

Capítulo 2

Geometria Analítica

Neste capítulo apresentaremos uma representação geométrica do conjunto dos números reais, o sistema de coordenadas cartesianas, a equação geral da reta, métodos gerais para traçar gráficos de curvas e cônicas.

No que segue vamos precisar das noções primitivas no plano *ponto* e *reta*. Entre essas noções primitivas Hilbert (matemático alemão David Hilbert, 1862 - 1943), supõe que existem três relações primitivas: *um ponto está entre dois pontos*, *um ponto está em uma reta* e a *relação de congruência*. Essas noções e relações primitivas devem satisfazer os seguintes axiomas:.

- Axiomas de ordem (está entre)
- Axiomas de incidência (está em).
- Axiomas de congruência.
- Axioma das paralelas

O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [1].

2.1 Representação Geométrica dos Números Reais

Nesta seção vamos mostrar, de um ponto de vista intuitivo, que os números reais podem ser identificados com os pontos de uma reta.

Dados os pontos A e B do plano, com $A \neq B$. A única reta r que passa por A e B será chamada de *reta suporte* ou *direção*.

Um *segmento de reta* (fechado) determinado por A e B , denotado por $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$, é o conjunto de todos pontos formado por A e B e os pontos da reta suporte que estejam entre A e B . Neste caso, A e B chamam-se os *pontos extremos*.

Fixemos sobre a reta r um ponto O . Agora, escolhamos um outro ponto P_1 sobre r e uma unidade de comprimento u , de modo que u seja igual ao comprimento do segmento $\overline{OP_1}$.

Com um compasso de abertura $\overline{OP_1}$ centrado em P_1 marcamos o ponto P_2 , a partir do qual, obtemos o ponto P_3 , e assim sucessivamente, obtemos a sequência de pontos

$$P_1, P_2, P_3, \dots,$$

sendo que o n -ésimo ponto P_n dista n unidades do ponto O . De modo análogo, obtemos a sequência de pontos

$$P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots$$

na direção oposta (confira Figura 2.1).

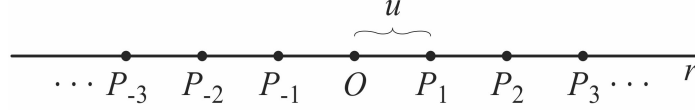
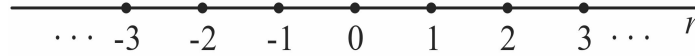


Figura 1: Marcando os pontos P_n sobre r .

Assim, identificamos cada $n \in \mathbb{Z}$ com um ponto $P_n \in r$. Portanto, a figura acima se transforma na Figura 2.1.



Identificando cada $n \in \mathbb{Z}$ com um ponto $P_n \in r$.

Dado

$$x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},$$

com $n > 0$. Como podemos associar x a um único ponto da reta r ?

Primeiro. Se $m > n$, então, pelo algoritmo da divisão, existem únicos $q, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m = qn + s, \text{ onde } s \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

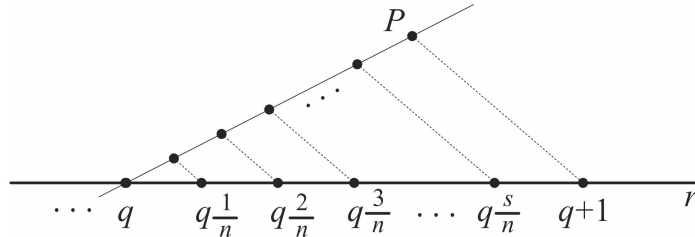
Assim,

$$x = \frac{m}{n} = q + \frac{s}{n} = q\frac{s}{n},$$

onde $q\frac{s}{n}$ é chamada de *fração mista*.

Segundo. A partir de q tracemos uma reta que faz um certo ângulo com a reta r . Agora, com uma dada abertura do compasso, marcamos a partir de q , n pontos sobre essa reta. Unimos o último ponto P ao ponto $q+1$ e tracemos paralelas ao segmento $\overline{P(q+1)}$. Essas paralelas dividem o segmento $\overline{q(q+1)}$ em n partes iguais.

Terceiro. Tomamos as s primeiras dessas partes. O ponto final da última parte é o ponto que corresponde ao número x Figura a seguir??

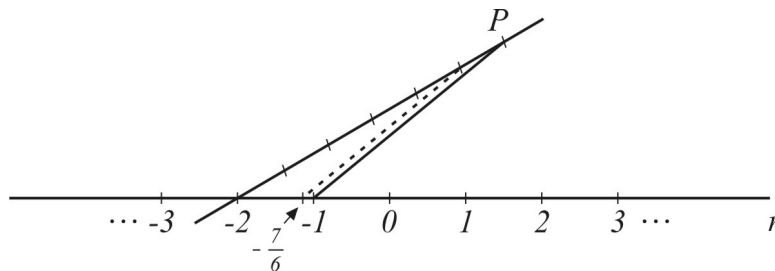


Exemplo 2.1 Marque o ponto $x = -\frac{7}{6}$ sobre a reta r .

Solução. Como $-7 = (-2)6 + 5$ temos que

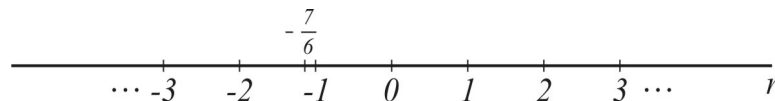
$$-\frac{7}{6} = -2 + \frac{5}{6}$$

o resultado segue da Figura ??.



Marcando o ponto $-\frac{7}{6}$ sobre a reta r .

Assim, identificamos cada $x \in \mathbb{Q}$ com um ponto $P \in r$. Portanto, obtemos a Figura ??.



Identificando cada $x \in \mathbb{Q}$ com um ponto $P \in r$.

Lema 2.2 $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, digamos

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

com $\text{mdc}(a, b) = 1$, isto é, $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ ou } 2b^2 = a^2.$$

Logo, $2 \mid a^2$ implica que $2 \mid a$ (prove isto!) e, assim, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2c$. Assim,

$$2b^2 = 4c^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2,$$

de modo análogo, $2 \mid b$. Portanto,

$$2 \mid \text{mdc}(a, b),$$

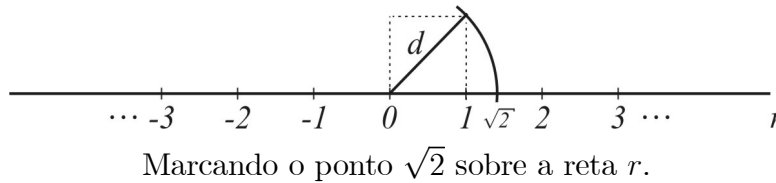
ou ainda, $2 \mid 1$, o que é uma contradição. ■

Agora, vamos mostrar como podemos associar o número irracional $\sqrt{2}$ a um único ponto da reta r ?

Primeiro. Desenhemos a partir de 0 um quadrado com um lado sobre r e de comprimento igual a 1.

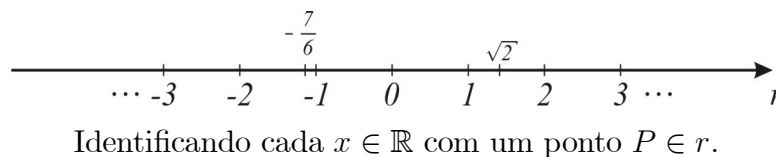
Segundo. Usamos o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal do quadrado d e com uma abertura do compasso igual a d tracemos uma circunferência C centrada em 0.

Terceiro. O ponto P da interseção de C e r é o número irracional $\sqrt{2}$ (confira Figura ??).



Conclusão 2.1 *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta r e o conjunto dos números reais.*

Uma reta r na qual foi estabelecida uma correspondência biunívoca entre seus pontos e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ será chamada de *reta numérica* ou *eixo real*. O ponto O será chamado de *origem* e o número x associado a um ponto P de r será chamado de *coordenada* de P ou *abscissa* de P . A reta r fica *orientada*, pois nela podemos distinguir dois sentidos de percurso: *sentido positivo* ou *semi-reta positivo*, que é o das coordenadas crescentes, e *sentido negativo* ou *semi-reta negativo*, que é o das coordenadas decrescentes.



Se na reta numérica os pontos P e Q têm coordenadas x e y , respectivamente, então $|x - y|$ é a distância entre P e Q , denotada por

$$d(P, Q) = |x - y|.$$

De fato, se $x - y > 0$, isto é, $x > y$, então a distância é $x - y$, enquanto que se $x - y < 0$, isto é, $x < y$, a distância é $y - x = -(x - y)$. Portanto, a distância entre P e Q é $|x - y|$.

EXERCÍCIOS

1. Marcar os pontos abaixo sobre a reta r :

$$(a) \frac{2}{5} \quad (b) -\frac{20}{3} \quad (c) \frac{4}{7} \quad (d) -\frac{15}{7} \quad (e) \frac{5}{9} \quad (f) \frac{5}{12} \quad (g) 10\frac{3}{4}.$$

2. Marcar os pontos abaixo sobre a reta r :

$$(a) \sqrt{3} \quad (b) \sqrt{8} \quad (c) \sqrt{5} \quad (d) \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad (e) \sqrt{27} \quad (f) \sqrt{7}.$$

3. Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. Mostrar que $\sqrt{p}$ é irracional.

4. Sejam $r, s \in \mathbb{R}$, com $r \neq 0$. Mostrar que se r é racional e s é irracional, então $r + s$, $r - s$, rs e $\frac{1}{s}$ são irracionais. Conclua que se r, s são irracionais e $r^2 - s^2$ é racional não-nulo, então $r + s$ e $r - s$ são irracionais. Por exemplo, se $r = \sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$.

5. Marcar o ponto $q + \sqrt{2}$ sobre a reta r , para todo $q \in \mathbb{Q}$.

2.2 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Dados dois conjuntos não-vazios A e B , o *produto cartesiano* de A por B é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , com $x \in A$ e $y \in B$. Notação

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Seja O um ponto fixado no plano. Com origem em O , consideremos dois eixos perpendiculares entre si, os quais são chamados de *eixo dos x* e dos *y* , respectivamente (confira Figura 2.1).

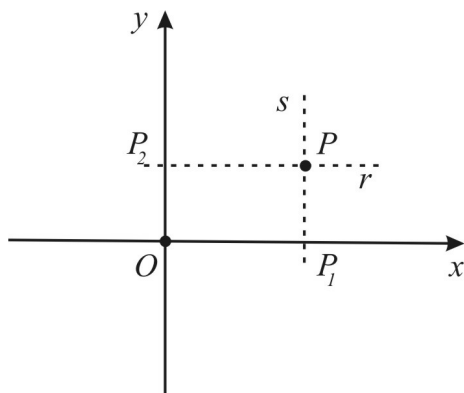


Figura 2.1: Sistema de eixos perpendiculares.

Para cada ponto P do plano tracemos uma paralela ao eixo y , que intercepta o eixo dos x no ponto P_1 cuja coordenada x é chamada de *abscissa* de P . Tracemos, também,

por P uma paralela ao eixo x , que intercepta o eixo dos y no ponto P_2 cuja coordenada y é chamada de *ordenada* de P . Portanto, cada ponto P do plano determina um par ordenado de números reais (x, y) e vice-versa. Os pontos P_1 e P_2 são chamados as *projeções ortogonais* de P sobre os eixos dos x e dos y , respectivamente.

