

Capítulo 1

Matrizes e Sistema de Equações Lineares

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e resultados sobre matrizes e sistemas de equações lineares que serão necessárias para o desenvolvimento deste texto. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [7, 9].

1.1 Corpos

Um *corpo* é um conjunto F com duas operações

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \rightarrow & F \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} F \times F & \rightarrow & F \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array},$$

chamadas de *adição* e *multiplicação*, tais que as seguintes propriedades valem:

1. A adição é associativa,

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

para todos $x, y, z \in F$.

2. Existe um único elemento 0 (zero) em F tal que

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

para todo $x \in F$.

3. A cada x em F corresponde um único elemento $-x$ (oposto) em F tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

4. A adição é comutativa,

$$x + y = y + x,$$

para todos $x, y \in F$.

5. A multiplicação é associativa,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

para todos $x, y, z \in F$.

6. Existe um único elemento 1 (um) em F tal que

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$

para todo $x \in F$.

7. A cada x em $F - \{0\}$ corresponde um único elemento x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ (inverso) em F tal que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

8. A multiplicação é comutativa,

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

para todos $x, y \in F$.

9. A multiplicação é distributiva com relação à adição,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ e } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$

para todos $x, y, z \in F$.

Exemplo 1.1 O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, dos reais $\mathbb{R}$ e dos complexos $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e multiplicação são corpos.

Exemplo 1.2 Seja $F = GF(2) = \{0, 1\}$. Definimos uma adição e uma multiplicação em F pelas tábuas:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

É fácil verificar que F com essas duas operações é um corpo, chamado de corpo de Galois.

Proposição 1.3 Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}$. Então:

1. Se $a + x = a$, então $x = 0$.
2. Se $b \neq 0$ e $b \cdot x = b$, então $x = 1$.
3. Se $a + b = 0$, então $b = -a$.
4. A equação $a + x = b$ tem uma única solução $x = (-a) + b$.
5. Se $a \neq 0$, a equação $a \cdot x = b$ tem uma única solução $x = a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}$.

6. $x \cdot 0 = 0$.

7. $-x = (-1)x$.

8. $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

9. $-(-x) = x$.

10. $(-1)(-1) = 1$.

Prova. Vamos provar apenas o item (8).

$$-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b).$$

■

Sejam F e K corpos. Dizemos que K é uma *extensão de corpos* de F se $F \subseteq K$ e, neste caso, F é um *subcorpo* de K . Por exemplo, $\mathbb{R}$ é uma extensão de corpos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

1.2 Matrizes

Uma *matriz* $m \times n$ $\mathbf{A}$ sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é um arranjo retangular com m linhas e n colunas da forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Usaremos, também, a notação

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ou, simplesmente, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$.

A i -ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ é matriz $1 \times n$

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

e a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$ é matriz $m \times 1$

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

O símbolo a_{ij} significa o elemento da matriz $\mathbf{A}$ que está na i -ésima linha e j -ésima coluna e será chamado de *entrada* da matriz $\mathbf{A}$. O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ será denotado por $M(m, n)$ ou $\mathbb{R}^{m \times n}$. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é chamada de *matriz quadrada* se $m = n$. Neste caso, as entradas

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \text{ e } a_{12}, a_{23}, \dots, a_{(n-1)n} \text{ (} a_{21}, a_{32}, \dots, a_{n(n-1)} \text{)}$$

formam a *diagonal principal* e a *superdiagonal* (*subdiagonal*) de $\mathbf{A}$, respectivamente.

Dizemos que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é uma *matriz diagonal* se

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Usaremos a notação $\mathbf{D} = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ para denotar a matriz diagonal $\mathbf{A}$ com $a_{ii} = d_i$, $i = 1, \dots, n$. Em particular, dizemos que a matriz diagonal $\mathbf{A}$ é uma *matriz identidade* se

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e será denotada por $\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}] = \text{Diag}(1, \dots, 1)$, onde δ_{ij} é o *símbolo de Kronecker*. A matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, é chamada de *matriz nula* e será denotada por $\mathbf{0}$.

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Uma *submatriz* de $\mathbf{A}$ é uma matriz obtida de $\mathbf{A}$ eliminando-se linhas e/ou colunas. Denotamos por

$$\mathbf{A}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{bmatrix},$$

onde $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ com $r \leq m$ e $\{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ com $s \leq n$. Uma submatriz $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ é chamada *bloco* de $\mathbf{A}$ se

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_{j_1, j_1+1, \dots, j_1+s-1}^{i_1, i_1+1, \dots, i_1+r-1}.$$

Uma *matriz em blocos* é uma matriz da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \cdots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$ são blocos de $\mathbf{A}$.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é *igual* a $\mathbf{B}$, em símbolos $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ munido com as operações de adição

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$$

e multiplicação por escalar

$$a\mathbf{A} = [aa_{ij}], \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

possui as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
2. Existe $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
3. Para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existe $-\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, onde $-\mathbf{A} = [-a_{ij}]$.
4. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
5. $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
6. $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
7. $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $a \in \mathbb{R}$.
8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$. O *produto* de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$, em símbolos, $\mathbf{AB}$, é definido como

$$\mathbf{AB} = [c_{ij}],$$

onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq p.$$

Note que $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$. O produto de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times q}$.
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.
3. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.
4. $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$ e $\mathbf{OB} = \mathbf{O}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{B}, \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.
5. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{L} = [x_i] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, então

$$\mathbf{LA} = x_1\mathbf{L}_1 + \cdots + x_m\mathbf{L}_m,$$

onde $\mathbf{L}_i$ é a i -ésima linha da matriz $\mathbf{A}$.

6. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{C} = [y_i] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então

$$\mathbf{AC} = y_1 \mathbf{C}_1 + \cdots + y_n \mathbf{C}_n,$$

onde $\mathbf{C}_j$ é a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$.

7. Se $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$, então

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AC}_1 & \cdots & \mathbf{AC}_p \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{C}_j$ é a j -ésima coluna da matriz $\mathbf{B}$.

8. $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n \mathbf{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

9. $\mathbf{A}^m \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Sejam

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

um polinômio de grau $\partial(f) = n$ sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então $f(\mathbf{A})$ é a matriz $n \times n$ definida por

$$f(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}.$$

Note que $f(\mathbf{A})$ é obtida de f substituindo-se a variável x pela matriz $\mathbf{A}$ e o escalar a_0 pela matriz escalar $a_0 \mathbf{I}$. Dizemos que f é o *polinômio anulador* $\mathbf{A}$ se $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } f = x^2 - 2x - 3 \in \mathbb{R}[x],$$

então

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que

$$\mathbf{A}f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})\mathbf{A}, \quad \forall f \in \mathbb{R}[x].$$

Mais geralmente,

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}), \quad \forall f, g \in \mathbb{R}[x].$$

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A *matriz transposta* de $\mathbf{A}$ é a matriz obtida escrevendo-se as linhas da matriz $\mathbf{A}$ como colunas, ou seja,

$$\mathbf{A}^t = [a_{ji}], \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

A transposta de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

2. $(a\mathbf{A})^t = a\mathbf{A}^t$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $a \in \mathbb{R}$.
3. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e a *matriz unitária* $\mathbf{E}_{ij} = [e_{pq}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, onde

$$e_{pq} = \delta_{pi}\delta_{qj} = \begin{cases} 1 & \text{se } (p, q) = (i, j) \\ 0 & \text{se } (p, q) \neq (i, j), \end{cases}$$

isto é, $\mathbf{E}_{ij}$ é a matriz cuja (i, j) -ésima entrada é igual a 1 e as demais zeros. Por exemplo, quando $m = n = 2$, obtemos

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então é fácil verificar que (quando o produto é definido):

1.

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{E}_{ij}.$$

2. $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{pq}$ se, e somente se, $(p, q) = (i, j)$.

3. $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{pq} = \delta_{jp}\mathbf{E}_{iq}$, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{pq} &= \mathbf{E}_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{e}_p & \cdots & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{E}_{ij}\mathbf{e}_p & \cdots & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{C}_p & \cdots & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \cdots & \delta_{jp}\mathbf{e}_i & \cdots & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \delta_{jp}\mathbf{E}_{iq}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{e}_p$ é a p -ésima coluna da matriz $\mathbf{E}_{pq}$ e $\mathbf{C}_p$ é a p -ésima coluna da matriz $\mathbf{E}_{ij}$.

4. $\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{ii} = \mathbf{I}_n$.

5. $\mathbf{AE}_{pq} = \sum_{i=1}^m a_{ip}\mathbf{E}_{iq}$, isto é, $\mathbf{AE}_{pq}$ é a matriz cuja q -ésima coluna é igual a p -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$ e as demais zeros.

6. $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{qj}\mathbf{E}_{pj}$, isto é, $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{A}$ é a matriz cuja p -ésima linha é igual a q -ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ e as demais zeros.

7. $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{AE}_{rs} = a_{qr}\mathbf{E}_{ps}$, isto é, $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{AE}_{rs}$ é a matriz cuja (p, s) -ésima entrada é igual a a_{qr} e as demais zeros.

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O *determinante* da matriz $\mathbf{A}$ é definido por

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

onde S_n é o conjunto de todas as permutações do conjunto

$$\{1, 2, \dots, n\}$$

e $\text{sgn } \sigma = (-1)^N$, com N igual ao número de inversões (transposições) necessárias para trazer de volta o conjunto

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$$

a sua ordem natural. Assim, $\det \mathbf{A}$ é a soma de $n!$ termos, onde o sinal está bem definido, e qualquer termo tem n elementos, um e somente um, de cada linha e coluna de $\mathbf{A}$.

Uma permutação $\sigma \in S_n$ pode ser escrita sob a forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

onde a ordem das colunas não importa. Por exemplo, para $n = 3$, temos que os seis elementos de S_3 são:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \end{aligned}$$

Observação 1.4 *Uma maneira alternativa para determinar o número de inversões de uma permutação*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

é ilustrado no esquema da Figura 1.1. Neste caso, o número de cruzamentos corresponde ao número de inversões de σ .

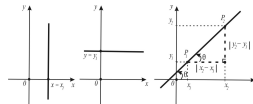


Figura 1.1: Número de inversões de σ .

Portanto, σ admite duas inversões. Esse procedimento vale para S_n .

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O determinante da matriz

$$\mathbf{A}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k} = \det \left(\begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{bmatrix} \right)$$

é chamado um *menor* da matriz $\mathbf{A}$ de ordem k , onde $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$. Em particular, se $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$, os menores são chamados de *menores principais*, em outras palavras, se os elementos diagonais dos menores provêm da diagonal da matriz $\mathbf{A}$.

Proposição 1.5 *Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{L}_i$ a i -ésima linha de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}_i = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ uma matriz linha fixada.*

$$1. \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}.$$

$$2. \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ a\mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

3. Se $\mathbf{L}_i = \mathbf{O}$, então $\det \mathbf{A} = 0$.

4. Se duas linhas da matriz $\mathbf{A}$ são iguais (ou $L_i = aL_j$, para todo $a \in \mathbb{R}$, com $i < j$), então $\det \mathbf{A} = 0$.

