

2.5 Cônicas

O gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.4)$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A, B e C , não todos nulos, é uma *cônica*. A equação (2.4) é chamada de *equação geral do 2.º grau em x e y* ou *equação cartesiana da cônica*. Note que a equação

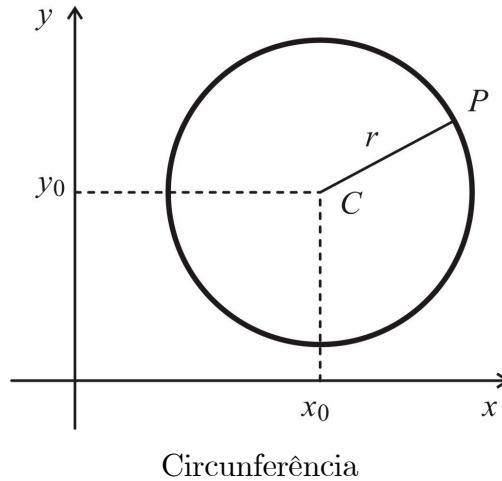
$$\lambda Ax^2 + \lambda Bxy + \lambda Cy^2 + \lambda Dx + \lambda Ey + \lambda F = 0 = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, representa o mesmo gráfico da equação (2.4).

Sejam C um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $R \in \mathbb{R}$ com $R > 0$. Uma *circunferência* (ou um *círculo*) $\mathcal{C}$ de centro C e raio R é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, C) = R.$$

Geometricamente, uma circunferência $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que são eqüidistantes de C (confira Figura ??).



Proposição 2.20 *Sejam $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $R \in \mathbb{R}$ fixados com $R > 0$. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

representa uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R .

Prova. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R se, e somente se, $d(P, C) = R$. Logo,

$$d(P, C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{R^2} = |R| = R,$$

pois $R > 0$. ■

Note que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

onde $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ e $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. Portanto, uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro C e raio R representa uma cônica. Reciprocamente, o gráfico da cônica

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

quando $a^2 + b^2 - c > 0$, é a representação analítica da circunferência $\mathcal{C}$ de centro $C = (-a, -b)$ e raio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, pois

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = (x + a)^2 + (y + b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = 0,$$

ou ainda,

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Exemplo 2.21 Determinar a equação da circunferência de centro $C = (-4, 3)$ e raio $R = 3$.

Solução. Pela Proposição 2.20, temos que a equação da circunferência é dada por

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2,$$

ou ainda, $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$.

Exemplo 2.22 Determinar o centro e o raio da circunferência $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0$.

Solução. Uma maneira de resolver este problema é completando os quadrados.

$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 8y) + 16 = 0.$$

Como

$$x^2 - 12x = x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2 - 6^2 = (x - 6)^2 - 36$$

e

$$y^2 + 8y = y^2 + 2 \cdot 4y + 4^2 - 4^2 = (y + 4)^2 - 16$$

temos que

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 16 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 36.$$

Portanto, $C = (6, -4)$ e $R = 6$ são o centro e o raio da circunferência $\mathcal{C}$.

Proposição 2.23 Sejam r_1, r_2 retas distintas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ circunferências distintas em $\mathbb{R}^2$. Então:

1. $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ ou $r_1 \cap r_2$ é um ponto em $\mathbb{R}^2$.
2. $r_1 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$ ou $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Vamos provar apenas o item (2). Se

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ e } \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

então multiplicando a segunda equação por -1 e adicionando-se, obtemos a reta

$$r : (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

Logo, o item (3), reduz-se ao item (2) com $r \cap \mathcal{C}_1$ ou $r \cap \mathcal{C}_2$. Suponhamos que r_1 tenha equação cartesiana

$$r_1 : Ax + By + C = 0.$$

Se $B \neq 0$ (o caso $B = 0$ fica como um exercício), então podemos supor, sem perda de generalidade, que $B = 1$. Logo,

$$r_1 : y = -Ax - C.$$

Se $(x, y) \in r_1 \cap \mathcal{C}_1$, então substituindo y na equação de $\mathcal{C}_1$ e desenvolvendo, obtemos

$$dx^2 + ex + f = 0,$$

onde $d = 1 + A^2 \neq 0$, $e = 2AC + a_1 - b_1A$ e $f = b_1C + c_1$. Seja $\Delta = e^2 - 4df$. Então há três casos a ser considerado:

1.º **Caso.** Se $\Delta = 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ é um ponto em $\mathbb{R}^2$, isto é, a reta r_1 é tangente a circunferência $\mathcal{C}_1$.

