

Capítulo 4

Retas e Planos

Neste capítulo veremos como utilizar a teoria dos vetores para caracterizar retas e planos, a saber, suas equações, posições relativas, ângulos e distâncias.

4.1 A reta

Sejam P_0 um ponto e $\vec{a}$ um vetor não nulo. Já vimos que a reta r que passa em P_0 na direção do vetor $\vec{a}$ é dada por

$$\begin{aligned} r &= \{ \vec{p}_0 + t \vec{a} : t \in \mathbb{R} \} \\ &= \vec{p}_0 + \mathbb{R} \vec{a}, \end{aligned}$$

onde $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$.

Seja X um ponto em $\mathbb{R}^3$. Então $X \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} - \vec{p}_0 = t \vec{a}$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + t \vec{a}, \quad (4.1)$$

onde $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. A equação (4.1) é chamada *equação vetorial* da reta r , t o *parâmetro* do ponto em relação a P_0 e $\vec{a}$ o *vetor diretor* da reta r .

Observação 4.1 Se $\vec{a}$ é um vetor na direção de uma reta r e $\lambda \in \mathbb{R}^*$, então $\lambda \vec{a}$ também é um vetor na direção da reta r .

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ e $X(x, y, z)$, então, pela equação (4.1), obtemos que

$$r : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.2)$$

As equações (4.2) são chamadas *equações paramétricas* da reta r .

Observação 4.2 1. Se $a_1 a_2 a_3 \neq 0$, então pelas equações (??), obtemos que

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2} \quad e \quad t = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Logo,

$$r : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (4.3)$$

As equações (4.3) são chamadas equações semétricas da reta r . Além disso, as coordenadas a_1 , a_2 e a_3 do vetor $\vec{a}$ são chamadas parâmetros diretores da reta r e os cossenos diretores do vetor $\vec{a}$ são chamadas cossenos diretores da reta r . Note, também, que

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad e \quad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

implicam que

$$y = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0) + y_0 \quad e \quad z = \frac{a_3}{a_1}(x - x_0) + z_0. \quad (4.4)$$

As equações (4.4) são chamadas equações reduzidas da reta r .

2. Se $a_1 a_2 \neq 0$ e $a_3 = 0$, então, pelas equações (??), obtemos que

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2} \quad e \quad z = z_0.$$

Logo,

$$r : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad e \quad z = z_0. \quad (4.5)$$

As equações (4.5) são chamadas equações pseudo-semétricas da reta r . Neste caso, a equação

$$r : ax + by + c = 0,$$

onde $a = -a_2$, $b = a_1$ e $c = -(ax_0 + by_0)$, é chamada de equação cartesiana ou normal da reta r no plano $z = z_0$ (paralelo ao plano xOy) com vetor normal

$$\vec{n} = a \vec{i} + b \vec{j} = (a, b, 0).$$

Exemplo 4.3 Determinar as equações paramétricas e simétricas da reta que passa em $P_0(1, -2, 3)$ na direção do vetor

$$\vec{a} = 4 \vec{i} + \vec{j} - 3 \vec{k}.$$

Solução. Seja r a reta que passa em P_0 e está na direção do vetor

$$\vec{a} = 4 \vec{i} + \vec{j} - 3 \vec{k}.$$

Então as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consequentemente, as equações simétricas de r são:

$$r : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}.$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa em $P_0(1, 2, 2)$ na direção do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
2. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa em $P_0(1, 0, 1)$ na direção do vetor $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Verificar se o ponto $A(1, -2, 1)$ pertence a esta reta.
3. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa em $P_0(1, 2, 3)$ na direção do vetor $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$. Verificar se os pontos $A(5, 0, -3)$ e $B(-1, 3, 2)$ pertencem a esta reta. Obtenha um outro ponto C desta reta distinto dos anteriores.
4. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelos pontos $A(1, 2, 3)$ e $B(5, 0, 6)$. Verificar se os pontos $C(9, -2, 9)$ e $D(9, 2, -3)$ pertencem a esta reta.
5. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta cuja equação vetorial é

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\vec{p}_0 = (1, 2, 3)$, $\vec{a} = (1, -1, 1)$ e $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$.

6. Determinar as equações paramétricas da reta cujas equações simétricas são

$$r : x - 1 = \frac{5y + 4}{2} = -6z + 9.$$

7. Determinar as equações simétricas da reta cujas equações paramétricas são

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 \\ z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

8. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(1, -1, 2)$ e pelo ponto médio do segmento $\overline{BC}$, onde $B(-1, 0, 1)$ e $C(5, 2, 1)$.
9. Seja $\vec{a}$ um vetor não nulo em $\mathbb{R}^3$. Mostrar que o conjunto

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}\}$$

representa uma reta se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares. Caso contrário, é um conjunto vazio.

10. Seja r uma reta em $\mathbb{R}^3$. Mostrar que existem vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$r = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}\}.$$

4.2 O plano

Sejam P_0 um ponto e $\vec{a}$, $\vec{b}$ vetores linearmente independentes. Já vimos que o plano π que passa em P_0 e é paralelo ou coincidente ao plano gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por

$$\begin{aligned}\pi &= \{\vec{p}_0 + s\vec{a} + t\vec{b} : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \vec{p}_0 + \mathbb{R}\vec{a} + \mathbb{R}\vec{b},\end{aligned}$$

onde $\vec{p} = \overrightarrow{OP_0}$.

Seja X um ponto de $\mathbb{R}^3$. Então $X \in \pi$ se, e somente se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad (4.6)$$

onde $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. A equação (4.6) é chamada *equação vetorial* do plano π e s, t os *parâmetros* do ponto P_0 .

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ e $X(x, y, z)$, então, pela equação (4.6),

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.7)$$

As equações (4.7) são chamadas *equações paramétricas* do plano π .

Observação 4.4 $X \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{P_0X}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente dependentes que é equivalente a $[\overrightarrow{P_0X}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$ ou ainda,

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

que por sua vez é equivalente à equação

$$\pi : ax + by + cz + d = 0, \quad (4.8)$$

sendo

$$\begin{aligned}a &= a_2b_3 - a_3b_2, b = a_3b_1 - a_1b_3, c = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ e} \\ d &= -(ax_0 + by_0 + cz_0).\end{aligned}$$

A equação (4.8) é chamada *equação cartesiana* do plano π .