5. $\det \mathbf{A}^t = \det \mathbf{A}$.

6. Se $\mathbf{B}$ é a matriz obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se a i -ésima linha pela j -ésima linha, então $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Prova. Vamos provar apenas os itens (1), (4) e (5). Para provar (1), basta notar que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + r_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots r_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

(4) Suponhamos que $L_i = L_j$ com $i < j$. Seja $\tau \in S_n$ a permutação definida por $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(x) = x$, para todo $x \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i, j\}$. Então pode ser provado que

$$\operatorname{sgn} \tau = -1 \text{ e } \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sgn} \sigma, \quad \forall \sigma \in S_n.$$

Sejam

$$X = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) < \sigma(j)\} \text{ e } Y = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Então a função $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(\sigma) = \sigma \circ \tau$ é bijetora. De fato, dado $\varphi \in Y$ existe $\sigma = \varphi \circ \tau \in X$ tal que $f(\sigma) = (\varphi \circ \tau) \circ \tau = \varphi$, pois $\tau \circ \tau = I$, isto é, f é sobrejetora. Agora, se $f(\sigma) = f(\phi)$, então

$$\sigma = \sigma \circ I = \sigma \circ (\tau \circ \tau) = (\sigma \circ \tau) \circ \tau = (\phi \circ \tau) \circ \tau = \phi \circ (\tau \circ \tau) = \phi \circ I = \phi,$$

ou seja, f é injetora. Portanto,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in Y} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) a_{1\sigma(\tau(1))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))} \\ &= \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn} \sigma (a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn} \sigma (a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $L_i = L_j$. Finalmente, para provar (5), note que

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\varphi(1)\sigma(\varphi(1))} \cdots a_{\varphi(n)\sigma(\varphi(n))}, \quad \forall \sigma, \varphi \in S_n.$$

Assim, em particular, para $\varphi = \sigma^{-1}$ e $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \det \mathbf{A}^t. \end{aligned}$$

■

Observação 1.6 A Proposição 2.14 continua válido para colunas ao invés de linhas.

Teorema 1.7 (Teorema de Binet-Cauchy) Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Prova. (Caso $n = 2$) Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{12}a_{21}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= \det(\mathbf{AB}). \end{aligned}$$

Portanto, $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$. ■

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Então

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Mais geralmente, pode ser provado que

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}), \quad i = 1, \dots, n.$$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a matriz obtida de $\mathbf{A}$ eliminando-se a i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$. O escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$ é chamado o *cofator* do termo a_{ij} no $\det \mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada a *matriz dos cofatores* da matriz $\mathbf{A}$.

Teorema 1.8 *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então*

$$\mathbf{A} \cdot \text{adj } \mathbf{A} = \text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}_n,$$

onde $\text{adj } \mathbf{A}$ é a transposta da matriz dos cofatores de $\mathbf{A}$, a qual é chamada de adjunta clássica de $\mathbf{A}$.

Prova. Seja $\mathbf{B} = \text{adj } \mathbf{A} = [b_{ij}]$, de modo que $b_{ij} = c_{ji} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$, para todos i, j . Então

$$\mathbf{A} \cdot \text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{AB} = [d_{ij}], \text{ onde } d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \det(\mathbf{A}_{jk}).$$

Se $i = j$, então $d_{ii} = \det \mathbf{A}$. Agora, se $i \neq j$, digamos $i < j$, e seja $\hat{\mathbf{A}} = [\hat{a}_{ij}]$ a matriz obtida de $\mathbf{A}$ substituindo-se a j -ésima linha pela i -ésima linha, isto é, se $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$ são as linhas

de $\mathbf{A}$, então $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_i, \dots, \mathbf{L}_{j-1}, \mathbf{L}_i, \mathbf{L}_{j+1}, \dots, \mathbf{L}_n$ são as linhas de $\hat{\mathbf{A}}$. Logo, $\hat{a}_{ik} = a_{ik} = \hat{a}_{jk}$ e $\det(\hat{\mathbf{A}}_{jk}) = \det(\mathbf{A}_{jk})$, para todo k . Em particular, $\det(\hat{\mathbf{A}}) = 0$, pois $\hat{\mathbf{A}}$ tem duas linhas iguais. Assim,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n \hat{a}_{jk} (-1)^{k+j} \det(\hat{\mathbf{A}}_{jk}) = \det(\hat{\mathbf{A}}) = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

isto é, $\mathbf{A} \cdot \text{adj } \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}_n$. Como $(\text{adj } \mathbf{A})^t = \text{adj } \mathbf{A}^t$ temos que

$$(\det \mathbf{A}) \mathbf{I}_n = (\det \mathbf{A}^t) \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^t \cdot \text{adj } \mathbf{A}^t = (\text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^t.$$

Logo,

$$\text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = ((\det \mathbf{A}) \mathbf{I}_n)^t = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}_n.$$

Portanto,

$$\mathbf{A} \cdot \text{adj } \mathbf{A} = \text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}_n$$

■

Teorema 1.9 (Regra de Cramer) *Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n$ as colunas da matriz $\mathbf{A}$. Se existirem $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{B} = x_1 \mathbf{C}_1 + \dots + x_n \mathbf{C}_n$, então*

$$x_j \det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \dots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}.$$

Em particular, se $\det \mathbf{A} \neq 0$, então

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \dots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Prova. Aplicando, indutivamente, os itens (1) e (3) da Proposição 2.14, obtemos

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \dots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} = \\ & \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_{j-1} & \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{C}_k & \mathbf{C}_{j+1} & \dots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} = \\ & \sum_{k=1}^n x_k \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{C}_k & \mathbf{C}_{j+1} & \dots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} = x_j \det \mathbf{A}, \end{aligned}$$

pois as outras matrizes têm duas colunas iguais quando $k \neq j$. ■

Uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *invertível* ou *não-singular* se existir uma matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

Caso contrário, $\mathbf{A}$ é *não-invertível* ou *singular*. Vamos denotar a matriz inversa de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A}^{-1}$. A inversa de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são invertíveis, então $\mathbf{AB}$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$.