Conclusão 2.2 *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais.*

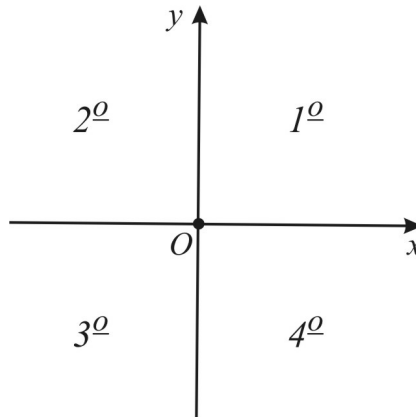
Para indicar que x e y são a abscissa e a ordenada do ponto P , escreveremos

$$P = (x, y).$$

Vamos usar $\mathbb{R}^2$ para indicar o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

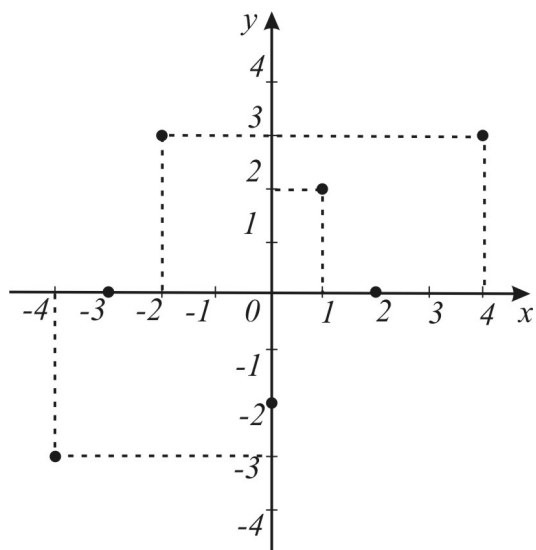
O sistema formado pelo dois eixos perpendiculares é chamada de *sistema de coordenadas cartesianas* ou *plano cartesiano* e $O = (0, 0)$ é a *origem* do sistema. Os eixos x e y são chamados de *eixos coordenados*. (Sistema de eixos foi introduzido pelo filósofo e matemático francês René de Descartes, 1596 - 1650). Note que eles dividem o plano em quatro partes chamadas de *quadrantes* (confira Figura ??).



Sistema de coordenadas cartesianas.

Exemplo 2.3 *Faça o gráfico dos pontos $(-4, -3)$, $(-3, 0)$, $(-2, 3)$, $(1, 2)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ e $(4, 3)$.*

Solução. Para marcar o ponto $(-4, -3)$ no plano cartesiano, devemos andar quatro unidades para à esquerda no eixo dos x e três unidades para baixo no eixo dos y . Os outros pontos são marcados de modo análogo (confira Figura ??).



Representação gráfica de pontos.

Uma *equação* em $\mathbb{R}^2$ é uma igualdade da forma

$$3x - 6y + 6 = 0 \text{ ou } x^2 - 4y^2 + 3 = 0.$$

O *gráfico* ou (a *curva* ou o *lugar*) de uma equação em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem esta equação.

Exemplo 2.4 *Esboçar o gráfico da equação*

$$y^2 - x - 2 = 0.$$

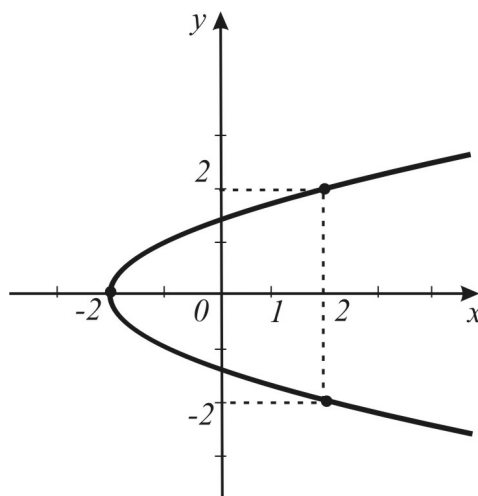
Solução. Como

$$y^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x + 2 \text{ e } y^2 \geq 0$$

devemos escolher os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x \geq -2$. Assim, vamos construir a tabela

x	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	0	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2

para depois esboçar o gráfico (confira Figura ??).

O gráfico da equação $y^2 - x - 2 = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Faça o gráfico dos pontos $(3, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 2)$, $(-2, -3)$, $(1, -1)$, $(-3, 4)$ e $(-\frac{3}{2}, 2)$.
2. Todo ponto pertencente ao eixo das abscissas possui uma mesma ordenada. Qual é o valor dessa ordenada?
3. Todo ponto pertencente ao eixo das ordenadas possui uma mesma abscissa. Qual é o valor dessa abscissa?
4. Dar os sinais da abscissa e da ordenada de um ponto, conforme ele pertença ao 1.º, 2.º, 3.º e 4.º quadrante.

5. Determinar x e y de modo que:

(a) $(2x - 1, y + 2) = (3x + 2, 2y - 6)$.

(b) $(x + 2, y - 3) = (2x + 1, 3y - 1)$.

(c) $(2x, x - 8) = (1 - 3y, y)$.

(d) $(x^2 + x, 2y) = (6, y^2)$.

(e) $(y^2, |x|) = (3, 2)$.

6. Determinar x de modo que:

(a) $(3x - 1, 2x - 1)$ pertença ao 1.º quadrante.

(b) $(x + \sqrt{3}, -2x - 4)$ pertença ao 4.º quadrante.

7. Dados os pares ordenados $(2, 1)$, $(0, 1)$, $(-2, 3)$, $(1, 0)$, $(-1, -2)$, determinar quais deles pertencem ao conjunto

$$A = \{(x, y) : y = x - 1\}.$$

8. Se $A = [-2, 5[$ e $B =]1, 6]$, determinar $A \times B$ e $B \times A$. Representar graficamente.

9. Esboçar o gráfico das equações abaixo:

(a) $y = 2x + 5$ (d) $y = 5$ (g) $y = |x| - 5$

(b) $y = -4x + 3$ (e) $x = y^2 + 1$ (h) $y = x^3$

(c) $y^2 = x - 3$ (f) $y = |x - 5|$ (i) $x^2 + y^2 = 4$.

10. Escreva uma equação cujo gráfico é o eixo dos x . Escreva uma equação cujo gráfico é o eixo dos y .
11. Sejam C e D subconjuntos de B . Mostrar que se $B = C \cup D$, então

$$A \times B = (A \times C) \cup (A \times D).$$

2.3 Distância entre Dois Pontos

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos de $\mathbb{R}^2$. Então há três casos a ser considerado:

1.º **Caso.** Se o segmento $\overline{P_1P_2}$ é paralelo ao eixo dos y , isto é, $x_1 = x_2$, então a distância entre P_1 e P_2 é

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

2.º **Caso.** Se o segmento $\overline{P_1P_2}$ é paralelo ao eixo dos x , isto é, $y_1 = y_2$, então a distância entre P_1 e P_2 é

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|.$$

3.º **Caso.** Se o segmento $\overline{P_1P_2}$ não é paralelo ao eixo dos x e nem ao eixo dos y , isto é, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então traçando por P_1 uma paralela ao eixo dos x e por P_2 uma paralela ao eixo dos y , obtemos um triângulo retângulo P_1QP_2 , com $Q = (x_2, y_1)$, cujos catetos P_1Q e QP_2 têm, pelos casos anteriores, distâncias

$$d(P_1, Q) = |x_2 - x_1| \text{ e } d(P_2, Q) = |y_2 - y_1|,$$

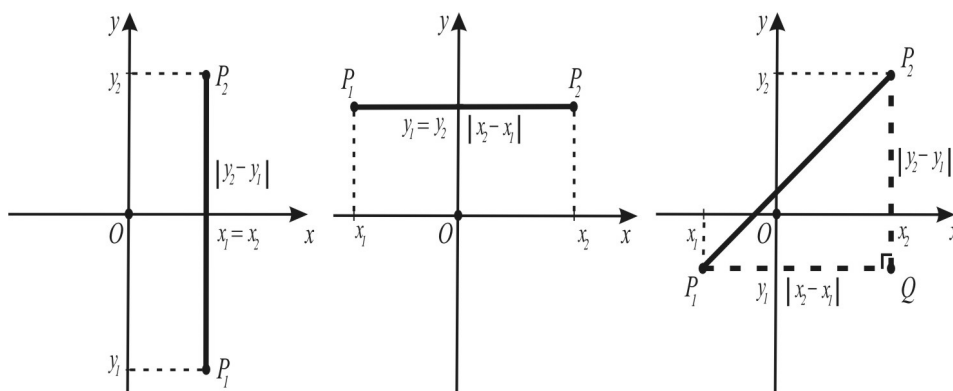
respectivamente. Assim, obtemos pelo Teorema de Pitágoras

$$d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

ou, equivalentemente,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(confira Figura ??).



Distância entre os pontos P_1 e P_2 .

Exemplo 2.5 *Mostrar que o ponto $P = (1, 2)$ é equidistante dos pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$ e $P_3 = (0, 4)$.*

Solução. Basta mostrar que

$$d(P, P_1) = d(P, P_2) = d(P, P_3).$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(P, P_1) &= \sqrt{(0-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} \\ d(P, P_2) &= \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} . \\ d(P, P_3) &= \sqrt{(0-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $P = (1, 2)$ é equidistante dos pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$ e $P_3 = (0, 4)$.

Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ pontos distintos de $\mathbb{R}^2$ e $P = (x, y)$ um ponto da reta suporte de A e B . A *razão simples* ou *razão de divisão* $(A, B; P)$ é um elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Note que $\lambda > 0$ se P está entre A e B , caso contrário, $\lambda < 0$. Se $\lambda \neq -1$, então

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ e } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Em particular, se $\lambda = 1$, então P é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Além disso,

$$d(A, P) = |\lambda| d(P, B).$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular a distância entre:
 - (a) $P_1 = (2, -3)$ e $P_2 = (-3, 2)$
 - (b) $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (-3, 4)$
 - (c) $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (-2, 6)$
 - (d) $P_1 = (3, 3)$ e $P_2 = (-1, 7)$.
2. Sejam os pontos $A = (2, 7)$, $B = (6, 4)$ e $C = (-2, 4)$, mostrar que o triângulo ABC é isósceles.
3. Dados os pontos $A = (1, 4)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 4)$.
 - (a) Calcular o perímetro do triângulo ABC .
 - (b) Mostrar que o triângulo ABC é retângulo e calcular sua área.
4. Determinar x de modo que a distância entre $A = (x, 2)$ e $B = (1, -1)$ seja 5 unidades.