Exemplo 4.5 Determinar as equações cartesianas e paramétricas do plano que passa por $P_0(1, -2, 3)$ e é paralelo ou coincidente ao plano gerado pelos vetores

$$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \text{ e } \vec{b} = -3\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Solução. Seja π o plano que passa em P_0 e está na direção do plano gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Então $X \in \pi$ se, e somente se, $[\overrightarrow{P_0X}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$ se, e somente se,

$$\det \left(\begin{bmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-2) - (y+2)28 + (z-3)(-12) = 0.$$

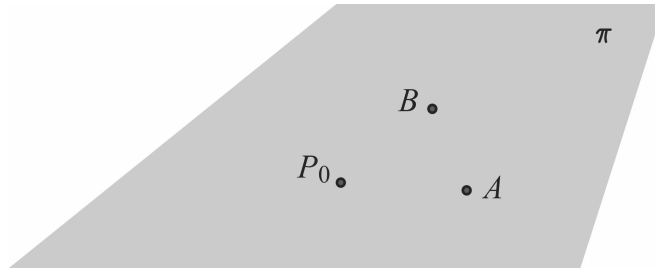
Logo, a equação cartesiana do plano π é

$$-2x - 28y - 12z - 18 = 0 \text{ ou } x + 14y + 6z + 9 = 0.$$

As equações paramétricas do plano π são:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = -2 + s - 3t \\ z = 3 - 3s + 7t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sejam P_0 , A e B três pontos não colineares. Seja π o plano determinado por P_0 , A e B , conforme figura



Assim, $X \in \pi$ se, e somente se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + s(\vec{a} - \vec{p}_0) + t(\vec{b} - \vec{p}_0),$$

onde $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ e $X(x, y, z)$, então

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + s(a_1 - x_0) + t(b_1 - x_0) \\ y = y_0 + s(a_2 - y_0) + t(b_2 - y_0) \\ z = z_0 + s(a_3 - z_0) + t(b_3 - z_0), \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observação 4.6 A condição $X \in \pi$ é equivalente aos vetores, $\overrightarrow{P_0X}$, $\overrightarrow{P_0A}$ e $\overrightarrow{P_0B}$ serem linearmente dependentes e ainda a ser nulo o produto misto $[\overrightarrow{P_0X}, \overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0B}]$ e isso acontece se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 - x_0 & a_2 - y_0 & a_3 - z_0 \\ b_1 - x_0 & b_2 - y_0 & b_3 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

e daí se deduz a equação cartesiana:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a &= (a_2 - y_0)(b_3 - z_0) - (a_3 - z_0)(b_2 - y_0), \\ b &= (a_3 - z_0)(b_1 - x_0) - (a_1 - x_0)(b_3 - z_0), \\ c &= (a_1 - x_0)(b_2 - y_0) - (a_2 - y_0)(b_1 - x_0) \text{ e} \\ d &= -(ax_0 + by_0 + cz_0). \end{aligned}$$

Exemplo 4.7 Determinar a equação cartesiana e as equações paramétricas do plano que passa pelos pontos $A(3, 1, 2)$, $B(4, -1, -1)$ e $C(2, 0, 2)$.

Solução. Fixando um dos pontos, digamos $P_0 = A$, obtemos que

$$\overrightarrow{P_0B} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \text{ e } \overrightarrow{P_0C} = -\vec{i} - \vec{j}.$$

Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + s - t \\ y = 1 - 2s - t \\ z = 2 - 3s, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

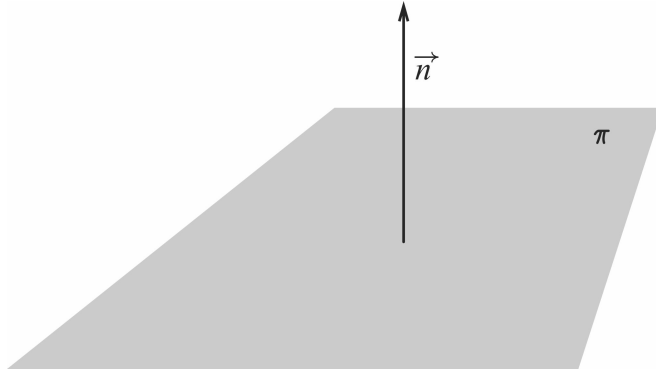
que é a descrição do plano π através de suas equações paramétricas. Agora $X \in \pi$ se, somente se,

$$\det \begin{pmatrix} x - 3 & y - 1 & z - 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(-3) - (y - 1)(-3) + (z - 2)(-3) = 0.$$

Portanto, o plano π , através de sua equação cartesiana é assim descrito:

$$\pi : x - y + z - 4 = 0.$$

Dizemos que o vetor não nulo $\vec{n}$ está na direção normal a um plano π se ele está na direção de qualquer reta que seja perpendicular ao plano π , conforme figura



Seja X um ponto de $\mathbb{R}^3$. Então $X \in \pi$ se, e somente se,

$$\langle \overrightarrow{P_0X}, \vec{n} \rangle = 0, \forall P_0 \in \pi. \quad (4.9)$$

A equação (4.9) é chamada de *equação normal* do plano π e $\vec{n}$ de *vetor normal* ao plano π .

Observação 4.8 Se $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π e $x \in \mathbb{R}^*$, então $x\vec{n}$ é também um vetor normal ao plano π .

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$ e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, então a equação cartesiana do plano que passa em P_0 tendo como vetor normal o vetor $\vec{n}$ é

$$ax + by + cz + d = 0,$$

com

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Reciprocamente, a equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

aonde a , b e c não são todos nulos, representa um plano que tem como vetor normal o vetor $\vec{n}$. De fato, se $a \neq 0$, então

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{P_0X}, \vec{n} \rangle = 0,$$

onde $P_0(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ e $X(x, y, z)$.

Observação 4.9 (Forma normal de Hesse) Seja π o plano que passa em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tendo $\vec{n} = (a, b, c)$ como vetor normal. Então

$$\pi = \{P \in \mathbb{R}^3 : \langle \overrightarrow{OP}, \vec{n} \rangle = d\},$$

onde $d = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{n} \rangle = ax_0 + by_0 + cz_0$ e O é a origem de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.10 Determinar a equação do plano que passa em $P_0(1, -2, 3)$ tendo como vetor normal

$$\vec{n} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Solução. Pela equação (4.9), obtemos que

$$4(x - 1) + 2(y + 2) - 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 3z + 9 = 0.$$

Exemplo 4.11 Determinar a equação do plano que intercepta os eixos coordenados, fora da origem, nos pontos $A(p, 0, 0)$, $B(0, q, 0)$ e $C(0, 0, r)$.

Solução. Fixando um dos pontos, digamos $P_0 = A$, obtemos que

$$\overrightarrow{P_0B} = -p\vec{i} + q\vec{j} \text{ e } \overrightarrow{P_0C} = -p\vec{i} + r\vec{k}.$$

Logo,

$$\vec{n} = \det \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -p & q & 0 \\ -p & 0 & r \end{bmatrix} \right) = qr\vec{i} + pr\vec{j} + pq\vec{k}$$

é o vetor normal ao plano. Assim,

$$qrx + pry + pqz + d = 0.$$

Como $P_0 = A$ pertence ao plano temos que

$$pqr + d = 0 \Rightarrow d = -pqr.$$

Portanto,

$$qrx + pry + pqz - pqr = 0,$$

ou ainda, dividindo esta equação por pqr , obtemos que

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

a qual é a equação segmetária do plano.