2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Neste caso,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

Em particular, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

então

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *equivalentes* se existirem matrizes invertíveis $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}^{-1}.$$

Em particular, se $m = n$ e $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$, dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *semelhantes* ou *conjugadas*.

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *congruentes* se existir uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P}.$$

Uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada uma *matriz triangular superior (inferior)* se

$$a_{ij} = 0, \text{ para } i > j \quad (a_{ij} = 0, \text{ para } i < j).$$

Note que se $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular, então

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Mostre que existem matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tais que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Existe uma matriz $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ com $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$? Existe uma matriz $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$ com $\mathbf{CA} = \mathbf{O}$?

4. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $\mathbf{P}$ invertível. Mostre que

$$(\mathbf{PAP}^{-1})^m = \mathbf{PA}^m\mathbf{P}^{-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

5. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

6. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que $\det(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^{n-1}$ e $\text{adj}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^{n-2} \mathbf{A}$.

7. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertíveis. Mostre que $\mathbf{A} + x\mathbf{B}$ é invertível, para todo exceto uma quantidade finita de $x \in \mathbb{R}$.

8. Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onde $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. Mostre que

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}).$$

9. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $\mathbf{P}$ invertível. Mostre que $\det(\mathbf{PAP}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$.

10. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Mostre que $\det(\mathbf{A}) = 0$ ou $\det(\mathbf{A}) = 1$.

11. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que $\det(\mathbf{A}) = 0$.

12. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\mathbf{I}_n - \mathbf{AB}$ seja invertível. Mostre que $\mathbf{I}_n - \mathbf{BA}$ é invertível e

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{I}_n + \mathbf{B}(\mathbf{I}_n - \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}.$$

13. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\mathbf{B}, \mathbf{P}$ e $\mathbf{APA}^t + \mathbf{B}^{-1}$ sejam invertíveis. Mostre que $\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}^t\mathbf{BA}$ é invertível e

$$(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}^t\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{PA}^t(\mathbf{APA}^t + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{AP}.$$

14. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

Mostre que $\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$. Mostre que se $\mathbf{A}$ é invertível, então

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}).$$

Em particular, se $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$, mostre que $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{CB})$. (Sugestão: Note que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.)$$

15. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O *traço* de $\mathbf{A}$ é definido por

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Mostre que:

- (a) $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
 - (b) $\text{tr}(a\mathbf{A}) = a \text{tr}(\mathbf{A})$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $a \in \mathbb{R}$.
 - (c) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
 - (d) $\text{tr}(\mathbf{PAP}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{A})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $\mathbf{P}$ invertível.
 - (e) $\text{tr}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) = 0$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
16. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$, para toda matriz diagonal $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal.
17. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, para toda $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se, e somente se, $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n$, para algum $a \in \mathbb{R}$. (Sugestão: Calcule $\mathbf{AE}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$.)
18. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma *matriz simétrica* se $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ e que $\mathbf{A}$ é uma *matriz anti-simétrica* se $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$.
- (a) Mostre que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são simétricas (anti-simétricas), então $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ são simétricas (anti-simétricas).
 - (b) Mostre que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são simétricas então $\mathbf{AB}$ é simétrica se, e somente se, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
 - (c) Mostre que $\mathbf{AA}^t$ e $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ são simétricas e $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t$ é anti-simétrica.
 - (d) Mostre que se $\mathbf{A}$ é anti-simétrica e n é ímpar, então $\det(\mathbf{A}) = 0$.
19. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma *matriz ortogonal* se $\mathbf{AA}^t = \mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Mostre que se $\mathbf{A}$ é ortogonal, então $\det \mathbf{A} = \pm 1$.
20. Seja $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(\mathbf{AB}) = f(\mathbf{A})f(\mathbf{B}), \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

e existem $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $f(\mathbf{X}) \neq 0$ e $f(\mathbf{Y}) \neq 1$. Mostre que se $\mathbf{A}$ é invertível, então $f(\mathbf{A}) \neq 0$.

1.3 Sistemas de Equações Lineares

Um *sistema de equações lineares* com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad (1.1)$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Uma *solução* do sistema de equações lineares (1.1) é uma n -upla

$$\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{ou} \quad \mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_n]$$

que satisfaz cada uma das m equações, isto é,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Observação 1.10 *Se*

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

dizemos que o sistema de equações lineares (1.1) é um sistema homogêneo. Note que a n -upla

$$(0, \dots, 0)$$

é sempre uma solução do sistema homogêneo.

O sistema (1.1) pode ser escrito sob a forma matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad \mathbf{X}^t \mathbf{A}^t = \mathbf{B}^t,$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes. Neste caso,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 \mathbf{X} &= b_1 \\ \mathbf{L}_2 \mathbf{X} &= b_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{L}_m \mathbf{X} &= b_m, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

O sistema de equações lineares (1.2) é chamado de *sistema compatível* se para qualquer escolha de $r_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^m r_i \mathbf{L}_i = \mathbf{0},$$

então necessariamente

$$\sum_{i=1}^m r_i b_i = 0.$$

Caso contrário, ele é chamado de *sistema incompatível*.

