de *ângulos diretores* do vetor $\vec{v}$ e os cossenos $\cos \theta_1, \cos \theta_2$ e $\cos \theta_3$ são chamados de *cossenos diretores* do vetor $\vec{v}$.

Assim, qualquer vetor pode ser escrito de modo único em termos de suas coordenadas cartesianas. Portanto, as coordenadas (x, y, z) de um ponto P em $\mathbb{R}^3$ podem ser identificadas com o vetor

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Neste caso, denotamos o vetor $\vec{v}$ por

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

Uma base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ é *positiva* se ela tem a mesma orientação da base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Caso contrário, dizemos que ela é uma base *negativa*.

Exemplo 3.40 Sejam $\vec{a} = (2, 3, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 2)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

1. Mostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
2. Escreva o vetor $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
3. $\mathcal{B}$ é uma base positiva de $\mathbb{R}^3$?

Solução. Para mostrar 1., basta provar que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}.$$

Então

$$\begin{aligned} x(2, 3, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, 1, 2) &= (0, 0, 0) \\ &\Downarrow \\ (2x + y, 3x + z, y + 2z) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, o problema de determinar se os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI é equivalente a resolver o sistema homogêneo de equações lineares (3.5). Para isto, consideremos a matriz dos coeficientes do sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo a matriz $\mathbf{A}$ à forma em escada, nosso sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Portanto, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI.

2. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Então

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &= x(2, 3, 0) + y(1, 0, 1) + z(0, 1, 2) \\ &\Downarrow \\ (1, 1, 1) &= (2x + y, 3x + z, y + 2z) \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Assim, o problema de determinar se o vetor $\vec{v}$ os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é equivalente a resolver o sistema não homogêneo de equações lineares (3.6). Para isto, consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 3 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo a matriz $\mathbf{A}'$ à forma em escada, nosso sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Portanto,

$$\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}.$$

3. Por definição dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, obtemos a matriz mudança de base

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(\mathbf{M}) = -8$ temos que a base $\mathcal{B}$ é negativa.

EXERCÍCIOS

1. Dados

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \text{ e } \vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{k}.$$

Determine o vetor $\vec{c}$ tal que

$$\vec{a} + 2\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}.$$

2. Sejam

$$\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \text{ e } \vec{b} = x\vec{i} + y^2\vec{j} - y\vec{k}.$$

Determinar x e y de modo que $\vec{b}$ tenha sentido contrário a $\vec{a}$ e seja quatro vezes maior do que $\vec{a}$.

3. Sejam

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}, \vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

e

$$D = \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right).$$

(a) Mostrar que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD se, e somente se, $D = 0$.

(b) Mostrar que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI se, e somente se, $D \neq 0$.

4. Sejam

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}, \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k} \text{ e } \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

(a) O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Escreva o vetor $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ como combinação linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

5. Sejam $A(1, 2, 4)$, $B(2, 3, 2)$ e $C(2, 1, -1)$.

(a) Os pontos A , B e C são vértices de um triângulo?

(b) Determinar D de modo que $ABCD$ seja um paralelogramo.

(c) Determinar o ponto de interseções das diagonais deste paralelogramo.

6. Dê exemplo de dois vetores unitários que tenham a mesma direção que $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

7. Sejam $A(3, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ e $C(-1, y, 2)$. Determine y de modo que A , B e C sejam colineares.

8. Sejam $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Dê exemplo de dois vetores cujas normas sejam o triplo da norma $\vec{a} + \vec{b}$.

9. Sejam

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{j} + \vec{k} \text{ e } \vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

(a) Mostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinar as coordenadas de $\vec{u} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$ nesta base.

10. Determinar se as bases são positivas ou negativas.

(a) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

(b) $\{3\vec{i}, -\vec{j} - \vec{k}, -2\vec{i} - 5\vec{k}\}$;

- (c) $\{\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\}$;
 (d) $\{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{k}\}$.