5. Determinar um ponto P do eixo das abscissas, sabendo que P é equidistante dos pontos $A = (3, 8)$ e $B = (9, 2)$.
6. Determinar x de modo que o ponto $P = (3, x)$ seja equidistante dos pontos $P_1 = (0, 4)$ e $P_2 = (6, 0)$.
7. Sabendo-se que $A = (2, -1)$ e $B = (-1, 3)$ são vértices consecutivos de um quadrado, determinar os outros dois.
8. Calcular o comprimento da mediana relativa ao lado BC do triângulo de vértices $A = (2, 17)$, $B = (-6, 1)$ e $C = (-4, -15)$.
9. Se a razão de divisão $(A, B; P)$ é igual a $\frac{2}{3}$, onde $A = (1, 7)$ e $B = (6, -3)$, determinar o ponto P .
10. Se a razão de divisão $(A, B; P)$ é igual a $-\frac{8}{3}$, onde $A = (-2, 1)$ e $B = (3, -4)$, determinar o ponto P .

2.4 A Reta

O gráfico da equação

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.1)$$

onde A , B e C são constantes e pelo menos um dos dois, A ou B , seja não-nulo, é uma *reta*. A equação (2.1) é chamada de *equação geral do 1.º grau* em x e y ou *equação cartesiana da reta*. (A geometria analítica foi criada pelo matemático francês Pierre de Fermat, 1601-1665). Note que a equação

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, representa o mesmo gráfico da equação (2.1).

Uma maneira de esboçar o gráfico de uma reta é determinar as suas interseções com os eixos coordenados: Se $A \neq 0$, então, fazendo $y = 0$, obtemos o ponto

$$P_1 = \left(-\frac{C}{A}, 0\right)$$

de interseção da reta com o eixo dos x , o qual é chamado de *intercepto x* . Se $B \neq 0$, então, fazendo $x = 0$, obtemos o ponto

$$P_2 = \left(0, -\frac{C}{B}\right)$$

de interseção da reta com o eixo dos y , o qual é chamado de *intercepto y* .

Exemplo 2.6 *Esboçar o gráfico da reta*

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

Solução. Para esboçar o gráfico de uma reta basta determinar os interceptos x e y , respectivamente. Fazendo $y = 0$, obtemos

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2.$$

Logo, $P_1 = (2, 0)$ é o ponto de interseção da reta com o eixo dos x . Fazendo $y = 0$, obtemos

$$2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3.$$

Logo, $P_2 = (0, 3)$ é o ponto de interseção da reta com o eixo dos y . Portanto, o gráfico da reta é dado pela Figura ??.

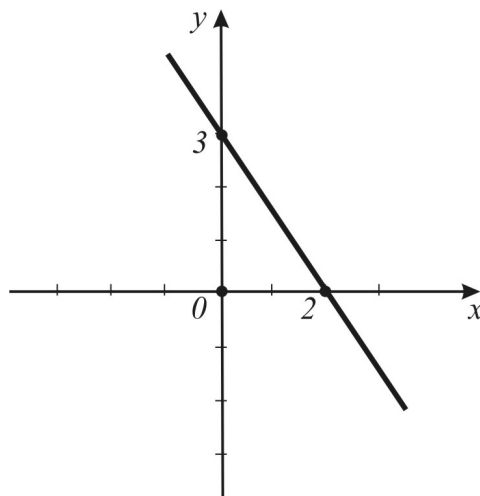
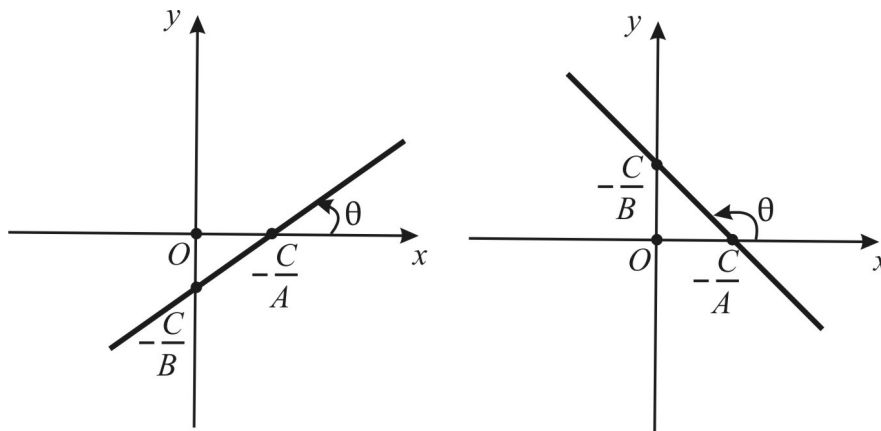


Gráfico da reta $3x + 2y - 6 = 0$.

Ângulo é um conjunto de duas semi-retas não colineares de mesma origem. Assim, se r e s são duas semi-retas de mesma origem, denotamos o ângulo por $\theta = \angle(r, s)$ ou $\theta = \angle(s, r)$. Note que se r' e s' são as semi-retas opostas a r e s , respectivamente, então $\theta = \angle(r', s')$ (*oposto pelo vértice*), $\alpha = \angle(r', s)$ e $\beta = \angle(r, s')$ são os ângulos *adjacentes* a θ .

A *inclinação*, *declive* ou *coeficiente angular* de uma reta é a tangente do ângulo que ela faz com o eixo dos x (confira Figura ??).



Inclinação da reta $Ax + By + C = 0$.

Logo,

$$m = \tan \theta = \left| \frac{A}{B} \right| = \begin{cases} \frac{A}{B} & \text{se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{A}{B} & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Portanto, se $B \neq 0$, a equação (2.1) pode ser escrita sob a forma

$$y = mx + b, \text{ onde } b = -\frac{C}{B}. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) é chamada de *forma inclinação intercepto* (ou *equação reduzida*) da reta e b é chamado de *coeficiente linear* da reta.

Observação 2.7 Se $B = 0$, então a equação (2.1) é a reta

$$x = -\frac{C}{A}$$

paralela ao eixo dos y . Neste caso, a inclinação m não está definida.

Exemplo 2.8 Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 1)$ e tem inclinação $m = -1$.

Solução. A equação da reta que tem inclinação $m = -1$ é

$$y = -x + b.$$

Como $P = (2, 1)$ é um ponto dessa reta temos que

$$1 = -2 + b \Rightarrow b = 3.$$

Portanto, $y = -x + 3$ é a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 1)$ e tem inclinação $m = -1$.

Proposição 2.9 Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos distintos de $\mathbb{R}^2$. Então a equação da reta que passa P_1 e P_2 é dada por

$$x = x_1 \text{ ou } y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1). \quad (2.3)$$

Prova. Como $P_1 \neq P_2$ há três casos a ser considerado.

1.º **Caso.** Se $x_1 = x_2$, então a reta é paralela ao eixo dos y e, portanto, sua equação é

$$x = x_1.$$

Neste caso, a inclinação m não está definida.

2.º **Caso.** Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, então a reta é paralela ao eixo dos x e, portanto, sua equação é

$$y = y_1.$$

Neste caso, $m = 0$.

3.º **Caso.** Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então a reta tem inclinação

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(\text{ou } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)$$

e, portanto, sua equação é

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + b.$$

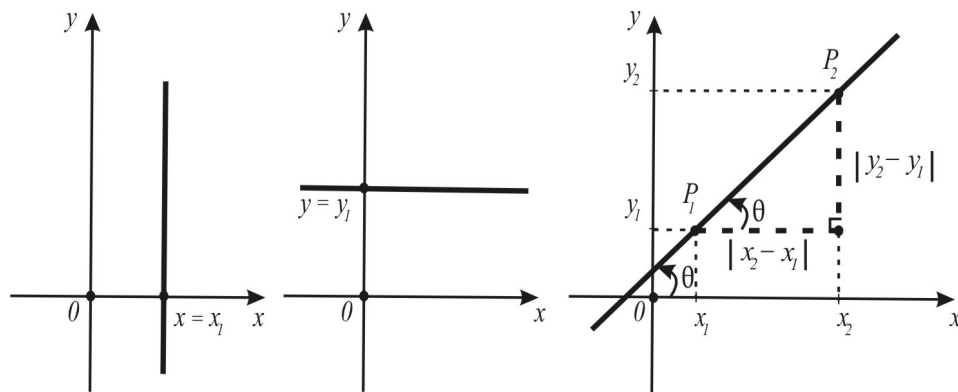
Como $P_1 = (x_1, y_1)$ (ou $P_2 = (x_2, y_2)$) é um ponto dessa reta temos que

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x_1 + b.$$

Logo, por subtração, obtemos

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

que é a equação da reta que passa por P_1 e P_2 (confira Figura 1.1). ■



Reta determinada por dois pontos.

Exemplo 2.10 Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (3, 1)$ e $P_2 = (-1, 2)$.

Solução. A reta tem inclinação

$$m = \frac{2 - 1}{-1 - 3} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

Logo, a equação da reta é

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 3),$$

ou ainda,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}.$$

Consideremos duas retas, r e s , dadas por suas equações cartesianas

$$Ax + By + C = 0 \text{ e } A'x + B'y + C' = 0.$$

Se r não é paralela ao eixo dos y , então r e s são paralelas se, e somente se, elas têm a mesma inclinação, isto é,

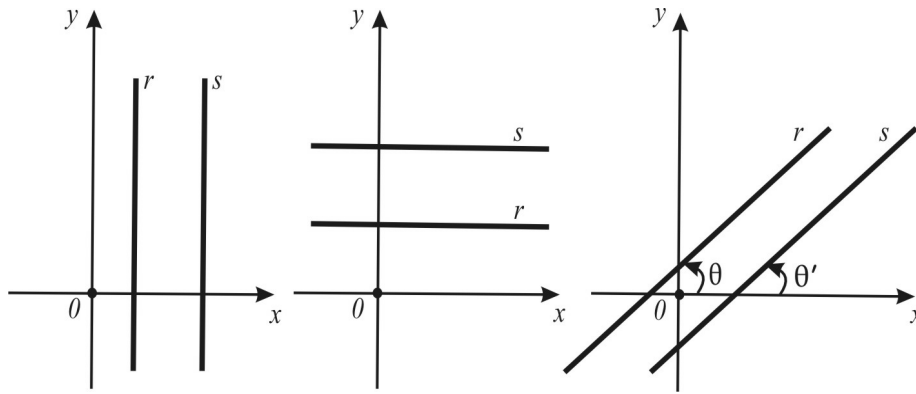
$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \Leftrightarrow AB' - A'B = 0.$$

Se r é paralela ao eixo dos y , então r e s são paralelas se, e somente se, $B = B' = 0$, de modo que

$$AB' - A'B = 0.$$

Portanto, r e s são *paralelas* se, e somente se,

$$AB' - A'B = 0.$$



Retas paralelas.

Note que, se

$$-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'} \quad (CB' - BC' = 0) \text{ e } AB' - A'B = 0,$$

então r e s são *coincidentes*. Portanto, r e s são *concorrentes* se, e somente se,

$$AB' - A'B \neq 0.$$

O *feixe* (a *família*) de retas paralelas a r é o conjunto de todas as retas em $\mathbb{R}^2$ que são paralelas a r , cuja equação é dada por

$$Ax + By + C + \lambda = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

O *feixe* (a *família*) de retas concorrentes a r é o conjunto de todas as retas em $\mathbb{R}^2$ que se interceptam em um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, cuja equação é dada por

$$Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.11 Determinar se as retas são paralelas ou concorrentes:

1. $x - 2y + 5 = 0$ e $3x - 6y + 2 = 0$.