Exemplo 4.12 Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$ três pontos não colineares. Mostrar que a equação do plano que passa pelos pontos A , B e C é dada por

$$\det \left(\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Solução. Já vimos que a equação do plano π que passa pelos pontos A , B e C é dada por

$$\pi : ax + by + cz + d = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1), \\ b &= (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1), \\ c &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \text{ e} \\ d &= -(ax_1 + by_1 + cz_1). \end{aligned}$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} ax &= x \det \left(\begin{bmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad by = -y \det \left(\begin{bmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \right), \\ cz &= z \det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ e } d = -\det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Como o desenvolvimento, relativo a primeira linha, do determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}$$

é igual a

$$\det(\mathbf{A}) = ax + by + cz + d$$

temos que a equação do plano que passa pelos pontos A , B e C é dada por

$$\det \left(\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Observação 4.13 *Uma condição necessária e suficiente para que quatro pontos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ e $D(x_4, y_4, z_4)$ sejam coplanares é que*

$$\det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Concluiremos esta seção determinando as equações paramétricas da reta determinada pela interseção de dois planos.

Sejam π_1 e π_2 dois planos com direções perpendiculares diferentes, cujas equações cartesianas são:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ e } \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \quad (4.10)$$

As equações (4.10) são chamadas de *equações cartesianas* da reta. Sejam

$$\vec{n}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \text{ e } \vec{n}_2 = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

os vetores normais aos planos π_1 e π_2 , respectivamente. Então o vetor

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$$

é paralelo ou coincidente com a reta determinada pela interseção dos planos π_1 e π_2 . Assim, basta encontrar um ponto P_0 tal que $P_0 \in \pi_1 \cap \pi_2$, isto é, resolver o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}.$$

Exemplo 4.14 Determinar as equações paramétricas da reta determinada pelos planos

$$\pi_1 : x + y + z = 0 \text{ e } \pi_2 : 2x + 3y - z - 4 = 0.$$

Solução. Primeiro devemos encontrar os vetores normais aos planos. Neste caso,

$$\vec{n}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ e } \vec{n}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Segundo devemos calcular o vetor diretor da reta, isto é,

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Terceiro resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}.$$

Logo, nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 4z = -4 \\ y - 3z = 4 \end{cases}.$$

Escolhendo, $z = c \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$S = \{(-4 - 4c, 4 + 3c, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto solução do sistema. Em particular, $P_0(-4, 4, 0)$ é uma solução do sistema. Portanto,

$$r : \begin{cases} x = -4 - 4t \\ y = 4 + 3t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta r .

EXERCÍCIOS

1. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa pelos pontos $A(3, 2, 1)$, $B(4, -1, -1)$ e $C(2, 0, 0)$.
2. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 3)$. Obtenha um vetor normal de comprimento $\frac{2}{3}$ a este plano.
3. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa em $A(2, 1, -1)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{a} = (1, -2, 1)$. Verificar se os pontos $B(0, -1, 0)$ e $C(1, -2, 1)$ pertencem ao plano.
4. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa em $P_0(1, 2, 2)$ na direção dos vetores $\vec{a} = (2, 1, -1)$ e $\vec{b} = (1, -1, -2)$. Obtenha um outro ponto deste plano.
5. Determinar as equações normal e cartesiana do plano que passa pelos pontos $A(1, 2, 3)$, $B(5, 0, 6)$ e é paralelo ao vetor $\vec{a} = (3, -1, -4)$.
6. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano cuja equação vetorial é

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

onde $\vec{p}_0 = (1, 2, 3)$, $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$ e $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$.

7. Determinar as equações paramétricas do plano cuja equação cartesiana é

$$3x - y + z - 4 = 0.$$

Obtenha um vetor normal unitário a este plano.

8. Determinar a equação cartesiana do plano cujas equações paramétricas são

$$\pi : \begin{cases} x = 3 - 3s - t \\ y = 1 + s - 2t \\ z = -s - t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Obtenha um vetor normal de comprimento 15 a este plano.

9. Seja π o plano cuja equação cartesiana é

$$\pi : 2x - y - 3z + 5 = 0.$$

Determinar o valor de k de modo que o ponto $P(k, k+2, 2)$ pertença ao plano π . A origem pertence ao plano π ? Determinar a equação de um plano paralelo ao plano π contendo a origem.

10. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que contém o eixo $0z$ e um vetor na direção da bissetriz do ângulo entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Faça um esboço deste plano.
11. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa pelos pontos $A(7, 2, -3)$, $B(5, 6, -4)$ e é paralelo ao eixo $0x$. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ pertence a este plano?
12. O ponto $A(2, -1, -1)$ é o pé da perpendicular baixada da origem a um plano. Determinar a equação deste plano.
13. Sejam π_1 e π_2 dois planos com direções perpendiculares diferentes, cujas equações cartesianas são:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ e } \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Mostrar que

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não ambos nulos, é a equação cartesiana de um plano que contém a reta de interseção dos planos π_1 e π_2 . Seja r reta de interseção dos planos π_1 e π_2 . Determinar os números α e β de modo que o plano que contém a reta r passe pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

4.3 Posições relativas

Nesta seção vamos estudar a posição relativa e o ângulo entre retas, retas e planos e entre planos.

Sejam r_1 e r_2 duas retas, cujas equações paramétricas são:

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1s \\ y = y_1 + a_2s \\ z = z_1 + a_3s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + b_1t \\ y = y_2 + b_2t \\ z = z_2 + b_3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sejam

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

os vetores diretores das retas r_1 e r_2 , respectivamente, e o sistema

$$\begin{cases} b_1s - a_1t = x_2 - x_1 \\ b_2s - a_2t = y_2 - y_1 \\ b_3s - a_3t = z_2 - z_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Então:

(a) As retas r_1 e r_2 são *paralelas* se, e somente se, elas têm a mesma direção se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{a} = k \vec{b},$$

ou ainda,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Nestas igualdades fazemos a convenção de que o numerador é igual a zero, quando o denominador o for.

O caso em que as retas são coincidentes é considerado como um caso especial de paralelismo. Neste caso, o sistema (4.11) tem infinitas soluções, isto é, ele é compatível indeterminado.

(b) As retas r_1 e r_2 são *concorrentes* se, e somente se, elas têm direções diferentes e um ponto em comum se, e somente se,

$$\vec{a} \neq k \vec{b},$$

para todo $k \in \mathbb{R}$, ou ainda,

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$$

e o sistema (4.11) tem uma única solução, isto é, ele é compatível e determinado.

(c) As retas r_1 e r_2 são *perpendiculares* se, e somente se, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$, isto é,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Neste caso, as retas r_1 e r_2 podem ser ou não concorrentes.

(d) As retas r_1 e r_2 são *reversas* se, e somente se, elas não são coplanares e têm interseção vazia se, e somente se,

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$$

e o sistema (4.11) não tem solução, isto é, ele é incompatível.

Observação 4.15 Para determinar a posição relativa de duas retas basta discutir o sistema (4.11).

