

Capítulo 5

As Superfícies

O estudo das superfícies do espaço, iniciado com os planos no capítulo anterior, tem como sequência natural a classificação das superfícies que podem ser expressas por equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (5.1)$$

$A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J são constantes com A, B, C, D, E e F , não todas nulas. Uma equação desse tipo é a equação de uma quádrlica. Observe que a equação

$$\lambda Ax^2 + \lambda By^2 + \lambda Cz^2 + \lambda Dxy + \lambda Exz + \lambda Fyz + \lambda Gx + \lambda Hy + \lambda Iz + \lambda J = 0,$$

para $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{R}$, descreve o mesmo gráfico que a equação 5.1. Por meio de uma mudança adequada de referencial¹ o gráfico dado pela equação 5.1 pode ser descrito também por uma equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0, \quad (5.2)$$

que não contém termos em xy , xz ou yz .

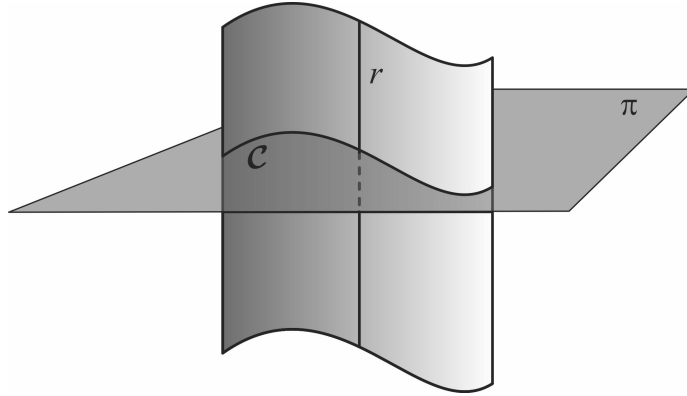
A equação 5.2 define um gráfico cujo estudo demanda, como se verá adiante, o conhecimento das cônicas, que são as curvas planas (de $\mathbb{R}^2$), descritas por equações de grau dois em duas variáveis, que é o assunto da seção 2.5 do capítulo 2. As superfícies cilíndricas e as superfícies de revolução que não são necessariamente superfícies quádrlicas também complementam nosso estudo.

5.1 Superfícies cilíndricas

Dada a curva $\mathcal{C}$ contida no plano π e r uma reta perpendicular ao plano π , que contém um ponto de $\mathcal{C}$, o cilindro de geratriz r e diretriz $\mathcal{C}$ é a união de todas as retas paralelas à

¹Um referencial ou sistema de coordenadas consiste de um ponto O' escolhido como origem e uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. As coordenadas dos pontos em relação a um referencial diferente sofrem uma variação, denominada mudança de referencial ou ainda mudança de coordenadas.

reta r , que contém um ponto de $\mathcal{C}$. A imagem intuitiva é a da reta geratriz se deslocando ao longo da curva, mantendo-se perpendicular ao plano



Observação 5.1 Se, por exemplo, π é o plano xy e a curva $\mathcal{C}$ é descrita pela equação $F(x, y) = 0$, então o ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao cilindro correspondente se, e somente se, $Q = (x, y)$ pertence à curva $\mathcal{C}$. É evidente, a partir daí, que a equação da curva é a mesma que descreve o cilindro. A única diferença é que, no primeiro caso, o universo em questão é descrito por duas variáveis (o $\mathbb{R}^2$), e, o segundo é descrito por três variáveis. Desse modo, como uma das variáveis não consta da equação, qualquer valor a ela atribuído deixa inalterado o valor da expressão $F(x, y)$, daí a conclusão feita.

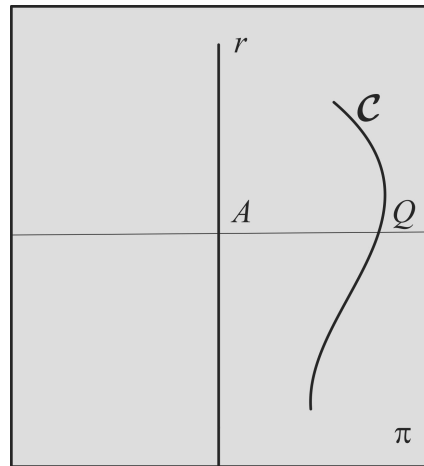
Observação 5.2 O nome atribuído à curva $\mathcal{C}$ qualifica o cilindro. A título de exemplo, se a curva é uma circunferência, o cilindro é circular, se é elipse, o cilindro é elíptico. No geral, se a curva é uma cônica, então o cilindro é quádrico.