2. $x - y + 1 = 0$ e $2x - y + 2 = 0$.

Solução. (1) Pelas equações temos que $A = 1$, $B = -2$ e $A' = 3$, $B' = -6$. Logo,

$$AB' - A'B = 1 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) = -6 + 6 = 0.$$

Portanto, as retas são paralelas.

(2) Pelas equações temos que $A = 1$, $B = -1$ e $A' = 2$, $B' = -1$. Logo,

$$AB' - A'B = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1 \neq 0.$$

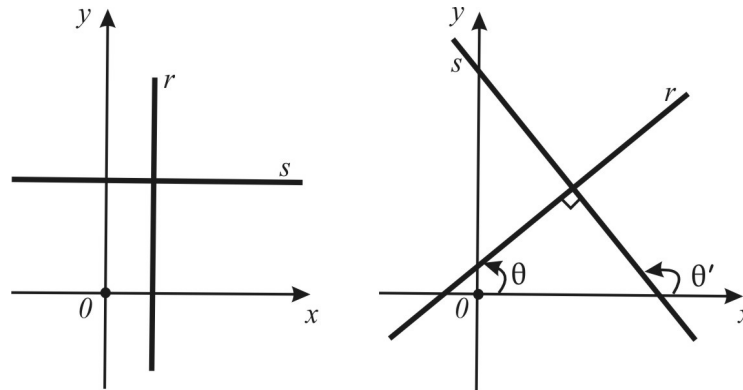
Portanto, as retas são concorrentes.

Finalmente, consideremos duas retas, r e s , dadas por suas equações cartesianas

$$Ax + By + C = 0 \text{ e } A'x + B'y + C' = 0.$$

Se r não é paralela ao eixo dos y , então a inclinação de r é

$$m = \tan \theta = \left| \frac{A}{B} \right|.$$



Assim, pela Figura ??, r e s são perpendiculares se, e somente se,

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Como

$$m' = \tan \theta' = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

temos que $m \cdot m' = -1$ ou, equivalentemente,

$$AA' + BB' = 0.$$

Se r é paralela ao eixo dos y , então r e s são perpendiculares se, e somente se, $B = A' = 0$, de modo que,

$$AA' + BB' = 0.$$

Portanto, r e s são *perpendiculares* se, e somente se,

$$AA' + BB' = 0.$$

Exemplo 2.12 *Determinar se as retas são perpendiculares ou não:*

$$1. \ 3x - y - 1 = 0 \text{ e } x + 3y = 0.$$

$$2. \ x - y = 0 \text{ e } x + 2y - 1 = 0.$$

Solução. (1) Pelas equações temos que $A = 3$, $B = -1$ e $A' = 1$, $B' = 3$. Logo,

$$AA' + BB' = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0.$$

Portanto, as retas são perpendiculares.

(2) Pelas equações temos que $A = 1$, $B = -1$ e $A' = 1$, $B' = 2$. Logo,

$$AA' + BB' = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Portanto, as retas não são perpendiculares mas são concorrentes, pois

$$AB' - A'B = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Observação 2.13 *Para estudar a posição relativa de duas retas r e s , basta discutir o sistema*

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ A'x + B'y = -C', \end{cases}$$

pois quando $AB' - A'B = 0$, há dois casos a ser considerado: se $CB' - BC' = 0$, então o sistema é compatível e indeterminado, isto é, infinitas soluções (retas coincidentes); se $CB' - BC' \neq 0$, então o sistema é incompatível, isto é, não possui solução (retas paralelas). Finalmente, quando $AB' - A'B \neq 0$ o sistema é compatível e determinado, isto é, tem uma única solução (retas concorrentes). Em particular, se $AA' + BB' = 0$, então elas são perpendiculares.

Proposição 2.14 *Sejam $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e r uma reta, cuja equação cartesiana é $Ax + By + C = 0$. Então a distância de P_0 a reta r é dada por*

$$d(P_0, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Prova. É fácil verificar que a equação da reta s que passa por P_0 e é perpendicular a r é dada por

$$-Bx + Ay + Bx_0 - Ay_0 = 0.$$

Seja $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ o ponto de interseção dessas retas, isto é, o pé da perpendicular traçada de P_0 a r . Então

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \text{ e } -Bx_1 + Ay_1 + Bx_0 - Ay_0 = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{cases} A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 + C \\ B(x_0 - x_1) - A(y_0 - y_1) = 0. \end{cases}$$

Assim, multiplicando a primeira equação por A , a segunda equação por B e adicionando-as, temos que

$$x_0 - x_1 = \frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C).$$

De modo análogo, temos que

$$y_0 - y_1 = \frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C).$$

Portanto, desenvolvendo, obtemos

$$\begin{aligned} d(P_0, r) &= d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

■

Para finalizarmos esta seção, vamos expressar a equação da reta que passa em dois pontos, em forma de determinante.

A equação da reta que passa pelos pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é, conforme equação (2.3), dada por

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

ou, equivalentemente,

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1),$$

ou ainda,

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

É fácil verificar que isto é o desenvolvimento, relativo a primeira linha, do determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pode ser escrita sob a forma de determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$

Exemplo 2.15 Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (-1, 3)$ e $P_2 = (2, 1)$.

Solução. Já vimos que a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (-1, 3)$ e $P_2 = (2, 1)$ é dada por

$$\det \left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow (3-1)x - (-1-2)y + (-1-6) = 0,$$

isto é, $2x + 3y - 7 = 0$. O determinante de uma matriz de ordem três pode, também, ser obtido pela **Regra de Sarrus**.

$$\begin{array}{ccccc} x & y & 1 & x & y \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow - \\ \nearrow - \\ \nearrow - \\ \searrow + \\ \searrow + \\ \searrow + \end{array} = (3x + 2y - 1) - (6 + x - y) = 2x + 3y - 7.$$

Figura 2.2: Regra de Sarrus.

Observação 2.16 Sejam r e s duas retas

1. Se suas equações cartesianas são:

$$Ax + By + C = 0 \text{ e } A'x + B'y + C' = 0.$$

Uma condição necessária e suficiente para que r e s sejam paralelas (concorrentes) é que

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A & B & 1 \\ A' & B' & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \left(\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A & B & 1 \\ A' & B' & 1 \end{bmatrix} \right) \neq 0 \right).$$

Observações 2.17 1. Uma condição necessária e suficiente para que três pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ estejam alinhados é que

$$\det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Exemplo 2.18 Determinar se os pontos $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (3, 5)$ e $P_3 = (0, -1)$ estão alinhados.

Solução. Os pontos estão alinhados se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = (10 + 0 - 3) - (0 - 2 + 9) = 7 - 7 = 0.$$

Portanto, os pontos $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (3, 5)$ e $P_3 = (0, -1)$ estão alinhados.

Exemplo 2.19 Determinar a equação da reta que intercepta os eixos coordenados, fora da origem, nos pontos $A = (p, 0)$ e $B = (0, q)$.

Solução. Já vimos que a equação da reta que passa pelos pontos $A = (p, 0)$ e $B = (0, q)$ é dada por

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow pq - qx - py = 0.$$

Portanto, dividindo essa equação por pq , obtemos

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

a qual é chamada de *equação segmentária da reta*.

EXERCÍCIOS

1. Determinar a inclinação da reta que passa pelos pontos dados:

- (a) $P_1 = (2, -3)$ e $P_2 = (-4, 2)$ (c) $P_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ e $P_2 = (-\frac{5}{6}, -\frac{2}{3})$
 (b) $P_1 = (5, 2)$ e $P_2 = (-2, -3)$ (d) $P_1 = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$ e $P_2 = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$.

2. Determinar k de modo que a reta de equação $3x - 5y + k = 0$ passe pelo ponto $P = (1, -1)$.

3. Obtenha a equação reduzida de cada uma das retas. Em cada caso, determinar a inclinação e o coeficiente linear.

- (a) $5x - y + 3 = 0$ (c) $x - 2y + 4 = 0$ (e) $5x - 6y - 14 = 0$
 (b) $2x + 3y - 7 = 0$ (d) $6x + 3y - 1 = 0$ (f) $7x + 5y + 9 = 0$.

4. Determinar, se existir, o ponto de interseção das retas

- (a) $2x + y + 2 = 0$ e $3x - y - 17 = 0$.

- (b) $6x + 4y - 1 = 0$ e $3x + 2y + 5 = 0$.
5. Determinar a equação da reta que tem inclinação 4 e passa pelo ponto $P = (2, -3)$.
 6. Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (3, 1)$ e $P_2 = (-5, 4)$.
 7. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, 4)$ e é paralela à reta cuja equação é $2x - 5y + 7 = 0$.
 8. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (-2, 3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - y - 2 = 0$.
 9. Determinar a equação da reta que intercepta o eixo dos y no ponto -4 e é perpendicular à reta cuja equação é $3x - 4y - 2 = 0$.
 10. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (-3, -4)$ e é paralela ao eixo dos y .
 11. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, -7)$ e é paralela ao eixo dos x .
 12. Determinar se as retas $3x + 5y + 7 = 0$ e $5x - 3y - 2 = 0$ são perpendiculares ou não.
 13. Determinar se as retas $3x + 5y + 7 = 0$ e $6x + 10y - 5 = 0$ são paralelas ou não.
 14. Considere as retas $k^2x - y + 3 = 0$ e $(3k + 4)x - y - 5 = 0$.
 - (a) Determinar k para que elas sejam paralelas.
 - (b) Determinar k para que elas sejam concorrentes.
 - (c) Existe algum valor de k para que elas sejam coincidentes?
 15. Determinar se os pontos dados estes alinhados ou não:
 - (a) $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (-4, -7)$ e $P_3 = (5, 8)$.
 - (b) $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (3, 4)$.
 - (c) $P_1 = (4, 6)$, $P_2 = (1, 2)$ e $P_3 = (-5, -4)$.
 - (d) $P_1 = (-3, 6)$, $P_2 = (3, 2)$ e $P_3 = (9, -2)$.
 16. Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$ com $P \neq Q$. Determinar o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ eqüitistantes de P e Q . Dar uma interpretação geométrica deste conjunto.
 17. Calcular a distância entre o ponto P e a reta r nos seguintes casos:
 - (a) $P = (0, 0)$ e $12x + 5y + 26 = 0$.