Exemplo 4.16 Determinar a posição relativa das retas

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução. Como

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-2}$$

temos que as retas são concorrentes ou reversas. Para decidirmos se elas são concorrentes ou reversas, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2s - 3t = 6 \\ -3s - 2t = 4 \\ 4s + 2t = -4 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 6 \\ -3 & -2 & \vdots & 4 \\ 4 & 2 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o nosso sistema é equivalente ao sistema

$$s = 0 \text{ e } t = -2.$$

Portanto, as retas são concorrentes e $P(1, -2, 5)$ é o ponto de interseção. Note que elas não são perpendiculares, pois

$$2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = -8 \neq 0.$$

Exemplo 4.17 *Determinar a posição relativa das retas*

$$r_1 : \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-4} \text{ e } r_2 : \frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+3}{-6}$$

Solução. Como

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{6} = \frac{-4}{-6}$$

temos que as retas são paralelas ou coincidentes. Sendo $P(2, -1, 3)$ um ponto pertencente a primeira reta mas não pertencente a segunda reta temos que elas são paralelas ou, equivalentemente, o sistema abaixo é incompatível

$$\begin{cases} 6s - 9t = -1 \\ 4s - 6t = 3 \\ -4s + 6t = -6 \end{cases}.$$

Exemplo 4.18 *Determinar a posição relativa das retas*

$$r_1 : \begin{cases} x = -2 + 2s \\ y = -3s \\ z = 1 + 4s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução. Como

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{4}{2}$$

temos que as retas são concorrentes ou reversas. Para decidirmos se elas são concorrentes ou reversas, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2s - t = 5 \\ -3s - 4t = 1 \\ 4s - 2t = -1 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \vdots & 5 \\ -3 & -4 & \vdots & 1 \\ 4 & -2 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\text{posto}(\mathbf{A}') = 3 > 2 = \text{posto}(\mathbf{A})$$

temos que o sistema é incompatível. Portanto, as retas são reversas.

Concluiremos esta seção definindo o ângulo entre as retas r_1 e r_2 . O ângulo θ entre as retas r_1 e r_2 satisfaz a condição

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

pois o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é θ ou $\pi - \theta$ e, assim, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \geq 0$ ou $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq 0$. Portanto, o ângulo entre as retas r_1 e r_2 é definido como

$$\angle(r_1, r_2) = \arccos \left(\frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right).$$

Observação 4.19 Se r_1 e r_2 são retas paralelas, então $\angle(r_1, r_2) = 0^\circ$.

Exemplo 4.20 Determinar o ângulo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -2 \\ y = -3s \\ z = 1 - 3s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução. Como

$$\vec{a} = -3\vec{j} - 3\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

temos que

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -6, \|\vec{a}\| = 3\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{14}.$$

Logo, o ângulo entre as retas é igual a

$$\begin{aligned} \angle(r_1, r_2) &= \arccos \left(\frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{|-6|}{3\sqrt{2}\sqrt{14}} \right) = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right). \end{aligned}$$

Sejam π_1 e π_2 dois planos, cujas equações cartesianas são:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Sejam

$$\vec{n}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \text{ e } \vec{n}_2 = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

os vetores normais aos planos π_1 e π_2 , respectivamente, e o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}. \quad (4.12)$$

Então:

(a) Os planos π_1 e π_2 são *paralelas* se, e somente se, os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ têm a mesma direção se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{n}_1 = k \vec{n}_2,$$

ou ainda,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

O caso em que os planos são coincidentes é considerado como um caso especial de paralelismo. Neste caso, o sistema (4.12) tem duas variáveis livres, isto é, ele é compatível e indeterminado.

(b) Os planos π_1 e π_2 são *concorrentes* se, e somente se, os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ têm direções diferentes e um reta em comum se, e somente se,

$$\vec{n}_1 \neq k \vec{n}_2,$$

para todo $k \in \mathbb{R}$, ou ainda,

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

e o sistema (4.12) tem uma variável livre, isto é, ele é compatível e indeterminado.

(c) Os planos π_1 e π_2 são *perpendiculares* se, e somente se, $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 0$, isto é,

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Observação 4.21 Para determinar a posição relativa de dois planos basta discutir o sistema (4.12).

Exemplo 4.22 Determinar a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : 2x + y - z - 1 = 0 \text{ e } \pi_2 : 3x - 5y + z - 4 = 0.$$

Solução. Sejam

$$\vec{n}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ e } \vec{n}_2 = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$$

os vetores normais aos planos. Como

$$\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-5} \neq \frac{-1}{1}$$

temos que os planos são concorrentes. Note que eles são perpendiculares, pois

$$\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 6 - 5 - 1 = 0.$$

Agora, para determinar a reta de interseção, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 3 & -5 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{13} & \vdots & \frac{9}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{13} & \vdots & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

Logo, nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x - \frac{4}{13}z = \frac{9}{13} \\ y - \frac{5}{13}z = -\frac{5}{13} \end{cases}.$$

Escolhendo, $z = t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$r : \begin{cases} x = \frac{9}{13} + \frac{4}{13}t \\ y = -\frac{5}{13} - \frac{5}{13}t \\ z = t, \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta.

Exemplo 4.23 Determinar a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \text{ e } \pi_2 : 2x + 4y + 6z - 3 = 0.$$

Solução. Sejam

$$\vec{n}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ e } \vec{n}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

os vetores normais aos planos. Como

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

temos que os planos são paralelos ou coincidentes. Para decidirmos se eles são paralelos ou coincidentes, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 4 & 6 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\text{posto}(\mathbf{A}') = 2 > 1 = \text{posto}(\mathbf{A})$$

temos que o sistema é incompatível. Portanto, os planos são paralelos.

Concluiremos esta seção definindo o ângulo entre os planos π_1 e π_2 . O *ângulo* entre os planos π_1 e π_2 é definido como

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \left(\frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right).$$

Observação 4.24 Se π_1 e π_2 são planos paralelos, então $\angle(\pi_1, \pi_2) = 0^\circ$.

Exemplo 4.25 Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0 \text{ e } \pi_2 : 3x - y - 2z - 3 = 0.$$

Solução. Sejam

$$\vec{n}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \text{ e } \vec{n}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

os vetores normais aos planos. Então

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \left(\frac{|11|}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \right) = \arccos \left(\frac{11}{14} \right).$$

Sejam r e π uma reta e um plano, cujas equações paramétricas e cartesiana são:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e } \pi : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

Sejam

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \text{ e } \vec{n} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

os vetores diretor e normal à reta r e ao plano π , respectivamente, e a equação

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)t + (a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1) + d_2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle t + \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle + d_2 &= 0 \\ \langle \vec{a} + \vec{b}, (1+t)\vec{n} \rangle + d_2 &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $\vec{b} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$. Então:

(a) A reta r e o plano π são *paralelos* se, e somente se, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares se, e somente se, $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0$, isto é,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

O caso em que a reta está contida no plano é considerado como um caso especial de paralelismo. Neste caso, a equação (4.13) tem infinitas soluções.

(b) A reta r e o plano π são *concorrentes* se, e somente se, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{n}$ não são perpendiculares se, e somente se, $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \neq 0$, isto é,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \neq 0.$$

Neste caso, a equação (4.13) tem uma única solução.