Se o sistema de equações lineares (1.2) tem solução, então ele é compatível, pois se $\mathbf{Y}$ é uma solução do sistema e

$$\sum_{i=1}^m r_i \mathbf{L}_i = \mathbf{0},$$

então

$$\sum_{i=1}^m r_i b_i = \sum_{i=1}^m r_i (\mathbf{L}_i \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m (r_i \mathbf{L}_i) \mathbf{Y} = \left(\sum_{i=1}^m r_i \mathbf{L}_i \right) \mathbf{Y} = \mathbf{0} \mathbf{Y} = 0.$$

A matriz associada ao sistema de equações lineares (1.1) ou (1.2)

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz ampliada (aumentada) do sistema*.

Dizemos que dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se eles admitem as mesmas soluções.

Exemplo 1.11 Vamos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

usando algumas operações sobre as linhas da matriz ampliada do sistema.

Solução. Considerando a matriz ampliada do sistema, temos que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & 4 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & 4 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{7}{3} \\ x_2 & = & -\frac{1}{3} \\ x_3 & = & -1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$$

é a única solução do sistema.

As operações usadas na matriz ampliada do sistema foram:

1. Permutação das i -ésima e j -ésima linhas. ($L_i \leftrightarrow L_j$)
2. Multiplicação da i -ésima linha por um escalar não-nulo c . ($L_i \rightarrow cL_i$, $c \neq 0$)
3. Substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais c vezes a j -ésima linha, $i \neq j$. ($L_i \rightarrow L_i + cL_j$)

Estas operações são chamadas de *operações elementares sobre as linhas* da matriz $\mathbf{A}$ (operações elementares sobre as colunas da matriz $\mathbf{A}$ podem ser definidas de modo análogo). É fácil verificar que operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $\mathbf{A}'$ correspondem a efetuar *combinações lineares* das equações do sistema de equações lineares

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Observações 1.12 1. Cada operação acima tem uma inversa do mesmo tipo:

- (a) $L_j \rightarrow L_i$ é sua própria inversa.
- (b) $L_i \rightarrow cL_i$ e $c^{-1}L_i \rightarrow L_i$ são inversas.
- (c) $L_i \rightarrow L_i + cL_j$ e $L_i + c^{-1}L_j \rightarrow L_i$ são inversas.

2. Note, também, que as operações acima são equivalentes a:

- (a) $\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A}$, onde $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}$.
- (b) $\mathbf{S}_i(c)\mathbf{A}$, onde $\mathbf{S}_i(c) = \mathbf{I}_n + (c - 1)\mathbf{E}_{ii}$ (a matriz $\mathbf{S}_i(c)$ é chamada de dilatação).
- (c) $\mathbf{V}_{ij}(c)\mathbf{A}$, onde $\mathbf{V}_{ij}(c) = \mathbf{I}_n + c\mathbf{E}_{ij}$, $i \neq j$ (a matriz $\mathbf{V}_{ij}(c)$ é chamada de transversão).

Teorema 1.13 Se um sistema de equações lineares é obtido de outro através de um número finito de operações elementares, então eles são equivalentes.

Prova. É claro que basta provar que uma operação elementar sempre produz um sistema equivalente. As operações (1) e (2) são facilmente provadas. Suponhamos que a operação consiste na substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais c vezes a j -ésima linha com $i < j$. Então o sistema (1.2) pode ser escrito sob a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1\mathbf{X} &= b_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{L}_{i-1}\mathbf{X} &= b_{i-1} \\ (\mathbf{L}_i + c\mathbf{L}_j)\mathbf{X} &= b_i + cb_j \\ &\vdots \\ \mathbf{L}_j\mathbf{X} &= b_j \\ &\vdots \\ \mathbf{L}_m\mathbf{X} &= b_m. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Agora, se $\mathbf{Y}$ é solução do sistema (1.2), então é claro que $\mathbf{Y}$ também é solução do sistema (1.3). Reciprocamente, seja $\mathbf{Y}$ uma solução do sistema (1.3), de modo que, em particular,

$$(\mathbf{L}_i + c\mathbf{L}_j)\mathbf{Y} = b_i + cb_j \text{ e } \mathbf{L}_j\mathbf{Y} = b_j.$$

Como

$$(\mathbf{L}_i + c\mathbf{L}_j)\mathbf{Y} = \mathbf{L}_i\mathbf{Y} + c\mathbf{L}_j\mathbf{Y}$$

temos que

$$\mathbf{L}_i\mathbf{Y} = b_i$$

Portanto, $\mathbf{Y}$ é solução do sistema (1.2). ■

Uma matriz $n \times n$ é chamada de *matriz elementar* se ela foi obtida por efetuar exatamente uma operação elementar sobre as linhas (as colunas) da matriz identidade $\mathbf{I}_n$.