2.º **Caso.** Se $\Delta > 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1$ são dois pontos em $\mathbb{R}^2$, isto é, a reta r_1 é secante a circunferência $\mathcal{C}_1$.

3.º **Caso.** Se $\Delta < 0$, então $r_1 \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$, isto é, a reta r_1 não intercepta a circunferência $\mathcal{C}_1$. ■

Exemplo 2.24 Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $\mathcal{C}$ de equação cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

e perpendiculares à reta $r : x - 2y + 9 = 0$.

Solução. As retas desejadas têm equação reduzida da forma $y = -2x + b$. Então substituindo y na equação de $\mathcal{C}$, obtemos

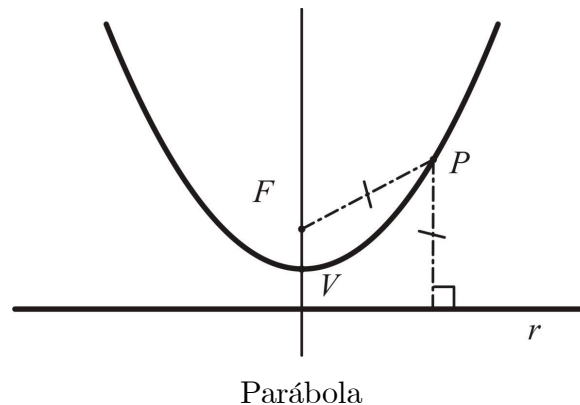
$$5x^2 - (4b + 10)x + 4b + b^2 = 0.$$

Por hipótese, devemos ter $\Delta = (4b + 10)^2 - 20(4b + b^2) = 0$, isto é, $100 - 4b^2 = 0$. Logo, $b = -5$ ou $b = 5$. Portanto, as equações das retas tangentes a $\mathcal{C}$ são: $y = -2x - 5$ e $y = -2x + 5$.

Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e F um ponto de $\mathbb{R}^2$ com $F \notin r$. Uma *parábola* $\mathcal{P}$ de diretriz r e foco F é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

Geometricamente, uma parábola $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que são equidistantes de F e r (confira Figura ??). Apostol, pag 498, vol 1 ??????????????



Observações 2.25 1. A reta passando pelo foco F e perpendicular a diretriz r será chamada de eixo da parábola $\mathcal{P}$.

2. A interseção do eixo com a parábola $\mathcal{P}$ será chamada de vértice da parábola $\mathcal{P}$.

Proposição 2.26 Seja $p \in \mathbb{R}$ fixado com $p \neq 0$. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$y^2 = 4px$$

representa uma parábola $\mathcal{P}$ cuja diretriz é a reta vertical $x = -p$ e cujo foco é o ponto $F = (p, 0)$.

Prova. Como $r : x + p = 0$ e por definição $d(P, F) = d(P, r)$ temos que

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + p|.$$

Assim, elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, obtemos

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2.$$

Desenvolvendo, obtemos $y^2 = 4px$, que é a equação reduzida da parábola. ■

Exemplo 2.27 Determinar a equação da parábola com diretriz $x = -1$ e foco $F = (-7, 0)$.

Solução. Pela Proposição 2.26, temos que a equação da parábola é dada por

$$y^2 = 4x.$$

Exemplo 2.28 Determinar a diretriz e o foco da parábola $\mathcal{P} : y^2 = 12x$.

Solução. Como $y^2 = 4 \cdot 3 \cdot x$ temos que $x = -3$ é a diretriz e $F = (3, 0)$ é o foco de $\mathcal{P}$.

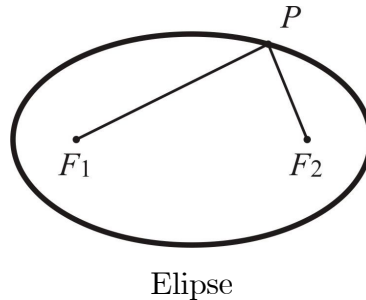
Proposição 2.29 Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}$ uma parábola em $\mathbb{R}^2$. Então $r \cap \mathcal{P} = \emptyset$ ou $r \cap \mathcal{P}$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Fica como um exercício. ■

Sejam F_1, F_2 pontos de $\mathbb{R}^2$ com $F_1 \neq F_2$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ tal que $d(F_1, F_2) < 2a$. Uma *elipse* $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Geometricamente, uma elipse $\mathcal{E}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante (confira Figura ??).