(c) A reta r e o plano π são *perpendiculares* se, e somente se, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{n}$ têm a mesma direção se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{a} = k \vec{n},$$

ou ainda,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Exemplo 4.26 Determinar a posição relativa entre a reta e o plano

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3} \text{ e } \pi : 2x + 3y + 4z + 5 = 0.$$

Solução. Sejam

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \text{ e } \vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

os vetores diretor e normal da reta e do plano, respectivamente. Como

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 6 + 6 - 12 = 0$$

temos que a reta é paralela ao plano ou está contida no plano. Para decidirmos se a reta é paralela ao plano ou está contida no plano, devemos resolver a equação

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle t + \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle + 5 = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$. Como

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0 \text{ e } \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 2 + 15 - 4 = 13 \neq -5$$

temos que a equação não tem solução. Portanto, a reta e o plano são paralelos.

Exemplo 4.27 Determinar a posição relativa entre a reta e o plano

$$r : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \text{ e } \pi : 2x + 3y + z - 3 = 0.$$

Solução. Sejam

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \text{ e } \vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

os vetores diretor e normal da reta e do plano, respectivamente. Como

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 2 - 6 + 6 = 2 \neq 0$$

temos que a reta e o plano são concorrentes. Para determinarmos o ponto de interseção, devemos resolver a equação

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle t + \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle - 3 = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$. Como

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 2 \text{ e } \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 2 - 3 = -1$$

temos que

$$2t - 1 - 3 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Portanto, escrevendo a equação da reta na forma paramétrica e fazendo $t = 2$, obtemos que $P_0(3, -5, 12)$ é o ponto de interseção entre a reta e o plano.

Concluiremos esta seção definindo o ângulo entre a reta r e o plano π . O ângulo entre a reta r e o plano π é definido como

$$\angle(r, \pi) = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{|\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{a}\| \|\vec{n}\|} \right).$$

Observação 4.28 Se a reta r e o plano π são paralelos, então $\angle(r, \pi) = 0^\circ$.

Exemplo 4.29 Determinar o ângulo entre a reta e o plano

$$r : x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6} \text{ e } \pi : 2x + 3y + z - 3 = 0.$$

Solução. Sejam

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \text{ e } \vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

os vetores diretor e normal da reta e do plano, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \angle(r, \pi) &= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{|2|}{\sqrt{41}\sqrt{14}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\sqrt{574}}{287}\right). \end{aligned}$$

Sejam π_1 , π_2 e π_3 três planos, cujas equações cartesianas são:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ e} \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0. \end{aligned}$$

Então para determinar a posição relativa dos planos, devemos discutir o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 \end{cases}.$$

Exemplo 4.30 Determinar a posição relativa dos planos

$$\begin{aligned} \pi_1 : 2x + y - 2z - 10 &= 0, \quad \pi_2 : 3x + 2y + 2z - 1 = 0 \text{ e} \\ \pi_3 : 5x + 4y + 3z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Solução. Devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & : & 10 \\ 3 & 2 & 2 & : & 1 \\ 5 & 4 & 2 & : & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3 \end{bmatrix}.$$

Logo, o nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}.$$

Portanto, os planos interceptam-se em um ponto $P_0(10, 2, -3)$.

Exemplo 4.31 *Determinar a posição relativa dos planos*

$$\begin{aligned}\pi_1 & : x + 2y - 3z - 6 = 0, \quad \pi_2 : 2x - y + 4z - 2 = 0 \quad e \\ \pi_3 & : 4x + 3y - 2z - 14 = 0.\end{aligned}$$

Solução. Devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 2 & -1 & 4 & \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 & \vdots & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}.$$

Escolhendo, $z = t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = t, \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta interseção. Portanto, os planos interceptam-se em uma reta.

Exemplo 4.32 *Determinar a posição relativa dos planos*

$$\begin{aligned}\pi_1 & : x + y - z - 1 = 0, \quad \pi_2 : 2x + 3y - 3z - 3 = 0 \quad e \\ \pi_3 & : x - 3y + 3z - 2 = 0.\end{aligned}$$

Solução. Devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & -3 & \vdots & 3 \\ 1 & -3 & 3 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\text{posto}(\mathbf{A}') = 3 > 2 = \text{posto}(\mathbf{A})$$

temos que o sistema é incompatível. Portanto, os planos não interceptam-se. Para decidirmos a configuração dos planos no espaço, devemos determinar as direções dos vetores normais

$$\vec{n}_1 = (1, 1, -1), \vec{n}_2 = (2, 3, -3) \text{ e } \vec{n}_3 = (1, -3, 3).$$

Como

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0, 1, 1), \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = (0, -4, -4) \text{ e } \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = (0, -9, -9)$$

temos que os planos interceptam-se dois a dois.

EXERCÍCIOS

- Sejam r_1 e r_2 duas retas com vetores diretores $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, respectivamente, e $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$. Mostrar que r_1 e r_2 são concorrentes se, e somente se, $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = 0$.
- Sejam r_1 e r_2 duas retas com vetores diretores $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, respectivamente, e $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$. Mostrar que r_1 e r_2 são reversas se, e somente se, $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{P_1P_2}] \neq 0$.
- Determinar a posição relativa das retas abaixo. Calcular, se existir, o ponto de interseção e o ângulo entre elas.
 - $x = 1, y = s, z = 1$ e $x = t, y = 0, z = 1, s, t \in \mathbb{R}$.
 - $x = 1 + 3s, y = 2 + 5s, z = 2 + 7s$ e $x = 7 + 6t, y = 12 + 10t, z = 6 + 4t, s, t \in \mathbb{R}$.
 - $x - 3 = \frac{z-2}{7}, y = 4$ e $\frac{x-6}{2} = \frac{z-4}{14}, y = 8$.
 - $x + 1 = \frac{y-1}{2}, z = 5$ e $x = 1 + 4t, y = 5 + 2t, z = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}$.
 - $x = 1, y = 3 - s, z = 5 + 2s$ e $x = -4 + 5t, y = 3 + 2t, z = -2 + 2t, s, t \in \mathbb{R}$.
- Determinar a posição relativa das retas e os planos abaixo. Calcular, se existir, o ponto de interseção e o ângulo entre eles.
 - $x = -8 + 15t, y = 5 - 9t, z = 0, t \in \mathbb{R}$, e $3x + 5y - 1 = 0$.
 - $x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$ e $x = 5 - 2s, y = 1 - s + 4t, z = 2 + s - 2t, s, t \in \mathbb{R}$.
 - $x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = 1 + s$ e $x = 1 - u - 4v, y = -2 + 2u - 8v, z = 1 + u - v, s, u, v \in \mathbb{R}$.
 - $\overrightarrow{OP} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1), t \in \mathbb{R}$, e $x - 2y - 4z + 5 = 0$.
- Determinar a posição relativa dos planos abaixo. Calcular, se existir, a reta de interseção e o ângulo entre eles.