Proposição 1.14 *Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{E}_m$ ($\mathbf{E}_n$) a matriz elementar obtida por efetuar uma operação elementar $\mathbf{T}$ sobre as linhas (as colunas) da matriz $\mathbf{I}_m$ ($\mathbf{I}_n$), isto é, $\mathbf{E}_m = \mathbf{T}(\mathbf{I}_m)$ ($\mathbf{E}_n = \mathbf{T}(\mathbf{I}_n$)). Então $\mathbf{E}_m\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}\mathbf{E}_n$) é a matriz obtida por efetuar uma operação elementar $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{A}$.*

Prova. (Caso $m = 3$ e $n = 4$). Consideremos a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{E}_3$ é a permutação $L_1 \leftrightarrow L_2$ de $\mathbf{I}_3$, então

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{A}).$$

Se $\mathbf{E}_3$ é a multiplicação $L_2 \leftrightarrow cL_2$ de $\mathbf{I}_3$ com $c \neq 0$, então

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & ca_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{A}).$$

Se $\mathbf{E}_3$ é a substituição $L_2 \rightarrow L_2 + cL_1$ de $\mathbf{I}_3$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} & a_{23} + ca_{13} & a_{24} + ca_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Esse procedimento se aplica ao caso geral. ■

Corolário 1.15 *Toda matriz elementar $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é invertível e sua inversa é uma matriz elementar.*

Prova. Como $\mathbf{E} = \mathbf{T}(\mathbf{I}_n)$ temos, pelo item (1) da Observação 1.12, que $\mathbf{I}_n = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{E})$. Se $\mathbf{F}$ é a matriz elementar obtida por efetuar $\mathbf{T}^{-1}$ sobre $\mathbf{I}_n$, isto é, $\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{I}_n)$, então, Pela Proposição 2.20,

$$\mathbf{FE} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{E}) = \mathbf{I}_n.$$

É fácil verificar diretamente que $\mathbf{EF} = \mathbf{I}_n$. ■

Corolário 1.16 *Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se $\mathbf{B}$ for obtida de $\mathbf{A}$ através de um número finito de operações elementares sobre as linhas e as colunas da matriz $\mathbf{A}$, então $\mathbf{B}$ é equivalente a $\mathbf{A}$.*

Prova. Pela Proposição 2.20, temos que

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_l,$$

onde $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{F}_j$ são matrizes elementares. Fazendo $\mathbf{P} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_l$, obtemos matrizes invertíveis $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ tais que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ},$$

isto é, $\mathbf{B}$ é equivalente a $\mathbf{A}$. ■

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}$ duas matrizes $m \times n$. Dizemos que $\mathbf{R}$ é *equivalente por linha* (por coluna) a $\mathbf{A}$ se $\mathbf{R}$ for obtida de $\mathbf{A}$ através de um número finito de operações elementares sobre as linhas (as colunas) da matriz $\mathbf{A}$, isto é,

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}, \quad (\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_l)$$

onde $\mathbf{E}_i$ ($\mathbf{F}_j$) são matrizes elementares.

Exemplo 1.17 *As matrizes abaixo são equivalentes por linhas:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz $\mathbf{R}$ é *reduzida por linha* à forma em escada se:

1. O primeiro elemento não-nulo em cada linha não-nula de $\mathbf{R}$ for igual a 1.

2. Cada coluna de $\mathbf{R}$ que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha tem todos os outros elementos nulos.
3. Toda linha de $\mathbf{R}$ cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem um elemento não-nulo.
4. Se as linhas $i = 1, \dots, r$, com $r \leq m$, são as linhas não-nulas de $\mathbf{R}$ e se o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então

$$k_1 < k_2 < \dots < k_r.$$

Observação 1.18 *O primeiro elemento em qualquer linha de $\mathbf{R}$ na posição (i, k_i) é chamado de pivô.*

Exemplos 1.19 1. A matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

está na forma em escada.

2. A matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

não está na forma em escada, pois $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 2$ não implica que

$$k_1 < k_2 < k_3.$$

Exemplo 1.20 *Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{E}$ uma matriz elementar $n \times n$. Mostre que*

$$\det(\mathbf{AE}) = \det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{E}.$$

Em particular, prove o Teorema de Binet-Cauchy.

Solução. Aplicando os itens (1), (2) e (6) da Proposição 2.14 e a Proposição 2.20, obtemos

$$\det(\mathbf{AE}) = \det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{E}.$$

Teorema 1.21 *Toda matriz $m \times n$ é equivalente por linha a uma matriz na forma em escada.*

Prova. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$. Se $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, nada há para ser provado. Se $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, então existe a_{ij} em $\mathbf{A}$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Entre todas as linhas de $\mathbf{A}$, escolhemos aquela em que k_1 seja o primeiro j para o qual $a_{ij} \neq 0$. Logo, permutando a i -ésima linha com a primeira linha ($L_i \leftrightarrow L_1$) movemos o elemento a_{ik_1} para a posição $(1, k_1)$. Multiplicando a primeira linha de $\mathbf{A}$ por $a_{ik_1}^{-1}$, obtemos uma matriz cuja primeira linha é

$$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad b_{1(k_1+1)} \quad \cdots \quad b_{1n}].$$

Agora, substituindo a i -ésima linha pela i -ésima linha mais $(-a_{ik_1})$ vezes a primeira linha, $i \neq 1$ ($L_i \rightarrow L_i + (-a_{ik_1})L_1$), obtemos uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{1(k_1+1)} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{2(k_1+1)} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{m(k_1+1)} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Se todos $b_{ij} = 0$, acabou. Se algum $b_{ij} \neq 0$, então o processo acima pode ser repetido, obtendo uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1(k_2+1)} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{2(k_2+1)} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{3(k_2+1)} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m(k_2+1)} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

E assim sucessivamente. ■

Corolário 1.22 *Toda matriz $m \times n$ é equivalente a uma matriz da forma*

$$\mathbf{E}_r^{m,n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

onde $r \leq \min\{m, n\}$, $\mathbf{I}_r$ é uma matriz identidade $r \times r$ e $\mathbf{O}$ são matrizes nulas.