Observações 2.30 1. A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 será chamada de eixo focal da elipse $\mathcal{E}$.

2. Os pontos de interseções do eixo focal com a elipse $\mathcal{E}$ serão chamados de vértices da elipse $\mathcal{E}$ e denotados por A_1 e A_2 , repectivamente. Note que

$$d(A_1, A_2) = 2a$$

e a será chamado de semi-eixo focal.

3. O centro C da elipse $\mathcal{E}$ é o ponto médio do segmento que une os focos F_1 e F_2 . A distância entre F_1 e F_2 será chamada de distância focal e denotada por $d(F_1, F_2) = 2c$. Neste caso, $c < a$.

4. A mediatriz do segmento de reta que une os focos F_1 e F_2 será chamado de eixo normal. Se denotarmos por B_1 e B_2 os pontos de interseções da elipse $\mathcal{E}$ com o eixo normal, o escalar b tal que $d(B_1, B_2) = 2b$, será chamado de semi-eixo normal.
5. Pode ser provado, usando o Teorema de Pitágoras, que $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, $0 < b < a$.

A razão entre a distância focal c e o semi-eixo focal a será chamada de *excentricidade* da elipse $\mathcal{E}$ e denotada por

$$e = \frac{c}{a} \text{ e } 0 < e < 1.$$

Note que

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Logo,

$$\lim_{b \rightarrow a} e = 0 \text{ e } \lim_{b \rightarrow 0} e = 1.$$

Portanto, quando b se aproxima de a a elipse se aproxima de uma circunferência e quando b se aproxima de 0 a elipse se aproxima de um segmento de reta. Assim, a excentricidade caracteriza a forma da elipse.

Proposição 2.31 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ fixados com $a > b > 0$. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa uma elipse $\mathcal{E}$ de centro $C = (0, 0)$, semi-eixo focal a , semi-eixo normal b e de focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Prova. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

ou ainda,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Assim, elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, temos que

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$(a^2 - cx) = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Novamente, elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, temos que

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2.$$

Simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$ temos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a *equação reduzida da elipse*. ■

Observações 2.32 1. Os focos na Proposição 2.31 podem ser dados por $F_1 = (-ae, 0)$ e $F_2 = (ae, 0)$, onde e é a excentricidade da elipse $\mathcal{E}$.

2. As retas $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$ serão chamadas de diretrizes da elipse $\mathcal{E}$. Note que

$$-\frac{a}{e} < -a \text{ e } a < \frac{a}{e}.$$

3. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer ponto da elipse $\mathcal{E}$. Então pode ser provado que $d(P, F_i) = e \cdot d(P, r)$, onde r é a reta diretriz correspondendo ao foco F_i , $i = 1, 2$. De fato, como

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 + (e^2 - 1)x^2$$

temos que

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2.$$

Logo,

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2} = e \sqrt{\left(x - \frac{a}{e}\right)^2} = e \cdot d(P, r).$$

Exemplo 2.33 Determinar as diretrizes e os focos da elipse $\mathcal{E} : 4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solução. Dividindo todos os termos por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Como $a = 3 > b = 2$ temos que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Logo, $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$ são os focos de $\mathcal{E}$. Sendo

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

temos que

$$x = -\frac{a}{e} = -\frac{9}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{5}\sqrt{5} \text{ e } x = \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9}{5}\sqrt{5}$$

são as diretrizes de $\mathcal{E}$.

Proposição 2.34 *Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}$ uma elipse em $\mathbb{R}^2$. Então $r \cap \mathcal{E} = \emptyset$ ou $r \cap \mathcal{E}$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Fica como um exercício. ■

Exemplo 2.35 *Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > b > 0$. Determinar o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ externos a $\mathcal{E}$ tais que as retas tangentes a $\mathcal{E}$ por P sejam perpendiculares.