- (a) $2x + y - z - 1 = 0$ e $3x - 5y + z - 4 = 0$.
- (b) $x + y - 4z = 1$ e $2x + 4y = 2 - 6z$.
- (c) $2x - 2y + 6z = 6$ e $x = -3s - t$, $y = -t$, $z = s$, $s, t \in \mathbb{R}$.
- (d) $3x + 6y = 27 - 3z$ e $2x + 4y + 2z = 14$.

6. Determinar a posição relativa dos planos abaixo. Calcular, se existir, suas interseções.

- (a) $x + y + z = 0$, $x + 2y + z - 1 = 0$ e $x + y + 3z - 2 = 0$.
- (b) $x + y - 4z = 0$, $x - y = 0$ e $x + 2y - 6z = 0$.
- (c) $x + 2y - z = 0$, $2x + 4y - 2z = 1$ e $3x - y + z = 2$.
- (d) $x + 2y + z = 0$, $2x + 4y - z + 1 = 0$ e $x + 2y = 0$.

7. Determinar as interseções da reta

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = 2-z$$

com os planos coordenados. Esta reta intercepta algum eixo coordenado?

8. Determinar a interseção do plano

$$\pi : 3x + 2y - z = 5$$

com os planos e eixos coordenados.

9. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A(-5, 2, 3)$ e é paralelo ao plano, cuja equação cartesiana é:

$$\pi : 3x - 2y + 5z = 6.$$

10. Determinar a equação do plano que passa pelos pontos $A(-1, 0, -3)$ e $B(1, 1, 3)$ e é perpendicular ao plano, cuja equação cartesiana é:

$$\pi : x - y + 2z = 3.$$

11. Determinar a equação do plano que contém as retas abaixo:

- (a) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z$ e $\frac{x-2}{5} = y - 1 = \frac{z}{3}$.
- (b) $x = 2 + 3t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1$, $t \in \mathbb{R}$, e $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = z + 1$.

12. Determinar a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $P_0(2, -3, 5)$ e é paralelo ao plano do triângulo de vértices $A(2, 0, 1)$, $B(3, 1, 2)$ e $C(2, 1, 1)$.

13. Sejam r e π uma reta e um plano, cujas equações simétricas e cartesianas são:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{k} = \frac{z+3}{2} \text{ e } \pi : x - 3y + 6z + 7 = 0.$$

Determinar os valores de k de modo que:

- (a) A reta r e o plano π sejam paralelos.
- (b) A reta r esteja contida no plano π .
- (c) A reta r intercepte o plano π em um ponto.

14. Sejam r e π uma reta e um plano, cujas equações simétricas e cartesianas são:

$$r : \frac{x-2}{k} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3} \text{ e } \pi : 3x - 2y + mz + 1 = 0.$$

Determinar os valores de k e m de modo que a reta r e o plano π sejam perpendiculares. Obtenha sua interseção.

15. Seja r_1 uma reta, cujas as equações paramétricas são:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinar as equações de uma reta r_2 de modo que:

- (a) As retas r_1 e r_2 sejam reversas.
 - (b) As retas r_1 e r_2 sejam concorrentes.
16. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(1, -1, 2)$ e é paralela à reta que contém os pontos $B(3, 0, 1)$ e $C(-1, 2, 1)$.
17. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pela origem e é ortogonal às retas cujas equações paramétricas são

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 3 + 5s \\ z = 5 + 6s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = -7 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

18. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores em $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u}$ seja paralelo e $\vec{v}$ seja perpendicular à reta cujas equações simétricas são

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = z+1.$$

Escreva o vetor $\vec{w} = (1, 2, 1)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

19. Mostrar que as retas que passam pela origem e são paralelas aos vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, -3, 0)$ e $\vec{w} = (1, 0, 3)$ são coplanares.

20. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A(2, 3, 0)$ e é perpendicular à reta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{z}{4} \text{ e } y = 2.$$

21. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi : 3x + y - 2z - 9 = 0.$$

22. Determinar as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(1, 2, -1)$, é perpendicular ao vetor $\vec{a} = (0, 1, 1)$ e paralela ao plano

$$\pi : x + y - 5 = 0.$$

23. Determinar uma base ortonormal negativa $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ tal que $\vec{a}$ seja normal ao plano

$$\pi : 2x - 5y + 4z - 3 = 0$$

e os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam paralelos a este plano.

24. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano

$$\pi : 5x + 2y - 3z + 6 = 0.$$

O ponto $A(1, 0, 1)$ pertence a este plano?

25. Determinar as equações simétricas e paramétricas do plano que passa pelo ponto $A(1, -2, 4)$ e é paralelo ao plano xOz . A origem pertence a este plano?

26. Determinar k e m de modo que os planos

$$\pi_1 : 2x + ky + 3z - 5 = 0 \text{ e } \pi_2 : mx - 6y - 6z = 0$$

sejam paralelos.

27. Determinar k de modo que os planos

$$\pi_1 : kx - 2y + z = 0 \text{ e } \pi_2 : kx + y + z - 1 = 0$$

sejam perpendiculares.

28. Determinar a equação do plano que passa pelos pontos $A(1, -2, 4)$, $B(3, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi : x - y + z - 5 = 0.$$

29. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A(1, 2, 3)$ e é perpendicular aos planos

$$\pi_1 : 2x - y + 3z = 0 \text{ e } \pi_2 : x + 2y + z - 1 = 0$$

30. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A(2, 2, -1)$ e é paralelo aos eixos $0y$ e $0z$.

31. Determinar k e m de modo que os planos

$$\pi_1 : 3x - 5y + kz - 3 = 0 \text{ e } \pi_2 : x + my + 2z - 5 = 0$$

sejam ortogonais.

4.4 Distâncias

Nesta seção calcularemos as distâncias entre ponto e reta, ponto e plano, retas reversas.

Sejam A e B dois pontos quaisquer. Então a *distância* entre A e B , denotada por $d(A, B)$, é a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, então

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Note que a distância é o menor percurso entre os pontos.

Exemplo 4.33 *Obtenha a representação analítica dos pontos de $\mathbb{R}^3$ equidistantes dos pontos $A(1, -2, 1)$ e $B(-3, 5, 4)$.*

Solução. Seja $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$d(P, A) = d(P, B).$$

Então

$$\sqrt{(1-x)^2 + (-2-y)^2 + (1-z)^2} = \sqrt{(-3-x)^2 + (5-y)^2 + (4-z)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta igualdade, obtemos que

$$(1-x)^2 + (-2-y)^2 + (1-z)^2 = (-3-x)^2 + (5-y)^2 + (4-z)^2.$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos que

$$-8x + 14y + 6z - 44 = 0,$$

ou ainda,

$$4x - 7y - 3z + 22 = 0,$$

que é a representação analítica dos pontos de $\mathbb{R}^3$ equidistantes dos pontos $A(1, -2, 1)$ e $B(-3, 5, 4)$. Geometricamente, é o hiperplano que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e lhe é perpendicular.