- (b) $P = (3, -2)$ e $3x - 4y + 3 = 0$.
- (c) $P = (5, -2)$ e $x + 2y - 1 = 0$.
- (d) $P = (-3, 7)$ e $y = 11 - x$.
- (e) $P = (1, 1)$ e $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.
18. Calcular a distância do ponto $P = (1, 2)$ à reta definida por $A = (5, 7)$ e $B = (-1, -1)$.
19. Calcular a distância entre as retas r e s nos seguintes casos:
- (a) $7x + 24y - 1 = 0$ e $7x + 24y + 49 = 0$.
- (b) $2x + y - 11 = 0$ e $4x + 2y - 17 = 0$.
- (c) $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + C' = 0$.
20. Calcular a altura AH do triângulo ABC , dados $A = (1, 1)$, $B = (-1, -3)$ e $C = (2, -7)$.
21. Calcular a altura do trapézio $ABCD$, dados $A = (0, 0)$, $B = (8, 1)$, $C = (16, 4)$ e $D = (0, 2)$.
22. Determinar as equações das retas paralelas a reta r , cuja equação é $12x - 5y + 1 = 0$, e distantes 3 unidades de r .
23. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ três vértices de um triângulo. Mostrar que área do triângulo ABC é dada por
- $$S = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{D}| \quad \text{onde } \mathbf{D} = \det(\mathbf{A}) \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$
24. Calcular a área do triângulo ABC nos seguintes casos:
- (a) $A = (9, 2)$, $B = (1, 10)$ e $C = (-3, -8)$.
- (b) $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (0, 5)$.
- (c) $A = (-2, 6)$, $B = (8, -4)$ e $C = (11, 11)$.
- (d) $A = (x, x + 3)$, $B = (x - 1, x)$ e $C = (x + 1, x + 1)$.
25. Calcular a área do quadrilátero $ABCD$, dados $A = (1, 2)$, $B = (5, 0)$, $C = (7, 10)$ e $D = (1, 6)$.
26. Calcular a área do pentágono $ABCDE$, dados $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (4, 2)$, $D = (1, 6)$ e $E = (0, 4)$.

27. Dados $A = (5, 1)$, $B = (7, 3)$ e $C = (-1, x)$, determinar x , de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 4 unidades.
28. Dados $A = (-3, 0)$ e $B = (0, -3)$, determinar C , de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 9 unidades, sabendo-se que pertence à reta $y = 2x$.
29. Considere os pontos $A = (2, 0)$ e $B = (0, 1)$. Determinar o ponto $P = (x, y)$ pertencente ao terceiro quadrante, de modo que as retas passando por A e B ; B e P , respectivamente, sejam perpendiculares e o triângulo ABP tenha área igual a 10 unidades.
30. De um triângulo ABC são dados:

$$B = (1, 0), \quad d(A, C)^2 = 45, \quad d(B, C)^2 = 89 \quad \text{e} \quad M = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, determinar as coordenadas do ponto C , sabendo que essas são números inteiros.

31. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (3, -2)$ e pela interseção das retas $x - y + 1 = 0$ e $2x + 3y - 2 = 0$.
32. Sejam r e s duas retas em $\mathbb{R}^2$ com inclinações m_r e m_s , respectivamente.

(a) Se r e s não são paralelas ao eixo dos y , então o ângulo entre elas é dado por

$$\tan \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|.$$

(b) Se r ou s , não ambas, é paralela ao eixo dos y , então o ângulo entre elas é dado por

$$\tan \theta = \left| \frac{1}{m_s} \right| \quad \text{ou} \quad \tan \theta = \left| \frac{1}{m_r} \right|.$$

33. Calcular o ângulo entre as retas r e s nos seguintes casos:

(a) $3x + 2y - 3 = 0$ e $x + 5y + 1 = 0$.

(b) $2x + y - 3 = 0$ e $2x - 4y + 5 = 0$.

(c) $3x - 2By + 1 = 0$ e $x - 3 = 0$.

(d) $x - 3y + 5 = 0$ e $x + 2y - 3 = 0$.

34. Determinar k , de modo que a reta $3x - ky - 8 = 0$ forme um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com a reta $2x + 5y - 17 = 0$.

2.5 Cônicas

O gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.4)$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A, B e C , não todos nulos, é uma *cônica*. A equação (2.4) é chamada de *equação geral do 2.º grau em x e y* ou *equação cartesiana da cônica*. Note que a equação

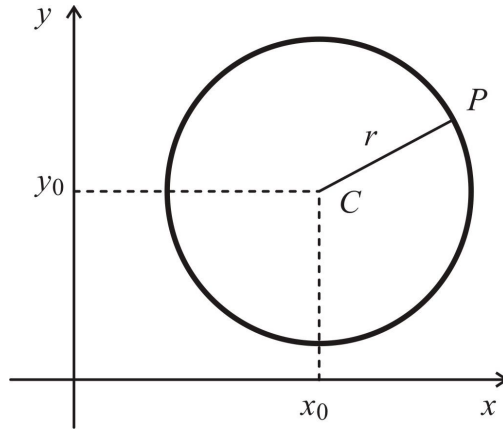
$$\lambda Ax^2 + \lambda Bxy + \lambda Cy^2 + \lambda Dx + \lambda Ey + \lambda F = 0 = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, representa o mesmo gráfico da equação (2.4).

Sejam C um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $R \in \mathbb{R}$ com $R > 0$. Uma *circunferência* (ou um *círculo*) $\mathcal{C}$ de centro C e raio R é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) = R.$$

Geometricamente, uma circunferência $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que são eqüidistantes de C (confira Figura ??).



Circunferência

Proposição 2.20 *Sejam $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $R \in \mathbb{R}$ fixados com $R > 0$. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

representa uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R .

Prova. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R se, e somente se, $d(P, C) = R$. Logo,

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{R^2} = |R| = R,$$

pois $R > 0$. ■

Note que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

onde $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ e $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. Portanto, uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R representa uma cônica. Reciprocamente, o gráfico da cônica

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

quando $a^2 + b^2 - c > 0$, é a representação analítica da circunferência $\mathcal{C}$ de centro $C = (-a, -b)$ e raio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, pois

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = (x + a)^2 + (y + b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = 0,$$

ou ainda,

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Exemplo 2.21 *Determinar a equação da circunferência de centro $C = (-4, 3)$ e raio $R = 3$.*

Solução. Pela Proposição 2.20, temos que a equação da circunferência é dada por

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2,$$

ou ainda, $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$.

Exemplo 2.22 *Determinar o centro e o raio da circunferência $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0$.*

Solução. Uma maneira de resolver este problema é completando os quadrados.

$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 8y) + 16 = 0.$$

Como

$$x^2 - 12x = x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2 - 6^2 = (x - 6)^2 - 36$$

e

$$y^2 + 8y = y^2 + 2 \cdot 4y + 4^2 - 4^2 = (y + 4)^2 - 16$$

temos que

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 36.$$

Portanto, $C = (6, -4)$ e $R = 6$ são o centro e o raio da circunferência $\mathcal{C}$.

Proposição 2.23 *Sejam r_1, r_2 retas distintas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ circunferências distintas em $\mathbb{R}^2$. Então:*

1. $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ ou $r_1 \cap r_2$ é um ponto em $\mathbb{R}^2$.
2. $r_1 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$ ou $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Vamos provar apenas o item (2). Se

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ e } \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

então multiplicando a segunda equação por -1 e adicionando-se, obtemos a reta

$$r : (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

Logo, o item (3), reduz-se ao item (2) com $r \cap \mathcal{C}_1$ ou $r \cap \mathcal{C}_2$. Suponhamos que r_1 tenha equação cartesiana

$$r_1 : Ax + By + C = 0.$$

Se $B \neq 0$ (o caso $B = 0$ fica como um exercício), então podemos supor, sem perda de generalidade, que $B = 1$. Logo,

$$r_1 : y = -Ax - C.$$

Se $(x, y) \in r_1 \cap \mathcal{C}_1$, então substituindo y na equação de $\mathcal{C}_1$ e desenvolvendo, obtemos

$$dx^2 + ex + f = 0,$$

onde $d = 1 + A^2 \neq 0$, $e = 2AC + a_1 - b_1A$ e $f = b_1C + c_1$. Seja $\Delta = e^2 - 4df$. Então há três casos a ser considerado:

1.º **Caso.** Se $\Delta = 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ é um ponto em $\mathbb{R}^2$, isto é, a reta r_1 é tangente a circunferência $\mathcal{C}_1$.

2.º **Caso.** Se $\Delta > 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ são dois pontos em $\mathbb{R}^2$, isto é, a reta r_1 é secante a circunferência $\mathcal{C}_1$.

3.º **Caso.** Se $\Delta < 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$, isto é, a reta r_1 não intercepta a circunferência $\mathcal{C}_1$. ■

Exemplo 2.24 Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ de equação cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

e perpendiculares à reta $r : x - 2y + 9 = 0$.

Solução. As retas desejadas têm equação reduzida da forma $y = -2x + b$. Então substituindo y na equação de $\mathcal{C}$, obtemos

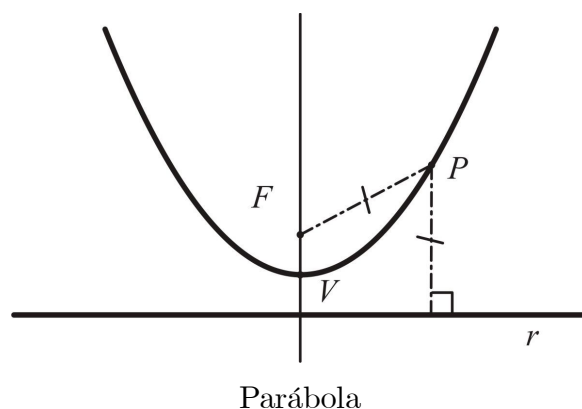
$$5x^2 - (4b + 10)x + 4b + b^2 = 0.$$

Por hipótese, devemos ter $\Delta = (4b + 10)^2 - 20(4b + b^2) = 0$, isto é, $100 - 4b^2 = 0$. Logo, $b = -5$ ou $b = 5$. Portanto, as equações das retas tangentes a $\mathcal{C}$ são: $y = -2x - 5$ e $y = -2x + 5$.

Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e F um ponto de $\mathbb{R}^2$ com $F \notin r$. Uma *parábola* $\mathcal{P}$ de diretriz r e foco F é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Geometricamente, uma parábola $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que são equidistantes de F e r (confira Figura ??). Apostol, pag 498, vol 1 ??????????????



Observações 2.25 1. A reta passando pelo foco F e perpendicular a diretriz r será chamada de eixo da parábola $\mathcal{P}$.

2. A interseção do eixo com a parábola $\mathcal{P}$ será chamada de vértice da parábola $\mathcal{P}$.

Proposição 2.26 Seja $p \in \mathbb{R}$ fixado com $p \neq 0$. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$y^2 = 4px$$

representa uma parábola $\mathcal{P}$ cuja diretriz é a reta vertical $x = -p$ e cujo foco é o ponto $F = (p, 0)$.

Prova. Como $r : x + p = 0$ e por definição $d(P, F) = d(P, r)$ temos que

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + p|.$$

Assim, elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, obtemos

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2.$$

Desenvolvendo, obtemos $y^2 = 4px$, que é a equação reduzida da parábola. ■

Exemplo 2.27 Determinar a equação da parábola com diretriz $x = -1$ e foco $F = (-7, 0)$.

Solução. Pela Proposição 2.26, temos que a equação da parábola é dada por

$$y^2 = 4x.$$

Exemplo 2.28 Determinar a diretriz e o foco da parábola $\mathcal{P} : y^2 = 12x$.

Solução. Como $y^2 = 4 \cdot 3 \cdot x$ temos que $x = -3$ é a diretriz e $F = (3, 0)$ é o foco de $\mathcal{P}$.