11. Verificar se os pontos $A(2, 2, 1)$, $B(3, 1, 2)$, $C(2, 3, 0)$ e $D(2, 3, 2)$ são coplanares.
 12. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer. Mostrar que

$$\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2.$$

13. Seja ABC um triângulo qualquer. Mostrar a Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta,$$

onde

$$a = \|\vec{BC}\|, b = \|\vec{AC}\|, c = \|\vec{AB}\| \text{ e } \theta = \angle(\vec{AB}, \vec{AC}).$$

14. Calcular as seguintes somas e diferenças:

- (a) $(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) + (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$
 (b) $(-\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}) + (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + (\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$
 (c) $(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) - (6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$
 (d) $(\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) - (2\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}) + (3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k})$.

15. Sejam $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determinar vetores unitários paralelos aos vetores

- (a) $\vec{a} + \vec{b}$
 (b) $\vec{a} - \vec{b}$
 (c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

16. Calcular a norma de cada um dos seguintes vetores:

- (a) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$
 (b) $\vec{b} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$
 (c) $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

17. Mostrar que os pontos $A(1, 2, 2)$, $B(3, 3, 4)$, $C(4, 5, 3)$ e $D(2, 4, 1)$ são os vértices de um paralelogramo.

18. Dados os pontos $A(2, 1, 5)$ e $B(3, 6, 2)$, escreva o vetor $\vec{AB}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Qual é a norma de $\vec{AB}$.

19. Calcular os seguintes produtos internos:

- (a) $\langle \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} \rangle$
 (b) $\langle -\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}, 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \rangle$
 (c) $\langle 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, 6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \rangle$.

20. Determinar o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \text{ e } \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

21. Determinar o valor de x para o qual os vetores $x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ sejam perpendiculares.

22. Determinar que não existe um número real x tal que os vetores $x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ sejam perpendiculares.

23. Determinar o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

- (a) $2\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}$
 (b) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, -2\vec{j} - 2\vec{k}$
 (c) $3\vec{i} + 3\vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

24. Determinar os ângulos do triângulo cujos vértices são os pontos

$$A(3, 2, 1), B(3, 2, 2) \text{ e } C(3, 3, 2).$$

25. Verificar se os seguintes vetores são LI:

- (a) $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
 (b) $3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $4\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

26. Verificar se os seguintes pontos são coplanares:

- (a) $A(2, 2, 1), B(3, 1, 2), C(2, 3, 0)$ e $D(2, 3, 2)$
 (b) $A(2, 0, 2), B(3, 2, 0), C(0, 2, 1)$ e $D(1, 2, 0)$.

27. Sejam O, A e B pontos quaisquer e P o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Mostrar que

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \|\overrightarrow{OP}\|^2 - \|\overrightarrow{PA}\|^2.$$

28. Sejam $\vec{v}$ um vetor não nulo qualquer e α, β e γ os ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Mostrar que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

29. Mostrar que, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores quaisquer, então

$$(a) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \right).$$

$$(b) \quad \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2 \left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \right).$$

$$(c) \quad \left| \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \right| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

30. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Mostrar que

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

(Sugestão: Faça

$$\vec{u} = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) \text{ e } \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

e use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.)

31. Mostrar que se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores não nulos, então pelo menos um dos três ângulos $\angle(\vec{c}, \vec{b})$, $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ e $\angle(\vec{a}, \vec{c})$ é menor do que $\frac{\pi}{3}$. (Sugestão: Assuma que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$ e calcule $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2$.)

3.9 Produto vetorial

Nesta seção vamos introduzir uma quarta operação entre elementos de $\mathbf{V}$. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não nulos de $\mathbf{V}$ e θ o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O *produto vetorial* (*externo*) de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, nesta ordem, é o único vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ que satisfaz às seguintes condições:

$$1. \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0;$$

$$2. \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin \theta|;$$

3. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD, então $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LI, então

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$$

é uma base positiva de $\mathbf{V}$.