Sejam $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto e π um plano, cuja equação cartesiana é:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Então a *distância* entre P_0 e π , denotada por $d(P_0, \pi)$, é dada pela fórmula

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

De fato, sejam

$$Q(x, y, z) \in \pi \text{ e } \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

o vetor normal ao plano π . Então, pela figura,

obtemos que

$$d(P_0, \pi) = \left\| \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0 Q} \right\|.$$

Como

$$\text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0 Q} = \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0 Q} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \text{ e } \overrightarrow{P_0 Q} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

temos que

$$\begin{aligned} d(P_0, \pi) &= \frac{|\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0 Q} \rangle|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$

pois $-d = ax + by + cz$.

Observação 4.34 1. Uma maneira alternativa de determinar a distância do ponto P_0 ao plano π é a seguinte: primeiro determina a equação da reta r que passa pelo ponto P_0 na direção do vetor normal $\vec{n}$; segundo determina o ponto Q de interseção da reta r e o plano π . Finalmente,

$$d(P_0, \pi) = d(P_0, Q)$$

2. Se $P_0 \in \pi$, então $d(P_0, \pi) = 0$, pois

$$P_0 \in \pi \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

3. Sejam π_1 e π_2 dois planos, então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = d(\pi_1, P_2),$$

onde $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$. Neste caso, devemos primeiro estudar a posição relativa dos planos π_1 e π_2 .

Exemplo 4.35 Determinar a distância $P_0(1, 1, -1)$ ao plano, cuja equação cartesiana é

$$\pi : 2x - y + z - 2 = 0.$$

Solução. Neste caso,

$$\begin{aligned} d(P_0, \pi) &= \frac{|2 + (-1)1 + 1(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Sejam $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto e r uma reta, cujas equações paramétricas são:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + b_1 t \\ z = z_0 + c_1 t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Seja

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$$

o vetor diretor r . Então a distância entre P_0 e r , denotada por $d(P_0, r)$, é dada pela fórmula

$$d(P_0, r) = \frac{\|\vec{a} \times \overrightarrow{QP_0}\|}{\|\vec{a}\|}, \forall Q \in r.$$

De fato, pela figura,

obtemos que

$$d(P_0, r) = \|\overrightarrow{QP_0}\| |\sin \theta|, \forall Q \in r.$$

Como

$$\left\| \vec{a} \times \overrightarrow{QP_0} \right\| = \|\vec{a}\| \left\| \overrightarrow{QP_0} \right\| |\sin \theta|$$

temos que

$$d(P_0, r) = \frac{\left\| \vec{a} \times \overrightarrow{QP_0} \right\|}{\|\vec{a}\|}, \forall Q \in r.$$

Observação 4.36 1. Uma maneira alternativa de determinar a distância do ponto P_0 à reta r é a seguinte: primeiro determina a equação do plano π que passa pelo ponto P_0 tendo como vetor normal $\vec{n}$ o vetor diretor da reta r ; segundo determina o ponto Q de interseção da reta r e o plano π . Finalmente,

$$d(P_0, r) = d(P_0, Q)$$

2. Se $P_0 \in r$, então $d(P_0, r) = 0$, pois

$$P_0 \in r \Leftrightarrow \vec{a} \times \overrightarrow{QP_0} = \vec{0}, \forall Q \in r.$$

3. Sejam r_1 e r_2 duas retas não reversas, então

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2) = d(r_1, P_2),$$

onde $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$. Neste caso, devemos primeiro estudar a posição relativa das retas r_1 e r_2 .

4. Sejam π e r um plano e uma reta, então

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = d(Q, r),$$

onde $P \in r$ e $q \in \pi$. Neste caso, devemos primeiro estudar a posição relativa do plano π e da reta r .

Exemplo 4.37 Determinar a distância $P_0(3, 2, -5)$ e a reta que passa pelos pontos plano $A(1, 0, 1)$ e $B(0, 1, -1)$.

Solução. Primeiro vamos determinar as equações paramétricas da reta que passa A e B . Fixado um dos pontos, digamos $A(1, 0, 1)$, obtemos que

$$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

é o vetor diretor da reta. Logo,

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Escolhendo $Q = B$, obtemos que

$$\overrightarrow{QP_0} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \text{ e } \vec{a} \times \overrightarrow{QP_0} = -2\vec{i} - 10\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Portanto,

$$d(P_0, r) = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{5}.$$

Sejam r_1 e r_2 duas retas reversas, cujas equações paramétricas são:

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1s \\ y = y_1 + a_2s \\ z = z_1 + a_3s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = x_2 + b_1t \\ y = y_2 + b_2t \\ z = z_2 + b_3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sejam

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ e } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

os vetores diretores das retas r_1 e r_2 , respectivamente. Então existem dois únicos planos paralelos (distintos) π_1 e π_2 tais que $r_1 \subset \pi_1$ e $r_2 \subset \pi_2$. Como $\vec{a} \times \vec{b}$ é o vetor normal π_1 e π_2 , respectivamente, temos que a *distância* entre r_1 e r_2 , denotada por $d(r_1, r_2)$, é dada por

$$d(r_1, r_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{PQ} \rangle|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|},$$

onde $P \in r_1$ e $Q \in r_2$.

Observação 4.38 *Uma maneira alternativa de determinar a distância entre às retas reversas r_1 e r_2 é a seguinte: primeiro determina um ponto $P \in r_1$ e um ponto $Q \in r_2$; segundo determina a altura h do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\overrightarrow{PQ}$, onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores diretores das retas r_1 e r_2 , respectivamente. Finalmente,*

$$d(r_1, r_2) = h.$$

Exemplo 4.39 *Determinar a distância entre as retas r_1 e r_2 , cujas equações paramétricas são:*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 4s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Além disso, determinar a equação da reta que intercepta ortogonalmente estas retas.

Solução. Como

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-4}{2}$$

temos que as retas são concorrentes ou reversas. Para decidirmos se elas são concorrentes ou reversas, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} -2s - t = -2 \\ s - t = -1 \\ -4s - 2t = 1 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -2 & -1 & : & -2 \\ 1 & -1 & : & -1 \\ -4 & -2 & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\text{posto}(\mathbf{A}') = 3 > 2 = \text{posto}(\mathbf{A})$$

temos que o sistema é incompatível. Portanto, as retas são reversas. Escolhendo $P(1, 2, 3) \in r_1$ e $Q(-1, 1, 4) \in r_2$, obtemos que

$$\overrightarrow{PQ} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Sendo

$$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \text{ e } \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},$$

obtemos que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) &= \frac{|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{PQ} \rangle|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \\ &= \frac{|4 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Finalmente, o vetor diretor da reta que intercepta ortogonalmente estas retas é dado por

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}.$$

Assim, basta determinar um ponto desta reta. Para isto, seja π o plano determinado por $Q(-1, 1, 4) \in r_2$ e os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$. A equação cartesiana deste plano é dada por

$$[\overrightarrow{QR}, \vec{b}, \vec{c}] = 0, \forall R \in \pi,$$

isto é,

$$\pi : x + 5y + 2z - 12 = 0.$$

Então o ponto procurado é o ponto de interseção da reta r_1 e o plano π . Assim,

$$(1 - 2s) + 5(2 + s) + 2(3 - 4s) - 12 = 0 \Rightarrow s = 1.$$

Portanto, $P_0 = (-1, 3, -1)$ é o ponto de interseção e

$$r : \begin{cases} x = -1 - 2u \\ y = 3 \\ z = -1 + u, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

são as equações paramétricas da reta.