Exemplos 5.3 Em cada item a seguir, classifique o cilindro, dada a curva $\mathcal{C}$:

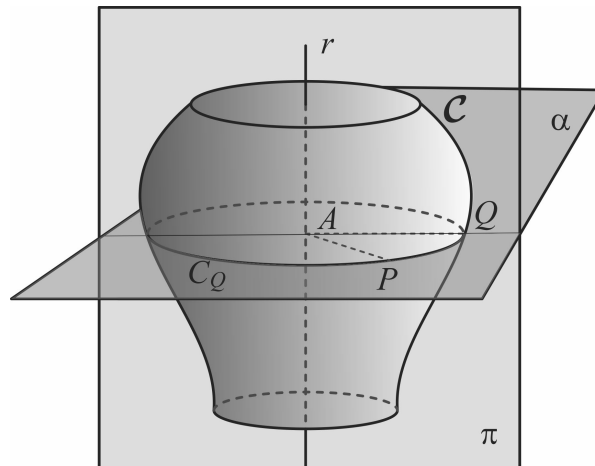
1. $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1, z = 0$.
2. $\mathcal{C} : z = 4 - x^2, y = 0$.
3. $\mathcal{C} : y = 3x, z = 0$.

5.2 Superfícies de revolução

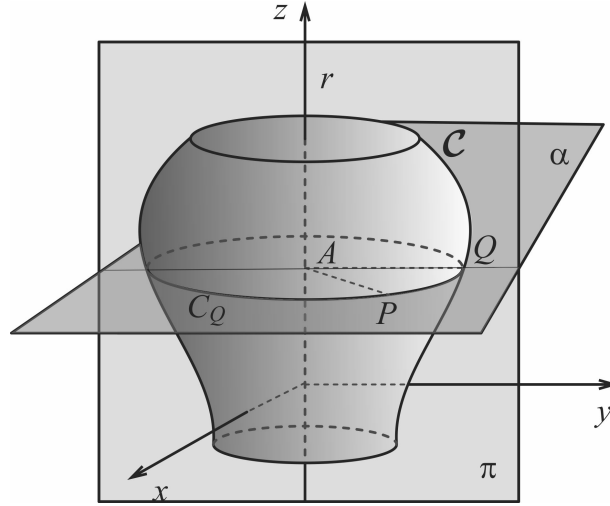
Seja $\mathcal{C}$ uma curva e r uma reta, ambas, $\mathcal{C}$ e r , contidas em um plano π . Para cada ponto Q da curva $\mathcal{C}$, seja A o ponto de r que satisfaz à condição de que o vetor $\overrightarrow{AQ}$ seja perpendicular à reta r , conforme ilustrado na figura a seguir



Já vimos que existe um único plano α perpendicular à reta r que contém o ponto Q (observe que α contém também o ponto A). Se girarmos o ponto Q em torno da reta r , ele percorrerá os pontos P da circunferência C_Q no plano α , como se pode verificar na ilustração a seguir.



A superfície de revolução da geratriz $\mathcal{C}$ em torno do eixo de revolução r é a reunião dos círculos C_Q para todos os pontos Q pertencentes curva $\mathcal{C}$. Observe que o raio R de cada círculo C_Q é a distância do ponto Q à reta r , que é o mesmo que a norma do vetor $\overrightarrow{AQ}$. Desse modo, a condição necessária e suficiente para que um ponto P pertença à superfície é que ele pertença a um tal círculo. Para que possamos ter êxito em obter uma condição mais simples que a descrita, e que seja ao mesmo tempo uma descrição analítica, precisamos tomar alguns cuidados iniciais. Em primeiro lugar, consideramos o eixo de rotação como sendo um dos eixos coordenados e que o plano π seja um plano coordenado (evidentemente contendo r). Tomamos por base a reta r como sendo o eixo z e o plano π como sendo o plano yz , dado, como já visto, pela equação $x = 0$. Nesse caso, o plano α é um plano paralelo ao plano xy , como ilustra a figura.