Proposição 3.41 *Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores quaisquer de $\mathbf{V}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
2. $|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$ é igual ao volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \times (x\vec{b}) = x(\vec{a} \times \vec{b})$;
5. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$;

6. Se

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \text{ e } \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},$$

então

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (-a_1 b_3 + a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Prova. Para mostrar 1., basta observar que, se

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}\}$$

é uma base positiva de $\mathbf{V}$, então

$$\{\vec{b}, \vec{a}, -\vec{v}\}$$

é uma base positiva de $\mathbf{V}$.

2. Se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores LD, então o volume reduz-se a 0 e, assim, $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$. Suponhamos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores LI. Sejam $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ e $\phi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$, conforme figura.

O volume do paralelepípedo é o produto da área da base, a qual é igual a

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin \theta|,$$

pela altura h . Como

$$h = \left\| \text{Pr}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} \right\| = \|\vec{c}\| |\cos \phi|$$

temos que

$$\begin{aligned} \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| h &= \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| \|\vec{c}\| |\cos \phi| \\ &= \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| \|\vec{c}\| \cos \phi \\ &= \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| \|\vec{c}\| \cos \phi \\ &= \left| \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \right|. \end{aligned}$$

3. Primeiro, note que, na fórmula do volume do item 2. não importa a ordem dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, pois se

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$$

é uma base positiva de $\mathbf{V}$, então

$$\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\} \text{ e } \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$$

são bases positivas de $\mathbf{V}$, conforme figura.

Logo,

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Agora, sejam $\vec{v}$ um vetor qualquer de $\mathbf{V}$ e

$$\vec{u} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c}).$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \rangle - \langle \vec{v}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{v} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \rangle + \langle \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} \times \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \rangle - \langle \vec{v}, \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{c}) \right\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

4. É similar a 3. O item 5. segue da unicidade. Para provar 6, sejam $e_1 = \vec{i}$, $e_2 = \vec{j}$ e $e_3 = \vec{k}$. Então, pelos itens anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j (e_i \times e_j) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (-a_1 b_3 + a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \\ &= \vec{i} \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \vec{j} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \vec{k} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Observação 3.42 *O determinante do item 6 da Proposição acima foi calculado no sentido formal, isto é, expansão pela primeira linha. Note que ele não é um determinante real, pois a primeira linha são vetores e não números reais.*

Exemplo 3.43 *Sejam*

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \quad e \quad \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Determinar $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solução.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}. \end{aligned}$$

3.10 Produto Misto

Seja $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ordenada de $\mathbf{V}$. O *produto misto* de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, nesta ordem, é definido como

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

Seja $\phi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$. Se $\phi < \frac{\pi}{2}$, isto é, ϕ é um ângulo agudo, então $\|\vec{c}\| \cos \phi$ é a altura do paralelepípedo. Se $\phi > \frac{\pi}{2}$, isto é, ϕ é um ângulo obtuso, então $-\|\vec{c}\| \cos \phi$ é a altura do paralelepípedo, conforme figura. Assim,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0 \text{ ou } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

se $\mathcal{B}$ é positiva ou não. Como as bases

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ e } \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$$

são ambas positivas ou ambas negativas temos que

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle.$$

Portanto, o produto misto depende somente da ordem cíclica dos vetores e não da posição do produto escalar e do produto vetorial.

Proposição 3.44 *Sejam*

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \text{ e } \vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

vetores quaisquer de $\mathbf{V}$. Então

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right).$$

Prova. Como

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (-a_1 b_3 + a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (-a_1 b_3 + a_3 b_1) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= (b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 + (-b_1 c_3 + b_3 c_1) a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3 \\ &= a_1 \det \left(\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right) - a_2 \det \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + a_3 \det \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.45 *Determinar o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D .*

Solução. Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ os vetores mostrados na figura.

Então o volume do paralelepípedo gerado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é igual a duas vezes o volume do prisma $ABCDEF$, isto é,

$$V_p = \frac{1}{2} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|.$$

Note que o prisma é dividido em três tetraedros, a saber, $ABCD$, $BCDE$ e $CDEF$ com o mesmo volume, por exemplo, $ABCD$ e $BCDE$ têm faces congruentes ABD , BDE e o mesmo vértice C . Portanto, o volume do tetraedro é igual

$$V_t = \frac{1}{3} V_p = \frac{1}{6} \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right|,$$

ou seja, o volume do tetraedro é igual um sexto do volume do paralelepípedo gerado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Exemplo 3.46 Calcular a altura do tetraedro de vértices

$$A(-2, 2, -1), B(0, 1, 2), C(1, 1, 3) \text{ e } D(0, 0, 1)$$

relativa à face de vértices B , C e D .