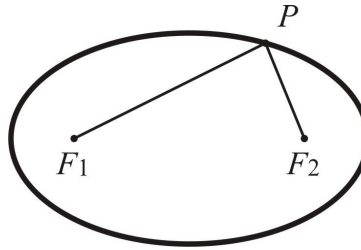
Proposição 2.29 Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}$ uma parábola em $\mathbb{R}^2$. Então $r \cap \mathcal{P} = \emptyset$ ou $r \cap \mathcal{P}$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Fica como um exercício. ■

Sejam F_1, F_2 pontos de $\mathbb{R}^2$ com $F_1 \neq F_2$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ tal que $d(F_1, F_2) < 2a$. Uma *elipse* $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Geometricamente, uma elipse $\mathcal{E}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante (confira Figura ??).



Elipse

Observações 2.30 1. A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 será chamada de eixo focal da elipse $\mathcal{E}$.

2. Os pontos de interseções do eixo focal com a elipse $\mathcal{E}$ serão chamados de vértices da elipse $\mathcal{E}$ e denotados por A_1 e A_2 , respectivamente. Note que

$$d(A_1, A_2) = 2a$$

e a será chamado de semi-eixo focal.

3. O centro C da elipse $\mathcal{E}$ é o ponto médio do segmento que une os focos F_1 e F_2 . A distância entre F_1 e F_2 será chamada de distância focal e denotada por $d(F_1, F_2) = 2c$. Neste caso, $c < a$.

4. A mediatriz do segmento de reta que une os focos F_1 e F_2 será chamado de eixo normal. Se denotarmos por B_1 e B_2 os pontos de interseções da elipse $\mathcal{E}$ com o eixo normal, o escalar b tal que $d(B_1, B_2) = 2b$, será chamado de semi-eixo normal.
5. Pode ser provado, usando o Teorema de Pitágoras, que $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, $0 < b < a$.

A razão entre a distância focal c e o semi-eixo focal a será chamada de *excentricidade* da elipse $\mathcal{E}$ e denotada por

$$e = \frac{c}{a} \text{ e } 0 < e < 1.$$

Note que

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Logo,

$$\lim_{b \rightarrow a} e = 0 \text{ e } \lim_{b \rightarrow 0} e = 1.$$

Portanto, quando b se aproxima de a a elipse se aproxima de uma circunferência e quando b se aproxima de 0 a elipse se aproxima de um segmento de reta. Assim, a excentricidade caracteriza a forma da elipse.

Proposição 2.31 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ fixados com $a > b > 0$. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa uma elipse $\mathcal{E}$ de centro $C = (0, 0)$, semi-eixo focal a , semi-eixo normal b e de focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Prova. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

ou ainda,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Assim, elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, temos que

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$(a^2 - cx) = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Novamente, elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, temos que

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2.$$

Simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$ temos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a *equação reduzida da elipse*. ■

Observações 2.32 1. Os focos na Proposição 2.31 podem ser dados por $F_1 = (-ae, 0)$ e $F_2 = (ae, 0)$, onde e é a excentricidade da elipse $\mathcal{E}$.

2. As retas $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$ serão chamadas de diretrizes da elipse $\mathcal{E}$. Note que

$$-\frac{a}{e} < -a \text{ e } a < \frac{a}{e}.$$

3. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer ponto da elipse $\mathcal{E}$. Então pode ser provado que $d(P, F_i) = e \cdot d(P, r)$, onde r é a reta diretriz correspondendo ao foco F_i , $i = 1, 2$. De fato, como

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 + (e^2 - 1)x^2$$

temos que

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2.$$

Logo,

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2} = e \sqrt{\left(x - \frac{a}{e}\right)^2} = e \cdot d(P, r).$$

Exemplo 2.33 Determinar as diretrizes e os focos da elipse $\mathcal{E} : 4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solução. Dividindo todos os termos por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Como $a = 3 > b = 2$ temos que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Logo, $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$ são os focos de $\mathcal{E}$. Sendo

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

temos que

$$x = -\frac{a}{e} = -\frac{9}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{5}\sqrt{5} \text{ e } x = \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9}{5}\sqrt{5}$$

são as diretrizes de $\mathcal{E}$.

Proposição 2.34 *Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}$ uma elipse em $\mathbb{R}^2$. Então $r \cap \mathcal{E} = \emptyset$ ou $r \cap \mathcal{E}$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Fica como um exercício. ■

Exemplo 2.35 *Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > b > 0$. Determinar o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ externos a $\mathcal{E}$ tais que as retas tangentes a $\mathcal{E}$ por P sejam perpendiculares.

Solução. Sejam P_1 e P_2 os pontos de tangências das retas com a elipse $\mathcal{E}$. Então, por hipótese, P_1PP_2 é um triângulo retângulo em P . Logo, OP_1PP_2 é um retângulo cuja diagonal é o segmento $\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$d(O, P)^2 = d(P_1, P_2)^2 = d(P, P_1)^2 + d(P, P_2)^2 = a^2 + b^2,$$

ou ainda,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Portanto, o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ externos a $\mathcal{E}$ tais que as retas tangentes a $\mathcal{E}$ por P sejam perpendiculares é uma circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Sejam F_1, F_2 pontos de $\mathbb{R}^2$ com $F_1 \neq F_2$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ tal que $d(F_1, F_2) > 2a$. Uma *hipérbole* $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Geometricamente, uma hipérbole $\mathcal{H}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante.

Figura ???

Observações 2.36 1. A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 será chamada de eixo focal da hipérbole $\mathcal{H}$.

2. Os pontos de interseções do eixo focal com a hipérbole $\mathcal{H}$ serão chamados de vértices da hipérbole $\mathcal{H}$ e denotados por A_1 e A_2 , respectivamente. Note que

$$d(A_1, A_2) = 2a$$

e a será chamado de semi-eixo focal.

3. O centro C da hipérbole $\mathcal{H}$ é o ponto médio do segmento que une os focos F_1 e F_2 . A distância entre F_1 e F_2 será chamada de distância focal e denotada por $d(F_1, F_2) = 2c$. Neste caso, $a < c$.

4. A mediatriz do segmento de reta que une os focos F_1 e F_2 será chamado de eixo normal da hipérbole $\mathcal{H}$.

Proposição 2.37 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$ fixados. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa uma hipérbole $\mathcal{H}$ de centro $C = (0, 0)$, semi-eixo focal a , semi-eixo normal b e de focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$.

Prova. Fica como um exercício. ■

A razão entre a distância focal c e o semi-eixo focal a será chamada de *excentricidade* da hipérbole $\mathcal{H}$ e denotada por

$$e = \frac{c}{a} \text{ e } 1 < e.$$

Note que

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Logo,

$$\lim_{b \rightarrow 0} e = 1.$$

Observações 2.38 1. Os focos na Proposição 2.37 podem ser dados por $F_1 = (-ae, 0)$ e $F_2 = (ae, 0)$, onde e é a excentricidade da hipérbole $\mathcal{H}$.

2. As retas $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$ serão chamadas de diretrizes da hipérbole $\mathcal{H}$. Note que

$$-a < -\frac{a}{e} \text{ e } \frac{a}{e} < a.$$

3. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer ponto da hipérbole $\mathcal{H}$. Então pode ser provado que $d(P, F_i) = e \cdot d(P, r)$, onde r é a reta diretriz correspondendo ao foco F_i , $i = 1, 2$.

Pela equação cartesiana da hipérbole $\mathcal{H}$, obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Logo, a representação gráfica da função

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left(y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

aproxima-se assintoticamente da reta

$$y = \frac{b}{a} x \quad \left(y = -\frac{b}{a} x \right)$$

quando x se torna arbitrariamente grande para direita (esquerda) da origem, notação, $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$), pois

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) = 0.$$

As retas

$$y = \frac{b}{a}x \text{ e } y = -\frac{b}{a}x$$

serão chamadas de *assíntotas* da hipérbole $\mathcal{H}$.

Exemplo 2.39 Determinar as diretrizes e os focos da hipérbole $\mathcal{H} : 5x^2 - 4y^2 = 20$.

Solução. Dividindo todos os termos por 20, obtemos

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$$

Como o semi-eixo focal $a = 2$ temos que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ são os focos de $\mathcal{H}$. Sendo

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2},$$

temos que

$$x = -\frac{a}{e} = -\frac{9}{3} \text{ e } x = \frac{a}{e} = \frac{9}{3}$$

são as diretrizes de $\mathcal{E}$.

Proposição 2.40 Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{H}$ uma hipérbole em $\mathbb{R}^2$. Então $r \cap \mathcal{H} = \emptyset$ ou $r \cap \mathcal{H}$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Fica como um exercício. ■

Uma *inequação* em x é uma desigualdade da forma

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ ou } \frac{2x - 3}{x - 10} < 0.$$

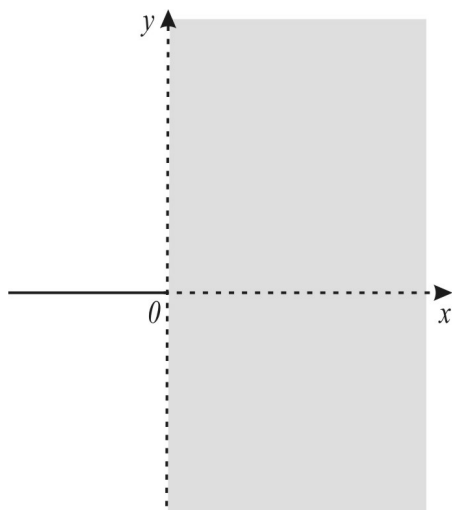
Uma *região* determinada por uma inequação em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem essa inequação.

Exemplo 2.41 Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $x > 0$.

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $x > 0$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

(confira Figura ??).

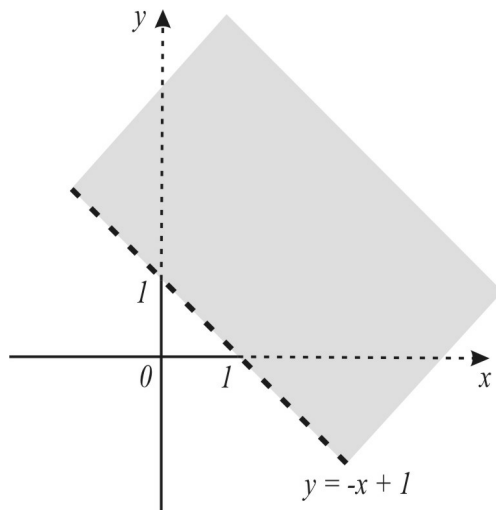
Região determinada pela inequação $x > 0$.

Exemplo 2.42 Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$.

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x + 1\}$$

(confira Figura ??).

Região determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$.

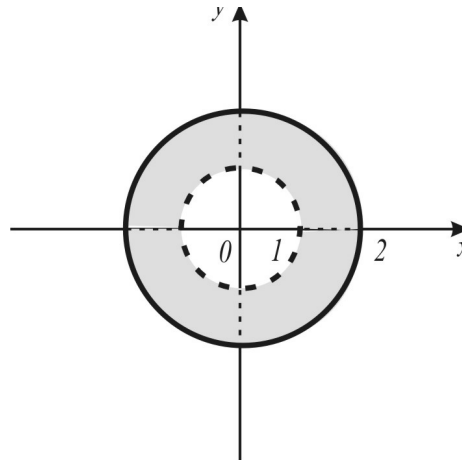
Exemplo 2.43 Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações

$$1 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações $1 < x^2 + y^2 \leq 4$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(confira Figura ??).