De início, suponha que a curva seja dada por uma equação do tipo $y = f(z)$ (poderia ser dada implicitamente por uma equação do tipo $F(y, z) = 0$). Nesse caso, é preciso observar que a equação simplesmente diz que o ponto Q tem a sua segunda coordenada descrita em função da terceira. Observe também que, se o ponto P tem coordenadas (x, y, z) , então apenas a terceira coordenada tem o mesmo valor que a terceira coordenada do ponto Q , a menos que se tenha $P = Q$. Na verdade $Q = (0, f(z), z)$ e $A = (0, 0, z)$. Note que o problema se simplificou bastante: o círculo ao qual o ponto P pertence, é descrito pela condição $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$, uma vez que seu raio é $R = \|\overrightarrow{AQ}\| = |f(z)|$.

5.3 Esfera e Elipsoide

Nessa seção retomamos a equação 5.2 da página 169, para o caso em que A , B e C têm mesmo sinal e, por conta da observação que segue à equação anterior (5.1), podemos, sem perda de generalidade, considerar os três valores positivos. Usando o já conhecido método de “completamento de quadrados”, podemos reescrever a equação 5.2 na forma

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(z - z_0)^2 = H \quad (5.3)$$

Sendo que o valor de H , quando negativo nos diz que a equação representa o conjunto vazio e, quando é nulo representa o conjunto constituído unicamente pelo ponto (x_0, y_0, z_0) . Para valores positivos de H , a equação acima pode representar uma esfera de raio $R = \sqrt{\frac{H}{A}}$, caso se tenha também $A = B = C$ ou um elipsoide, caso contrário. Com a definição geométrica da esfera, tem-se uma descrição mais intuitiva e interessante, mas também pode ser visualizada reescrevendo a equação 5.3 assim:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

que representa a esfera de centro no ponto (x_0, y_0, z_0) e raio R . Observe que o lado esquerdo da equação é o quadrado da distância do ponto $P = (x, y, z)$ ao ponto $C = (x_0, y_0, z_0)$ e o lado direito é o quadrado do número real R .

Já o elipsoide pode ser descrito pela equação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Nos dois casos a figura é simétrica em relação ao seu centro, que é o ponto $C = (x_0, y_0, z_0)$.

Exemplo 5.4 A equação $x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 4z + 10 = 0$ representa a esfera de centro no ponto $(3, -1, 2)$ e raio 2, pois pode ser reescrita assim: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Exemplo 5.5 Verifique que a equação $x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 4z + 14 = 0$ representa o conjunto $\{(3, -1, 2)\}$ e que a equação $x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 4z + 20 = 0$ representa o conjunto vazio.

Exemplo 5.6 A equação $9x^2 - 36x + 4y^2 + 24y + 36z^2 - 72z + 108 = 0$ representa o elipsoide de centro no ponto $(2, -3, 1)$ pois pode ser reescrita assim: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} + (z-1)^2 = 1$.

No caso do elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados produzem as curvas de nível em relação a esses planos, instrumento que auxilia a sua visualização. Consideremos a interseção com o plano $\alpha_k : z = k$, k um número real fixado. O procedimento consiste em substituir a variável z por esse valor o que produz, nesse plano, a curva dada pelas equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - k^2}{c^2}.$$

Nesse caso, há três casos a serem considerados:

Caso (i) ($|k| < c$) Nesse caso, temos que $\frac{c^2 - k^2}{c^2} > 0$ e a curva de nível é dada, no plano pela equação

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

para $\alpha = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - k^2}$ e $\beta = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - k^2}$ (verifique isso!), que é a equação de uma curva que pode ser circunferência ou elipse, conforme se tenha $a = b$ ou $a \neq b$.

Caso (ii) ($|k| = c$)

Caso (iii) ($|k| > c$) .

5.4 Hiperbolóides

A segunda possibilidade natural para o estudo da equação 5.2, página 169, corresponde ao caso em que os coeficientes dos termos de grau dois são não nulos e de sinais diferentes. Há três possibilidades, duas das quais correspondem aos hiperbolóides e a terceira corresponde aos cones que podem, sem perda de generalidade, ser representadas pelas três equações seguintes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Esse tipo de estudo se repetirá no estudo das superfícies quádricas, desse ponto em diante.

5.4.1 Hiperboloide de uma folha

A interseção da superfície S descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ e } c > 0. \quad (5.4)$$

com o plano $z = k$, k um número real fixado é descrito pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}. \quad (*)$$

Como $\frac{c^2 + k^2}{c^2} > 0$ a equação (*) pode ser reescrita na forma

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

para $\alpha = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + k^2}$ e $\beta = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + k^2}$ (verifique isso!), que é a equação de uma elipse no plano xy .