Solução. Sejam P_1 e P_2 os pontos de tangências das retas com a elipse $\mathcal{E}$. Então, por hipótese, P_1PP_2 é um triângulo retângulo em P . Logo, OP_1PP_2 é um retângulo cuja diagonal é o segmento $\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$d(O, P)^2 = d(P_1, P_2)^2 = d(P, P_1)^2 + d(P, P_2)^2 = a^2 + b^2,$$

ou ainda,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Portanto, o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ externos a $\mathcal{E}$ tais que as retas tangentes a $\mathcal{E}$ por P sejam perpendiculares é uma circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Sejam F_1, F_2 pontos de $\mathbb{R}^2$ com $F_1 \neq F_2$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ tal que $d(F_1, F_2) > 2a$. Uma *hipérbole* $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Geometricamente, uma hipérbole $\mathcal{H}$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante.

Figura ???

Observações 2.36 1. A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 será chamada de eixo focal da hipérbole $\mathcal{H}$.

2. Os pontos de interseções do eixo focal com a hipérbole $\mathcal{H}$ serão chamados de vértices da hipérbole $\mathcal{H}$ e denotados por A_1 e A_2 , repectivamente. Note que

$$d(A_1, A_2) = 2a$$

e a será chamado de semi-eixo focal.

3. O centro C da hipérbole $\mathcal{H}$ é o ponto médio do segmento que une os focos F_1 e F_2 . A distância entre F_1 e F_2 será chamada de distância focal e denotada por $d(F_1, F_2) = 2c$. Neste caso, $a < c$.

4. A mediatriz do segmento de reta que une os focos F_1 e F_2 será chamado de eixo normal da hipérbole $\mathcal{H}$.

Proposição 2.37 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$ fixados. Então o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

representa uma hipérbole $\mathcal{H}$ de centro $C = (0, 0)$, semi-eixo focal a , semi-eixo normal b e de focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$.

Prova. Fica como um exercício. ■

A razão entre a distância focal c e o semi-eixo focal a será chamada de *excentricidade* da hipérbole $\mathcal{H}$ e denotada por

$$e = \frac{c}{a} \text{ e } 1 < e.$$

Note que

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Logo,

$$\lim_{b \rightarrow 0} e = 1.$$

Observações 2.38 1. Os focos na Proposição 2.37 podem ser dados por $F_1 = (-ae, 0)$ e $F_2 = (ae, 0)$, onde e é a excentricidade da hipérbole $\mathcal{H}$.

2. As retas $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$ serão chamadas de diretrizes da hipérbole $\mathcal{H}$. Note que

$$-a < -\frac{a}{e} \text{ e } \frac{a}{e} < a.$$

3. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer ponto da hipérbole $\mathcal{H}$. Então pode ser provado que $d(P, F_i) = e \cdot d(P, r)$, onde r é a reta diretriz correspondendo ao foco F_i , $i = 1, 2$.

Pela equação cartesiana da hipérbole $\mathcal{H}$, obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Logo, a representação gráfica da função

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left(y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

aproxima-se assintoticamente da reta

$$y = \frac{b}{a} x \quad \left(y = -\frac{b}{a} x \right)$$

quando x se torna arbitrariamente grande para direita (esquerda) da origem, notação, $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$), pois

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) = 0.$$

As retas

$$y = \frac{b}{a}x \text{ e } y = -\frac{b}{a}x$$

serão chamadas de *assíntotas* da hipérbole $\mathcal{H}$.

Exemplo 2.39 Determinar as diretrizes e os focos da hipérbole $\mathcal{H} : 5x^2 - 4y^2 = 20$.

Solução. Dividindo todos os termos por 20, obtemos

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$$

Como o semi-eixo focal $a = 2$ temos que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ são os focos de $\mathcal{H}$. Sendo

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2},$$

temos que

$$x = -\frac{a}{e} = -\frac{9}{3} \text{ e } x = \frac{a}{e} = \frac{9}{3}$$

são as diretrizes de $\mathcal{E}$.