Exemplo 4.40 *Determinar um ponto simétrico ao ponto $P(1, 2, -1)$ em relação à reta r , cujas equações paramétricas são:*

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução. Um ponto $Q(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é simétrico ao ponto $P(1, 2, -1)$ em relação à reta r se, e somente se,

$$d(P, r) = d(Q, r)$$

e ele pertence a reta r_1 que passa em P e intercepta r ortogonalmente ou, equivalentemente, resolver a equação vetorial

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}),$$

onde $A \in r \cap r_1$. Assim,

$$A \in r \cap r_1 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{PA} \rangle = 0 \Leftrightarrow t = \frac{16}{21},$$

pois $\overrightarrow{PA} = -2t \overrightarrow{i} + t \overrightarrow{j} + (4 - 4t) \overrightarrow{k}$. Logo,

$$A(-\frac{11}{21}, \frac{58}{21}, -\frac{1}{21})$$

e

$$(-\frac{11}{21}, \frac{58}{21}, -\frac{1}{21}) = (\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z-1}{2}).$$

Portanto,

$$Q(-\frac{43}{21}, \frac{74}{21}, \frac{19}{21})$$

é o ponto simétrico ao ponto $P(1, 2, -1)$ em relação à reta r .

EXERCÍCIOS

1. Determinar a distância do ponto $P(1, 2, 2)$ ao plano determinado pelos pontos $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ e $C(-2, 3, 0)$.
2. Determinar a distância do ponto $P(1, 2, 2)$ à reta que passa pelo ponto $A(1, 2, 5)$ e é paralela à reta que contém os pontos $B(3, 0, 1)$ e $C(-1, 2, 1)$.
3. Determinar a distância entre as retas abaixo.

- (a) $x = 1, y = s, z = 1$ e $x = t, y = 0, z = 1, s, t \in \mathbb{R}$.
- (b) $x = 1 + 3s, y = 2 + 5s, z = 2 + 7s$ e $x = 7 + 6t, y = 12 + 10t, z = 6 + 4t, s, t \in \mathbb{R}$.
- (c) $x - 3 = \frac{z-2}{7}, y = 4$ e $\frac{x-6}{2} = \frac{z-4}{14}, y = 8$.
- (d) $x + 1 = \frac{y-1}{2}, z = 5$ e $x = 1 + 4t, y = 5 + 2t, z = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}$.
- (e) $x = 1, y = 3 - s, z = 5 + 2s$ e $x = -4 + 5t, y = 3 + 2t, z = -2 + 2t, s, t \in \mathbb{R}$.

4. Determinar a distância entre as retas e os planos abaixo.

- (a) $x = -8 + 15t, y = 5 - 9t, z = 0, t \in \mathbb{R}$, e $3x + 5y - 1 = 0$.
- (b) $x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$ e $x = 5 - 2s, y = 1 - s + 4t, z = 2 + s - 2t, s, t \in \mathbb{R}$.
- (c) $x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = 1 + s$ e $x = 1 - u - 4v, y = -2 + 2u - 8v, z = 1 + u - v, s, u, v \in \mathbb{R}$.
- (d) $\overrightarrow{OP} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1), t \in \mathbb{R}$, e $x - 2y - 4z + 5 = 0$.

5. Determinar a distância entre os planos abaixo. Calcular, se existir, a reta de interseção e o ângulo entre eles.

- (a) $2x + y - z - 1 = 0$ e $3x - 5y + z - 4 = 0$.
- (b) $x + y - 4z = 1$ e $2x + 4y = 2 - 6z$.
- (c) $2x - 2y + 6z = 6$ e $x = -3s - t, y = -t, z = s, s, t \in \mathbb{R}$.
- (d) $3x + 6y = 27 - 3z$ e $2x + 4y + 2z = 14$.

6. Determinar a equação da reta r que intercepta ortogonalmente as retas dadas abaixo:

- (a) $x = 2 + s, y = 3 + 5s, z = 5 + 6s$ e $x = 1 + 3t, y = t, z = -7 + 2t, s, t \in \mathbb{R}$.
- (b) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2}, z = 0$ e $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$.

7. Determinar um ponto simétrico ao ponto $P(1, 2, -1)$ em relação:

- (a) à origem.
- (b) ao ponto $Q(3, 1, 1)$.

(c) à reta $x = 1 + t$, $y = t$ e $z = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) ao plano $2x + y - z + 1 = 0$.

8. Determinar a distância entre interseção dos planos

$$\pi_1 : x + y - z + 2 = 0, \quad \pi_2 : 2x - y + z - 5 = 0 \text{ e}$$

$$\pi_3 : x + y - 2z + 4 = 0$$

e a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

9. Mostrar que os planos

$$\pi_1 : x + 2y - z - 1 = 0 \text{ e } \pi_2 : 2x - y + z = 0$$

se interceptam segundo uma reta r . Determinar a equação de uma reta que passa pelo ponto $P(1, 0, 1)$ e intercepta a reta r ortogonalmente.

10. Determinar as equações da reta que pertence ao plano

$$\pi : x - y + z - 7 = 0,$$

contém $P(3, -3, 1)$ e é ortogonal a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

11. Mostrar que os planos

$$\pi_1 : x + 2y - z - 1 = 0 \text{ e } \pi_2 : 2x - y + z = 0$$

se interceptam segundo uma reta r . Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $P(1, 0, -1)$ e contém a reta r .

12. Determinar as equações da reta que passa pelo ponto $P(1, -2, 1)$ e intercepta as retas reversas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = -3 + 2s \\ z = s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Capítulo 5

Quádricas

O principal objetivo deste capítulo é estudar as superfícies que podem ser expressas pela equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (5.1)$$

onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J são constantes com A, B, C, D, E e F , não todos nulos, a qual representa equação cartesiana de uma quádrlica. Note que a equação

$$\lambda Ax^2 + \lambda By^2 + \lambda Cz^2 + \lambda Dxy + \lambda Exz + \lambda Fyz + \lambda Gx + \lambda Hy + \lambda Iz + \lambda J = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, representa o mesmo gráfico da equação 5.1. Pode ser provado através mudança de coordenadas equação 5.1????????????????

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J. L. M., *Geometria euclidiana plana*. SBM, Rio de Janeiro, 1985.
- [2] Cabral, H., *Geometria analítica*, UFPE, 1979.
- [3] Efimov, N., *Elementos de geometria analítica*, Livraria Cultura Brasileira Ltda, São Paulo, 1972.
- [4] Campos, M. S. e Duarte Filho, J. C., *Cálculo vetorial e geometria analítica*, Nota de Aulas, UFPB, 1990.