A interseção de S com o plano $y = k$, k um número real fixado é descrito pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \frac{b^2 - k^2}{b^2}. \quad (**)$$

Há dois casos a considerar:

Caso (i) ($|k| \neq b$) Isso significa que $b^2 - k^2 \neq 0$ e a equação (**) pode ser reescrita numa das duas formas

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 1$$

ou

$$\frac{z^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1,$$

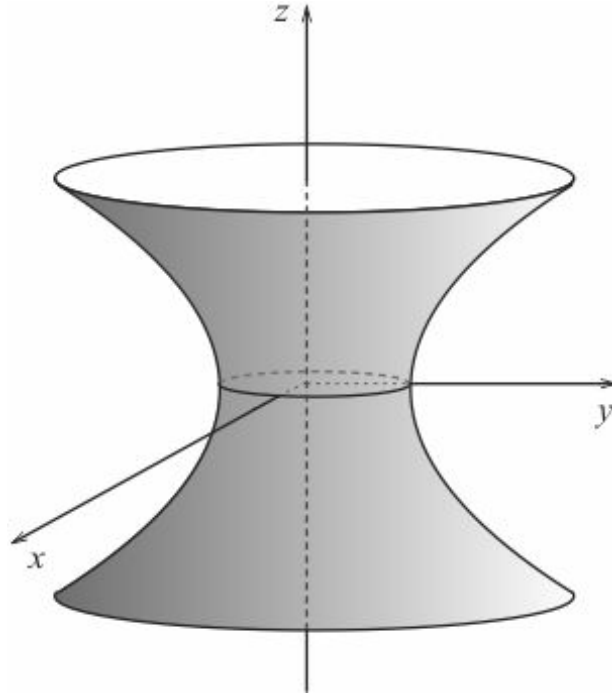
$\alpha = \frac{a}{b}\sqrt{|b^2 - k^2|}$ e $\beta = \frac{c}{b}\sqrt{|b^2 - k^2|}$. Em ambos os casos a curva representada é uma hipérbole no plano xz .

Caso (ii) ($|k| = b$) Isso significa que $b^2 - k^2 = 0$ e a equação $(**)$ pode ser reescrita na forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$$

que é a representação cartesiana da união das retas $z = \frac{c}{a}x$ e $z = -\frac{c}{a}x$ no plano xz .

Essa análise nos permite concluir que o hiperboloide representado pela equação (5.4) tem um esboço do tipo da figura a seguir



Observação 5.7 As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperboloides de uma folha.

5.4.2 Hiperboloide de duas folhas

A interseção da superfície S descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ e } c > 0. \quad (*)$$

com o plano $z = k$, k um número real fixado é descrito pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}.$$

Como $\frac{c^2+k^2}{c^2} > 0$ a equação * pode ser reescrita na forma

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

para $\alpha = \frac{a}{c}\sqrt{c^2+k^2}$ e $\beta = \frac{b}{c}\sqrt{c^2+k^2}$, que é a equação de uma hipérbole no plano xy .

A interseção de S com o plano $y = k$, produz uma hipérbole no plano xz , semelhante à obtida no início.

Já a interseção com o plano $x = k$ produz a equação

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2 - a^2}{a^2} \quad (**)$$

que, a depender do valor de k produz três tipos de conjuntos, estudados nos três casos a seguir.

Caso (i) ($|k| < a$) Isto é equivalente a $k^2 - a^2 < 0$ o que significa que o plano $x = k$ não intersepta a superfície S (interseção vazia).

Caso (ii) ($|k| = a$) Isto é equivalente a $k = a$ ou $k = -a$ e a equação (**) se reduz a