Região determinada pelas inequações $1 < x^2 + y^2 \leq 4$.

EXERCÍCIOS

1. Calcular o raio da circunferência que tem centro em $C = (4, 9)$ e que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$.
2. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos distintos de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que A , B e C determinam uma única circunferência se, e somente se, eles são não-colineares.
3. Determinar todos os parâmetros das equações abaixo.
 - (a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 38 = 0$.
 - (b) $6y^2 - x = 0$.
 - (c) $x^2 + 4y^2 = 4$.
 - (d) $x^2 - 9y^2 = 9$.
4. Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações abaixo:
 - (a) $x - y + 2 \geq 0$.
 - (b) $x + y - 1 > 0$ e $x - y > 0$.
 - (c) $x - 2y - 3 > 0$ e $x + 3y + 1 \leq 0$.
 - (d) $x^2 + y^2 - 4|x| < 0$.
 - (e) $(x^2 + y^2 - 6x)(x^2 + y^2 - 4y) \geq 0$.

5. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$ e $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$ os focos da elipse de equação cartesiana $16x^2 + \lambda y^2 = 16\lambda$. Sabendo-se que P é um ponto dessa elipse, cuja distância ao foco F_2 mede 5 unidade de comprimento. Determinar a distância de P ao foco F_1 .

6. Sejam $A = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ e $B = (R \cos \beta, R \sin \beta)$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$ com $R > 0$. Mostrar que

$$d(A, B) = 2R \left| \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right|.$$

Dê uma interpretação geométrica.

7. Sejam r e s as retas tangentes à circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 25$, nos pontos $A = (-3, 4)$ e $B = (5, 0)$, respectivamente. Sabendo-se que P é o ponto de interseção dessas retas, determinar a área do triângulo ABP .
8. Determinar a equação da hipérbole que tem assíntotas as retas $2x + 3y = 0$ e $2x - 3y = 0$, e que passa pelo ponto $P = (4, 0)$.
9. Seja A o conjunto de todas as retas de equações reduzidas $y = mx - 5$. Determinar as retas de A que são tangentes à circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y - 2x = 0$.
10. Determinar a posição relativa entre a reta $r : \sqrt{2}x - y + 3 = 0$ e a elipse $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 = 4$.
11. Determinar a posição relativa entre a reta $r : 2x - 2y - 2 = 0$ e a hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - 8y^2 = 8$.
12. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}$ de equação carteseiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostre que

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta},$$

com $r = d(P, F_1)$, $F_1 = (-c, 0)$ e θ o ângulo entre o eixo dos x e o segmento de reta $\overline{F_1 P}$.

2.6 Mudança de Coordenadas

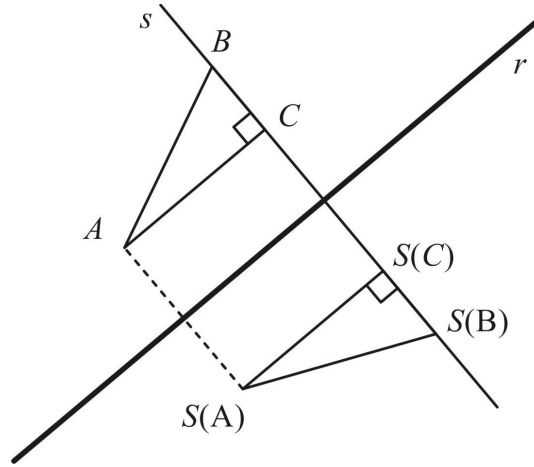
Uma *isometria* ou um *movimento rígido* em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação (função) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distância, isto é,

$$d(T(A), T(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2.$$

Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é um *ponto fixo* de uma isometria T em $\mathbb{R}^2$ se $T(P) = P$.

Seja r uma reta em $\mathbb{R}^2$. Uma *reflexão* em r é a única transformação $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada $P \in \mathbb{R}^2$ um único $S(P) \in \mathbb{R}^2$ tal que o ponto médio do segmento $\overline{PS(P)}$ é o pé da perpendicular traçada de P a r se $P \notin r$ e $S(P) = P$ se $P \in r$. A reta r é chamada o *eixo* de S . Note que $S^2(P) = S \circ S(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$, isto é, $S^2 = I$ é a transformação identidade.

Dados $A, B \in \mathbb{R}^2$. Sejam s a reta passando por B e perpendicular a r , $C \in r_1 \cap s$, com r_1 a reta passando por A e paralela a r . Então os triângulos ABC e $S(A)S(B)S(C)$ são congruentes (confira Figura ??).



Reflexão com eixo a reta r .

Portanto,

$$d(S(A), S(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2,$$

isto é, toda reflexão com eixo r é uma isometria em $\mathbb{R}^2$.

Agora vamos determinar a expressão analítica de uma reflexão com eixo r . Sejam $y = mx + b$ a equação reduzida da reta r , $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $Q = S(P) = (u, v)$. Então

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}u + v \quad \text{ou} \quad u + mv = x + my$$

é a equação reduzida da reta s perpendicular a r e passando por Q . Como $d(P, r) = d(Q, r)$ temos que

$$\frac{|mx - y + b|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|mu - v + b|}{\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow |mx - y + b| = |mu - v + b|.$$

Logo,

$$mx - y + b = mu - v + b \quad \text{ou} \quad mx - y + b = -(mu - v + b).$$

Assim, temos os seguintes sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} u + mv = x + my \\ mu - v = mx - y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u + mv = x + my \\ mu - v = -mx + y - 2b. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos

$$u = x, \quad v = y \quad \text{ou} \quad u = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \frac{2m}{1 + m^2}(y - b), \quad v = \frac{2m}{1 + m^2}x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}y + \frac{2b}{1 + m^2}.$$

Portanto, $S(x, y) = (x, y)$ ou

$$S(x, y) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \frac{2m}{1 + m^2}(y - b), \frac{2m}{1 + m^2}x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}y + \frac{2b}{1 + m^2} \right).$$

Finalmente, se θ é o ângulo que a reta r faz com o eixo dos x e $b = 0$, então $m = \tan \theta$ e é fácil verificar que

$$S(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta).$$

Em particular, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ temos que

$$S(x, y) = (y, x).$$

Neste caso, dizemos que S é uma *permutação de eixos*.

Uma *translação* ou *translação de eixos* é a única transformação $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b).$$

Geometricamente, uma translação é uma transformação que move todo ponto a mesma distância na mesma direção, isto é, dados $A, B \in \mathbb{R}^2$, então $d(A, T_{a,b}(A)) = d(B, T_{a,b}(B))$ e os segmentos $\overline{AT_{a,b}(A)}$ e $\overline{BT_{a,b}(B)}$ são paralelos. Note que $T_{a,b}$ não tem pontos fixos.

Proposição 2.44 *Sejam $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$. Então $T_{a,b} = S_2 \circ S_1$, onde S_1 é a reflexão de eixo a mediatriz do segmento $\overline{OP}$ e S_2 é a reflexão de eixo à reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ por P . Em particular, $T_{a,b}$ é uma isometria em $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Sejam $y = \frac{b}{a}x$ a reta suporte dos pontos O e P e $d = a^2 + b^2$. Então

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{2b} \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{b}$$

são os eixos de S_1 e S_2 , respectivamente. Logo,

$$S_1(x, y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{d}x - \frac{2ab}{d}\left(y - \frac{d}{2b}\right), -\frac{2ab}{d}x - \frac{b^2 - a^2}{d}y + b \right)$$

e

$$S_2(x, y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{d}x - \frac{2ab}{d}\left(y - \frac{d}{b}\right), -\frac{2ab}{d}x - \frac{b^2 - a^2}{d}y + 2b \right).$$

Assim,

$$S_2 \circ S_1(x, y) = S_2(S_1(x, y)) = (x + a, y + b) = T_{a,b}(x, y),$$

isto é, $T_{a,b} = S_2 \circ S_1$. ■

Exemplo 2.45 Sejam $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ pontos quaisquer em $\mathbb{R}^2$. Então existe uma isometria T em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(A) = B$.

Solução. Sejam $T_{-a, -b}$ e $T_{c, d}$ translações em $\mathbb{R}^2$. Então $T = T_{c, d} \circ T_{-a, -b}$ tem a propriedade desejada, pois

$$T(A) = T(a, b) = T_{c, d} \circ T_{-a, -b}(a, b) = T_{c, d}(0, 0) = (c, d) = B.$$

Uma rotação é a única transformação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R_\theta(O) = O$ e

$$\theta = \angle \left(\overline{OP}, \overline{OR_\theta(P)} \right), \quad \forall P \in \mathbb{R}^2 \text{ com } P \neq O,$$

onde O é chamado o *centro* de R e θ o *ângulo de rotação* de R_θ . Note que O é o único ponto fixo de R_θ .

Proposição 2.46 Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma rotação anti-horário de ângulo de rotação θ . Então $R_\theta = S_2 \circ S_1$, onde S_1 é a reflexão de eixo a bissetriz do ângulo θ e S_2 é a reflexão de eixo à reta r suporte de O e $R_\theta(P)$. Em particular, R_θ é uma isometria em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que P esteja no eixo dos x . Então $y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)x$ e $y = \tan\theta x$ são os eixos de S_1 e S_2 , respectivamente. Logo,

$$S_1(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta)$$

e

$$S_2(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta).$$

Assim,

$$S_2 \circ S_1(x, y) = S_2(S_1(x, y)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Portanto, $S_2 \circ S_1(0, 0) = (0, 0)$ é o único ponto fixo e $\theta = \angle \left(\overline{OP}, \overline{O(S_2 \circ S_1)(P)} \right)$, isto é, $R_\theta = S_2 \circ S_1$. ■

Exemplo 2.47 Identificar a equação $x^2 - 4py = 0$.

Solução. Fazendo a mudança de coordenadas $u = y$ e $v = x$, isto é, uma permutação de eixos, obtemos

$$v^2 = 4pu.$$

Assim, essa equação representa uma parábola no plano $u0v$ com foco $F = (p, 0)$ e diretriz $u = -p$. Portanto, a equação $4py = x^2$ representa uma parábola no plano $x0y$ com foco $F = (0, p)$ e diretriz $y = -p$.

Exemplo 2.48 Identificar a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com } b > a > 0.$$

Solução. Fazendo a mudança de coordenadas $u = y$ e $v = x$, isto é, uma permutação de eixos, obtemos

$$\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2} = 1 \text{ com } b > a > 0.$$

Assim, essa equação representa uma elipse no plano $u0v$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, onde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Portanto, a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ com } b > a > 0$$

representa uma elipse no plano $x0y$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$.

Exemplo 2.49 Identificar a equação

$$2x^2 + 9y^2 + 4x + 36y + 26 = 0.$$

Solução. Como

$$2x^2 + 4x = 2(x + 2)^2 - 8 \text{ e } 9y^2 + 36y = 9(y + 2)^2 - 36$$

temos que

$$2x^2 + 9y^2 + 4x + 36y + 26 = 0 \Rightarrow 2(x + 2)^2 + 9(y + 2)^2 = 18.$$

Dividindo todos os termos por 18, obtemos

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{2} = 1.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $u = x + 2$ e $v = y + 2$, isto é, uma translação de eixos, obtemos

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{2} = 1.$$

Assim, essa equação representa uma elipse no plano $u0v$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$. Portanto, a equação

$$2x^2 + 9y^2 + 4x + 36y + 26 = 0$$

representa uma elipse no plano $x0y$ com centro $C = (-2, -2)$ e focos $F_1 = (-2 - \sqrt{7}, -2)$ e $F_2 = (-2 + \sqrt{7}, -2)$.