Prova. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$. Se $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, nada há para ser provado. Se $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, então existe a_{ij} em $\mathbf{A}$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Então permutando a i -ésima linha com a primeira linha ($L_i \leftrightarrow L_1$) e a j -ésima coluna com a primeira coluna ($C_j \leftrightarrow C_1$) movemos o elemento a_{ij} para a posição $(1, 1)$. Multiplicando a primeira linha de $\mathbf{A}$ por a_{ij}^{-1} , obtemos uma matriz cuja primeira linha é

$$[1 \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n}].$$

Agora, substituindo a i -ésima linha (j -ésima coluna) pela i -ésima linha (j -ésima coluna) mais $(-a_{i1})$ ($(-a_{1j})$) vezes a primeira linha, $i \neq 1$ (primeira coluna, $j \neq 1$) ($L_i \rightarrow$

$L_i + (-a_{i1})L_1$ ($C_j \rightarrow C_j + (-a_{1j})C_1$)), obtemos uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Se todos $b_{ij} = 0$, acabou. Se algum $b_{ij} \neq 0$, então o processo acima pode ser repetido com a submatriz $(m-1) \times (n-1)$ $[b_{ij}]$. E assim sucessivamente. ■

Sejam $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{R}$ uma matriz $m \times n$ linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. O *posto* (*linha*) de $\mathbf{A}$, em símbolos $\text{posto}(\mathbf{A})$, é igual ao número de linhas não-nulas de $\mathbf{R}$. A *nulidade* de $\mathbf{A}$, em símbolos $\text{nul}(\mathbf{A})$, é igual a

$$\text{nul}(\mathbf{A}) = n - \text{posto}(\mathbf{A}).$$

Em particular,

$$\text{posto}(\mathbf{E}_r^{m,n}) = r, \text{ onde } r \leq \min\{m, n\}.$$

Exemplo 1.23 *Determine o posto e a nulidade da matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução. Reduzindo a matriz $\mathbf{A}$ à forma em escada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix},$$

temos que o $\text{posto}(\mathbf{A}) = 3$ e a $\text{nul}(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$.

Proposição 1.24 *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O posto de $\mathbf{A}$ é igual a n ;*
2. *$\mathbf{A}$ é equivalente por linha a $\mathbf{I}_n$;*
3. *$\mathbf{A}$ é invertível;*
4. *$\mathbf{A}$ é um produto de matrizes elementares.*

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Suponhamos que $\text{posto}(\mathbf{A}) = n$ e que $\mathbf{R}$ seja uma matriz linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. Então, por definição, $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$. Logo, $\mathbf{A}$ é equivalente por linha a $\mathbf{I}_n$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Seja $\mathbf{R}$ uma matriz linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. Então

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A},$$

onde $\mathbf{E}_i$ são matrizes elementares. Assim, se $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$, então

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}$$

é invertível, pois cada $\mathbf{E}_i$ é invertível, para $i = 1, \dots, k$.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Seja $\mathbf{R}$ uma matriz linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. Então

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A},$$

onde $\mathbf{E}_i$ são matrizes elementares. Assim, se $\mathbf{A}$ é invertível, então

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}$$

é invertível. Logo, $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$ e

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}.$$

(4. $\Rightarrow$ 1.) Suponhamos que $\mathbf{A}$ seja um produto de matrizes elementares e que $\mathbf{R}$ seja uma matriz linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. Então, por definição, $\mathbf{R} = \mathbf{I}_n$. Portanto, o posto de $\mathbf{A}$ é igual a n . ■

Teorema 1.25 *Sejam $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas e $\mathbf{A}'$ sua matriz ampliada. Então o sistema tem solução se, e somente se,*

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}')$$

ou, equivalentemente, a forma reduzida da matriz $\mathbf{A}'$ não contém uma linha da forma $(0, \dots, 0, b)$ com $b \neq 0$.

Prova. Seja $\mathbf{R}$ uma matriz linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. Então, pelo Teorema 1.13, os sistemas $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{C}$ têm exatamente as mesmas soluções. Logo,

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}').$$

Reciprocamente, se

$$r = \text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}'),$$

então $\mathbf{R}$ possui r linhas não-nulas com o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorrendo na coluna k_i . Logo, o sistema $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ é equivalente ao sistema $\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{C}$, onde $\mathbf{C} = [c_i]^t$ com $c_i = 0$, para $i > r$. Portanto, o sistema $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ tem solução. ■

Observação 1.26 *Sejam $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas e $\mathbf{A}'$ sua matriz ampliada.*

1. Se $\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}')$ e $\text{posto}(\mathbf{A}) = n$, então o sistema tem uma única solução. Em particular, se $m = n$, então para determinar a solução do sistema basta transformar a matriz

$$[\mathbf{A} \quad \vdots \quad \mathbf{I}_n \quad \vdots \quad \mathbf{B}]$$

na matriz

$$[\mathbf{I}_n \quad \vdots \quad \mathbf{A}^{-1} \quad \vdots \quad \mathbf{X}].$$

2. Se $\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}')$ e $\text{posto}(\mathbf{A}) < n$, então o sistema tem infinitas soluções. Neste caso, existem

$$\text{nul}(\mathbf{A}) = n - \text{posto}(\mathbf{A})$$

variáveis livres.