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

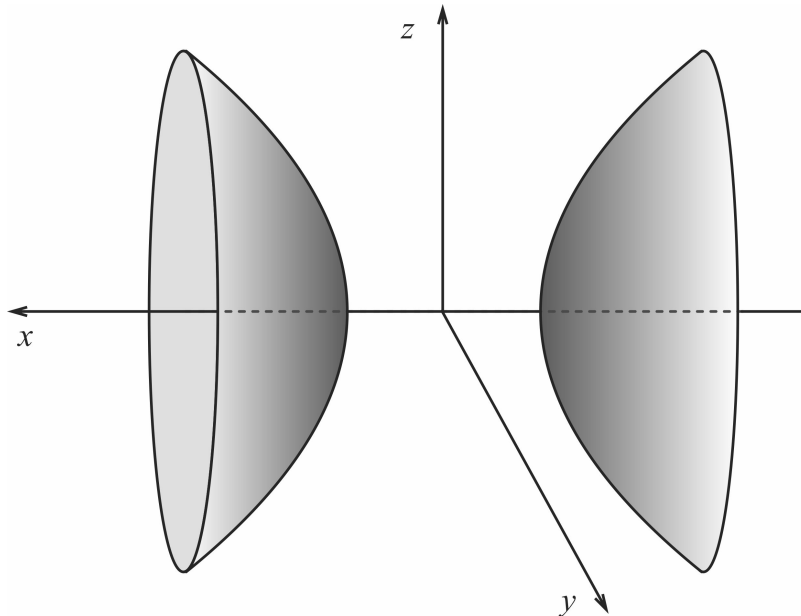
e desse modo, a interseção pode ser constituída pelo ponto $(-a, 0, 0)$ ou então pelo ponto $(a, 0, 0)$.

Caso (iii) ($|k| > a$) Isto é equivalente a $k^2 - a^2 > 0$ e a equação (**) pode ser reescrita na forma

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1,$$

para $\alpha = \frac{b}{a}\sqrt{k^2 - a^2}$ e $\beta = \frac{c}{a}\sqrt{k^2 - a^2}$, que é a equação de uma elipse no plano yz .

O desenvolvimento obtido sugere que S seja denominada hiperboloide de duas folhas com centro na origem e tem um esboço do tipo



Observação 5.8 *As equações*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperboloides de duas folhas.

5.5 Cones

A superfície S descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (5.5)$$

é um cone circular ou elíptico, conforme se tenha $a = b$ ou $a \neq b$. A interseção de S com o plano xy , se dá na origem, $(0, 0, 0)$ e com planos paralelos a xy , dados por equações do tipo $z = k$, k um número real não nulo, as interseções são elipses ou circunferências, conforme o caso, uma vez que a equação (5.5) fica assim:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}.$$

Já as interseções com os planos $x = k$ e $y = k$ ocorrem em hipérboles, se $k \neq 0$ ou pares de retas, se $k = 0$.

5.6 Paraboloides

Finalmente voltamos à equação (5.2) da página 169, dessa vez para estudar o caso em que um dos coeficientes de termo de grau dois seja nulo. A equação representativa desse caso pode ser escrita numa das formas:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= cz \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= cz, \end{aligned}$$

a , b e c números reais não nulos, a e b positivos, As outras possibilidades correspondem a permutações das variáveis.

5.6.1 Paraboloide elíptico ou circular

A interseção da superfície S de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com o plano $z = k$, para o número real k fixado é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck,$$

cujo estudo demanda a consideração de três casos.

Caso (i) ($ck > 0$) Nesse caso, fazendo $\alpha = a\sqrt{ck}$ e $\alpha\beta = b\sqrt{ck}$, a interseção é descrita pela equação

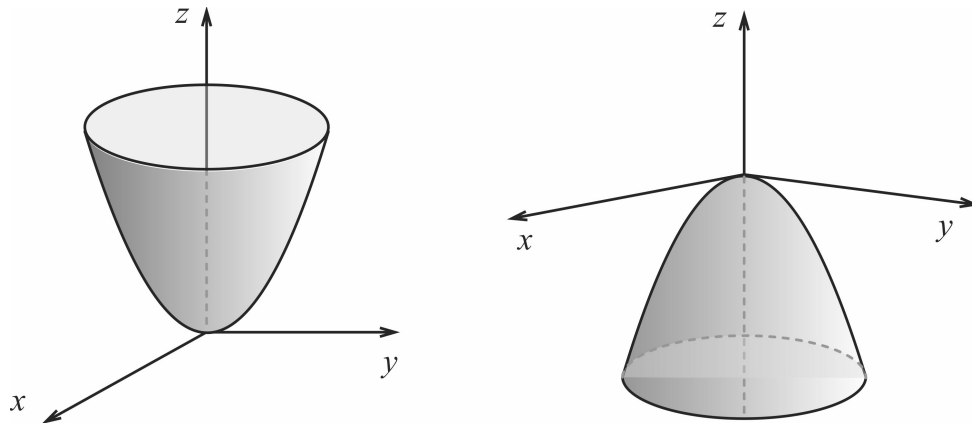
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Conforme ocorra ou não a igualdade entre α e β , essa equação representa circunferência ou elipse no plano xy .