Exemplo 2.50 Identificar a equação $xy - 1 = 0$.

Solução. Fazendo a mudança de coordenadas

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \text{ e } v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) \text{ e } y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v),$$

isto é, uma rotação de ângulo $\theta = -\frac{\pi}{4}$, obtemos

$$u^2 - v^2 = 2.$$

Dividindo todos os termos por 2, temos que

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1.$$

Assim, essa equação representa uma hipérbole no plano $u0v$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$. Portanto, a equação

$$xy - 1 = 0$$

representa uma hipérbole no plano $x0y$ com centro $C = (0, 0)$ e focos

$$F_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } F_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

Teorema 2.51 *Seja*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A, B e C , não todos nulos, a equação cartesiana de uma cônica.

1. Se $A = C$, $A \cdot C \neq 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio.
2. Se $A \cdot C = 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma parábola, duas retas ou o conjunto vazio.
3. Se $A \neq C$, $A \cdot C > 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.
4. Se $A \cdot C < 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma hipérbole ou duas retas.

Prova. Fica como um exercício. ■

Seja

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A e C , não ambos nulos, e $B \neq 0$, a equação cartesiana de uma cônica. Então a mudança de coordenadas

$$u = x \cos \theta - y \sin \theta \text{ e } v = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

ou, equivalentemente,

$$x = u \cos \theta + v \sin \theta \text{ e } y = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

transforma essa equação em

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \\ B' &= (A - C) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta) \\ C' &= A \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' &= D \cos \theta - E \sin \theta \\ E' &= D \sin \theta + E \cos \theta \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Assim, pela segunda equação, $B' = 0$ se, e somente se,

$$\cot(2\theta) = \frac{C - A}{B}.$$

Portanto, é sempre possível, por uma rotação conveniente R_θ , obter uma nova equação da cônica sem o termo cruzado uv . Note que

$$C' + A' = C + A \text{ e } C' - A' = \frac{B}{\sin(2\theta)}$$

se $\sin(2\theta) \neq 0$, simplifica os cálculos dos coeficientes da nova equação, pois

$$\sin^2(2\theta) = \frac{1}{1 + \cot^2(2\theta)} = \frac{B^2}{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}.$$

EXERCÍCIOS

1. Identificar as equações abaixo:

- (a) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$.
- (b) $x^2 - y^2 - x - y = 0$.
- (c) $x^2 - 4x - 6y + 10 = 0$.
- (d) $9x^2 + 25y^2 - 72x - 100y + 19 = 0$.
- (e) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.
- (f) $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 6 = 0$.
- (g) $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 9 = 0$.
- (h) $3x^2 + 3y^2 - 8xy - 7 = 0$.

- (i) $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$.
- (j) $16x^2 + 4y^2 - 32x + 16y + 96 = 0$.

2. Seja $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Mostrar que se $T_1, T_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, então $T_2 \circ T_1 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.
- (b) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, então $T^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

3. Determinar todas as isometrias $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde $ab + cd = 0$, $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$.

4. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$. Uma *homotetia* de centro O e razão λ é a única transformação $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(O) = O$ e $H(P)$ é o único ponto da semi-reta OP com $d(O, H(P)) = \lambda d(O, P)$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$ com $P \neq O$. Determinar a expressão analítica de H . Conclua que H é bijetora e que

$$d(H(P_1), H(P_2)) = \lambda d(P_1, P_2), \quad \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2.$$

5. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$. Uma *inversão* de polo O e razão λ é a única transformação

$$E : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

tal que $E(P)$ é o único ponto da semi-reta OP com $d(O, P) \cdot d(O, E(P)) = \lambda^2$, para todo $P \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Determinar a expressão analítica de E . Conclua que E é bijetora e que o conjunto

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 : E(P) = P\}$$

é uma circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio λ , o qual é chamado de *círculo isométrico*.

6. Seja F uma figura em $\mathbb{R}^2$. Uma *simetria* de F é uma isometria T de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(F) = F$. Determinar todas as simetrias de um triângulo equilátero e das letras A , H e N .

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação definida por

$$T(x, y) = (x, y) \text{ exceto } T(0, 0) = (1, 0) \text{ e } T(1, 0) = (0, 0).$$

Mostrar que T é bijetora mas não é uma isometria.

8. Sejam $C_2(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

e $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os números complexos. Mostrar que as transformações $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C_2(\mathbb{R})$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$T_1(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \text{ e } T_2(x, y) = z, \text{ ou } z = x + iy,$$

são bijetoras. Conclua que podemos identificar esses conjuntos.

9. Seja $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ fixa dois pontos distintos A e B , então T fixa todo os pontos da reta suporte de A e B , isto é, $T = I$ ou T é uma reflexão.
- (b) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ fixa três pontos não-colineares A , B e C , então $T = I$ é a identidade.
- (c) Mostrar que existe no máximo um elemento $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(C) = C'$, onde ABC e $A'B'C'$ são triângulos congruentes.

10. Mostrar que toda isometria de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrita como a composta de uma reflexão, uma rotação e uma translação.

11. Seja $\text{Isom}(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{C}$.

- (a) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ é uma translação, então $T(z) = z + w$, para algum $w \in \mathbb{C}$.
- (b) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ é uma rotação de ângulo θ , então $T(z) = e^{i\theta}z$.
- (c) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ é uma reflexão de eixo x , então $T(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado complexo de z .
- (d) Mostrar que todo $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ pode ser escrito na forma

$$T(z) = uz + w \text{ ou } T(z) = u\bar{z} + w, \text{ onde } u, w \in \mathbb{C} \text{ e } |u| = 1.$$

12. Seja $P_0 = (a, b)$ um ponto fixado em $\mathbb{R}^2$. Uma *semelhança* é a única transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (ax - by, bx - ay).$$

Mostrar que $T = H \circ R_\theta$, onde R_θ é uma rotação de ângulo θ e H uma homotetia.

13. Seja $\text{Isom}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}$.

- (a) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ fixa dois pontos distintos a e b , então $T = I$ é a identidade.
- (b) Mostrar que todo $T \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ pode ser escrito na forma

$$T(x) = mx + b, \quad m \in \{-1, 1\} \text{ e } b = T(0).$$

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 1.2

3. Sim. O valor da abscissa igual a 0.
5. (a) $x = -3$ e $y = 8$; (b) $x = 1$ e $y = -1$; (c) $x = 5$ e $y = -3$; (d) $x = -3$ ou 2 e $y = 0$ ou 2 ; (e) $x = -2$ ou 2 e $y = -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$.
7. $(2, 1) \in A$; $(0, 1) \notin A$; $(-2, 3) \notin A$; $(1, 0) \in A$ e $(-1, -2) \in A$.
11. Seja $(x, y) \in A \times B$. Então $x \in A$ e $y \in B$. Como $B = C \cup D$ e $y \in B$ temos que $y \in C$ ou $y \in D$. Logo, $x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in A$ e $y \in D$. Assim, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in A \times D$. Portanto,

$$(x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D),$$

ou seja, $A \times B \subseteq (A \times C) \cup (A \times D)$. A recíproca prova-se de modo análogo.

Seção 1.3

1. (a) $5\sqrt{2}$ u c; (b) $2\sqrt{5}$ u c; (c) 5 u c.
3. (a) Como $d(A, B) = 5$, $d(A, C) = 4$ e $d(B, C) = 3$ são os comprimentos dos lados do triângulo ABC temos que o perímetro é igual

$$p = 3 + 4 + 5 = 12;$$

(b) Como

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(B, C)^2$$

temos que o triângulo ABC é retângulo e sua área é igual a 6 u a.

5. $P = (1, 0)$.
7. $C = (3, 6)$ e $D = (6, 2)$ ou $C = (-5, 0)$ e $D = (-2, -4)$.
9. $P = (3, 3)$.

Seção 1.4

1. (a) $m = -1$; (b) $m = \frac{5}{7}$; (c) $m = 1$; (d) $m = -\frac{7}{13}$.
3. (a) $y = 5x + 3$, $m = 5$ e $b = 3$; (b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{7}{3}$; (c) $y = \frac{1}{2}x + 2$, $m = \frac{1}{2}$ e $b = 2$; (d) $y = -2x + \frac{1}{3}$, $m = -2$ e $b = \frac{1}{3}$.
5. $y = 4x - 11$.
7. $2x - 5y + 18 = 0$.
9. $4x + 3y + 12 = 0$.
11. $y = -7$.
13. Sim.
15. (a) Sim; (b) Não; (c) Não; (d) Sim.
17. (a) 2 u c; (b) 4 u c; (c) 0 u c; (d) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ u c; (e) $3\sqrt{2}$ u c.
19. (a) 2 u c; (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ u c; (c) $\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ u c.
21. $\frac{16\sqrt{65}}{65}$ u a.
23. Sabemos que área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}(\text{base} \cdot \text{altura}).$$

Fixando um dos vértices, digamos A , obtemos que o comprimento da base é igual a $d(B, C)$ e da altura é igual a $d(A, r)$, onde r é a reta que passa pelos pontos B e C , isto é,

$$(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y + (x_3y_2 - x_2y_3) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} d(A, r) &= \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ &= \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)|}{d(B, C)} \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}d(B, C) \cdot d(A, r) \\ &= \frac{1}{2}|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)| \\ &= \frac{1}{2}|\mathbf{D}|, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{D} = \det(\mathbf{A}) \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. 32 u a.

27. $x = -9$ ou $x = -1$.

29. $P = (-4, -7)$.

31. Consideremos o feixe

$$x - y + 1 + \lambda(2x + 3y - 2) = 0.$$

Então é fácil verificar que $P_0 = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ é o ponto de interseção do feixe. Como $P_0 = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ e $P = (3, -2)$ pertencem a reta temos que a inclinação é dada por

$$m = \frac{-2 - \frac{4}{5}}{3 + \frac{1}{5}} = -\frac{7}{8}.$$

Logo, a equação da reta é

$$y + 2 = -\frac{7}{8}(x - 3) \text{ ou } 7x + 8y - 5 = 0.$$

33. (a) $\frac{\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\theta = \arctan \frac{2}{3}$; (d) $\frac{\pi}{4}$.

Seção 1.5

1. O raio da circunferência que tem centro em $C = (4, 9)$ e que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$ é dado por

$$r = d(C, P) = 10.$$

3. (a) Circunferência de centro $C = (3, -2)$ e raio $R = 5$; (b) Parábola de diretriz a reta $x = -\frac{1}{24}$ e foco $F = (\frac{1}{24}, 0)$; (c) ??????

5. 6.

7. $2x - y - 5 = 0$ e $11x + 2y + 5 = 0$.

9. $r \cap \mathcal{H} = \{(4, 1)\}$.

Seção 1.6