3. Se $\text{posto}(\mathbf{A}) < \text{posto}(\mathbf{A}')$, então o sistema não tem solução.
4. Uma maneira alternativa de resolver o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é considerando a matriz $\mathbf{A}$ -associada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \vdots & \mathbf{I}_n \\ \dots & \vdots & \dots \\ -\mathbf{B}^t & \vdots & \mathbf{O}^t \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tem uma solução particular $\mathbf{X}_p$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \vdots & \mathbf{I}_n \\ \dots & \vdots & \dots \\ -\mathbf{B}^t & \vdots & \mathbf{O}^t \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{R}^t & \vdots & \mathbf{S} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{O}^t & \vdots & \mathbf{X}_p^t \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{R}^t$ é a matriz linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}^t$. Portanto, a solução geral do sistema é $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_h$, onde

$$\mathbf{X}_h = \sum_{i=k+1}^n c_i \mathbf{s}_i, c_i \in \mathbb{R},$$

$k = \text{posto}(\mathbf{A}^t)$ e $\mathbf{s}_i$, $i = k+1, \dots, n$, são as linhas da matriz $\mathbf{S}$. Note que $\mathbf{X}_h$ é a solução do sistema homogêneo $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$.

Exemplo 1.27 Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ x + 8y - 6z = -7. \end{cases}$$

Solução. Vamos escalonar a matriz $\mathbf{A}$ -associada

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & & & \\ 2 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 1 & 0 & & & \\ -2 & -2 & -6 & \vdots & 0 & 0 & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & & & \\ -1 & -6 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 5 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & & & \end{array} \right].$$

Portanto,

$$\mathbf{X} = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0 \right) + c \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right), \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

é a solução geral do sistema. Fazendo $c = 0$, temos que a solução particular do sistema é

$$\mathbf{X}_p = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0 \right)$$

EXERCÍCIOS

1. Determine $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = b \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

tenha infinitas soluções.

2. Seja o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ 5x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Determine condições sobre b_1, b_2 e b_3 , de modo que o sistema tenha solução.

3. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que exista uma matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Determine uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, de modo que

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - 2\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^2 - \mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{X}\mathbf{B}^2.$$

5. Seja $t \in \mathbb{R}$ fixado e considere os conjuntos

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + tz = 2\}, V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 1\}, \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - (1 + t)y = t\}. \end{aligned}$$

Determine $U \cap V \cap W$. Dê uma interpretação geométrica desse problema.

6. Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Determine uma matriz $\mathbf{R}$ linha reduzida à forma em escada que seja linha equivalente a $\mathbf{A}$ e uma matriz 3×3 invertível $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{R} = \mathbf{PA}$. (Sugestão: Basta reduzir a matriz

$$[\mathbf{A} : \mathbf{I}_3] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\mathbf{R} : \mathbf{P}].$$

à forma em escada.)

7. Determine a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: Basta reduzir a matriz

$$[\mathbf{A} : \mathbf{I}_3] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\mathbf{I}_3 : \mathbf{A}^{-1}]$$

à forma em escada.)

8. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $\mathbf{A}$ é equivalente a $\mathbf{B}$ se $\mathbf{B}$ for obtida de $\mathbf{A}$ por uma seqüência finita de operações elementares por linha e coluna.

9. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Note que $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ é diagonal. (Sugestão: Considere a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & : & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 8 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

agora aplique as operações de linhas e as correspondentes operações de colunas para reduzir $\mathbf{B}$ à forma

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

continue até obter

$$[\mathbf{D} \quad : \quad \mathbf{P}^t].)$$

10. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

de modo que

$$f + f' + f'' + f''' = 1.$$

11. Uma matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

é um *quadrado mágico de ordem 3* se a soma das três linhas, a soma das três colunas e a soma das duas diagonais são todas iguais ao mesmo número s .

- (a) Reescreva as condições para um quadrado mágico como um sistema de 8 equações lineares nas variáveis s , a_i , b_i e c_i , $i = 1, 2, 3$ e resolva esse sistema.
- (b) Mostre que $3b_2 = s$.
- (c) Substitua as estrelas por números, de modo que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ * & * & * \\ 2 & * & 4 \end{bmatrix}$$

seja um quadrado mágico.

12. Mostre que as matrizes do item (2) da Observação 1.12, possui as seguintes propriedades:

- (a) $\mathbf{P}_{ij}^2 = \mathbf{I}_n$.
- (b) $\mathbf{S}_i(c)\mathbf{S}_i(d) = \mathbf{S}_i(cd)$.
- (c) $\mathbf{S}_i(c)^{-1} = \mathbf{S}_i(c^{-1})$.
- (d) $\mathbf{V}_{ij}(c+d) = \mathbf{V}_{ij}(c)\mathbf{V}_{ij}(d)$.
- (e) $\mathbf{V}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{V}_{ij}(c^{-1})$.

13. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Mostre que se o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tem uma solução $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, então ele tem também uma solução $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

14. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine matrizes elementares $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ tais que

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}_3.$$

15. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (x_i - x_j).$$

Esse determinante é conhecido como o *determinante de Vandermonde*. (Sugestão: Use indução em n e considere as operações elementares sobre colunas $C_{j+1} \rightarrow C_{j+1} - x_j C_j$, $j = 1, \dots, n-1$.)

16. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} = [(a-b)(a-c)(b-c)]^2,$$

onde $s_i = a^i + b^i + c^i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

17. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $\mathbf{A}$ é invertível;
- (b) O sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$ tem somente a solução nula $\mathbf{X} = \mathbf{O}$;
- (c) O sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ tem uma solução $\mathbf{X}$, para toda $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

18. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que se existir $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ ou $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, então $\mathbf{A}$ é invertível.