Caso (ii) ($ck = 0$) Nesse caso a interseção se dá no ponto $(0, 0, 0)$.

Caso (iii) ($ck < 0$) Nesse caso, o plano $z = k$ não intersepta a superfície S uma vez que a equação resultante é contraditória. Também se diz que a interseção é $\emptyset$ (o conjunto vazio).

Um esboço da superfície S é de um dos tipos a seguir, conforme o sinal de c .



5.6.2 Paraboloide hiperbólico

A superfície S dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (5.6)$$

é denominada sela ou parabolóide hiperbólico, pelas razões expostas a seguir. No caso em que o valor do número real c seja positivo, as interseções com planos $y = k$ e $x = k$ com o valor de k positivo, são parábolas com a concavidade voltada para o lado positivo ou negativo de z , respectivamente, uma vez que, nos casos citados, temos as equações nas variáveis x e z ou x e y :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} &= ck \\ -\frac{y^2}{b^2} &= ck\end{aligned}$$

e a interseção com o planos dado por $z = k$ demanda a observação de dois casos, conforme o valor de k e de c :

Caso (i) ($ck \neq 0$) Nesse caso, temos a interseção dada pela equação

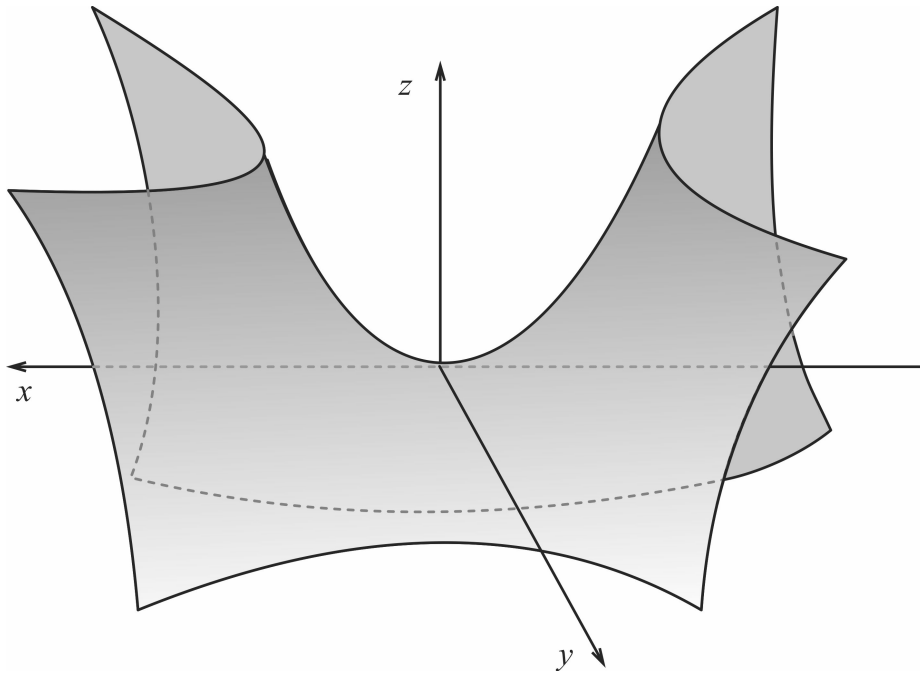
$$\frac{x^2}{a^2 ck} - \frac{y^2}{b^2 ck} = 1$$

que, independentemente do sinal de ck , é equação de uma hipérbole.

Caso (ii) ($ck = 0$) Nesse caso, a interseção é um par de retas, dadas pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

O parabolóide hiperbólico S dado pela equação (5.6) tem o seguinte tipo de esboço, para um valor positivo do número real c :



Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J. L. M., *Geometria euclidiana plana*. SBM, Rio de Janeiro, 1985.
- [2] Cabral, H., *Geometria analítica*, UFPE, 1979.
- [3] Efimov, N., *Elementos de geometria analítica*, Livraria Cultura Brasileira Ltda, São Paulo, 1972.
- [4] Campos, M. S. e Duarte Filho, J. C., *Cálculo vetorial e geometria analítica*, Nota de Aulas, UFPB, 1990.