Solução. Pela figura acima temos que

$$h = \left\| \text{Pr}_{\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}} \overrightarrow{BA} \right\| = \frac{\left| \langle \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA} \rangle \right|}{\left\| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right\|} = \frac{\left| [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}] \right|}{\left\| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right\|}.$$

Como $\overrightarrow{BA} = (-2, 1, -3)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{BD} = (0, -1, -1)$ temos que

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (1, 1, -1) \text{ e } [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}] = -2.$$

Portanto,

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ para os seguintes ternos de vetores:

- (a) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $c = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.
 (b) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + 1000\vec{j}$ e $c = 100\vec{i} - 200\vec{j}$.
 (c) $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{j}$ e $c = 4\vec{k}$.
 (d) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $c = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

2. Calcular o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A(2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B(4, 1, 3)$, $C(1, 3, 2)$ e $D(1, 2, 1)$.

3. Calcular os seguintes produtos vetoriais:

- (a) $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.
 (b) $(-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$.
 (c) $(2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) \times (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

4. Calcular a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(3, 2, 5)$.

5. Mostrar que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal, onde

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}), \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{k}), \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

Essa base é positiva ou negativa?

6. Calcular a área do triângulo com vértices $A(1, 2, 1)$, $B(3, 0, 4)$ e $C(5, 1, 3)$.

7. Determinar um vetor unitário perpendicular aos vetores

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ e } \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

8. Calcular os produtos $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})$ e $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c} \rangle$ quando $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

9. Calcular $\|\vec{c}\|$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\|\vec{b} \times \vec{c}\|$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, e o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

10. Use o produto misto para mostrar que se duas linhas quaisquer em um determinante de terceira ordem são iguais, então o valor desse determinante é zero.

11. Utilize o produto misto para mostrar que:

$$\det \begin{pmatrix} xa_1 & xa_2 & xa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

e

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + a'_1 & a_2 + a'_2 & a_3 + a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

12. Mostrar que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, com $\vec{a} = x\vec{i} - 2x\vec{j} + 2x\vec{k}$, $\vec{b} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$ e $\vec{c} = -2x\vec{i} + x\vec{j} + 2x\vec{k}$, é uma base ortogonal positiva se $x \neq 0$. Para que valor de x essa base é ortonormal?

13. O produto vetorial é associativo? Justifique sua resposta.

14. Seja $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{k}$. Calcular:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \vec{a} \times \vec{b}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{b}\|} \text{ e } \|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

15. Mostrar que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independente se, e somente se, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$.

16. Escreva o vetor $\vec{v} = 6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ como combinação linear dos vetores da base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ do Exercício 6.

17. Mostrar que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente independentes se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \end{pmatrix} \neq 0.$$

18. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer. Mostrar que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2.$$

19. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{c}$ vetores e x um escalar. Determinar todos os vetores $\vec{b}$ tais que

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \text{ e } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x.$$

20. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores, com $\vec{a} \neq \vec{0}$ e x um escalar. Provar ou dar um contra exemplo que

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \text{ e } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}.$$

21. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores quaisquer. Mostrar que:

- (a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$; (**Expansão de Grassmann**) (Sugestão: Mostre que

$$\langle \vec{v}, \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \rangle = \langle \vec{v}, (\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}) \rangle,$$

onde $\vec{v} = \vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, continue.)

- (b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \vec{b} - \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \vec{a}$;
 (c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$; (**Identidade de Jacobi**)
 (d) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$; (**Identidade de Lagrange**) (Sugestão: Note que

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}), \vec{a} \rangle$$

e use a.)

- (e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a}$.