Proposição 2.40 Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{H}$ uma hipérbole em $\mathbb{R}^2$. Então $r \cap \mathcal{H} = \emptyset$ ou $r \cap \mathcal{H}$ é um ou dois pontos em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Fica como um exercício. ■

Uma *inequação* em x é uma desigualdade da forma

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ ou } \frac{2x - 3}{x - 10} < 0.$$

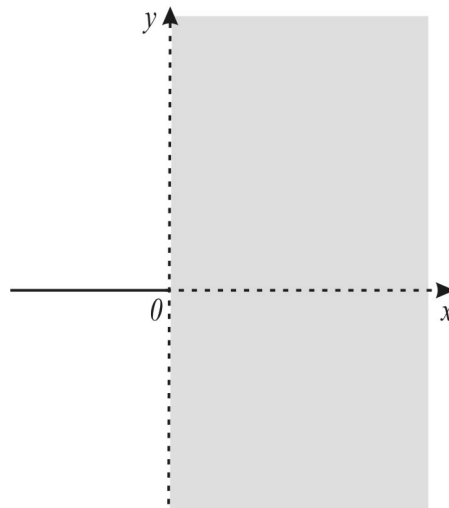
Uma *região* determinada por uma inequação em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem essa inequação.

Exemplo 2.41 Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $x > 0$.

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $x > 0$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

(confira Figura ??).



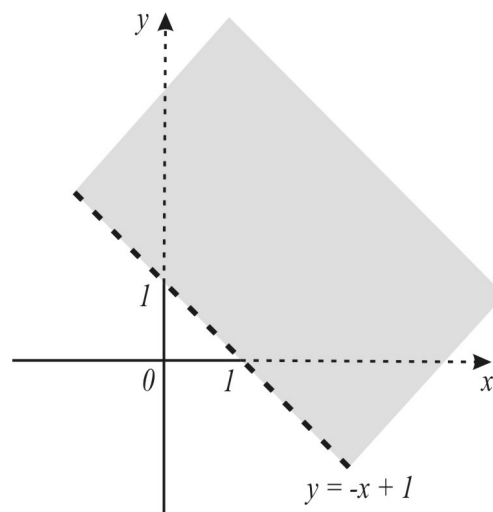
Região determinada pela inequação $x > 0$.

Exemplo 2.42 Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$.

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x + 1\}$$

(confira Figura ??).



Região determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$.

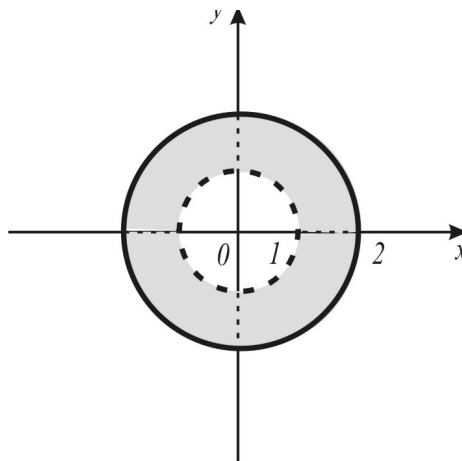
Exemplo 2.43 Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações

$$1 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações $1 < x^2 + y^2 \leq 4$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(confira Figura ??).



Região determinada pelas inequações $1 < x^2 + y^2 \leq 4$.

EXERCÍCIOS

1. Calcular o raio da circunferência que tem centro em $C = (4, 9)$ e que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$.
2. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos distintos de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que A , B e C determinam uma única circunferência se, e somente se, eles são não-colineares.
3. Determinar todos os parâmetros das equações abaixo.
 - (a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 38 = 0$.
 - (b) $6y^2 - x = 0$.
 - (c) $x^2 + 4y^2 = 4$.
 - (d) $x^2 - 9y^2 = 9$.
4. Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações abaixo:
 - (a) $x - y + 2 \geq 0$.
 - (b) $x + y - 1 > 0$ e $x - y > 0$.
 - (c) $x - 2y - 3 > 0$ e $x + 3y + 1 \leq 0$.
 - (d) $x^2 + y^2 - 4|x| < 0$.
 - (e) $(x^2 + y^2 - 6x)(x^2 + y^2 - 4y) \geq 0$.

5. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$ e $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$ os focos da elipse de equação cartesiana $16x^2 + \lambda y^2 = 16\lambda$. Sabendo-se que P é um ponto dessa elipse, cuja distância ao foco F_2 mede 5 unidade de comprimento. Determinar a distância de P ao foco F_1 .

6. Sejam $A = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ e $B = (R \cos \beta, R \sin \beta)$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$ com $R > 0$. Mostrar que

$$d(A, B) = 2R \left| \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right|.$$

Dê uma interpretação geométrica.

7. Sejam r e s as retas tangentes à circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 25$, nos pontos $A = (-3, 4)$ e $B = (5, 0)$, respectivamente. Sabendo-se que P é o ponto de interseção dessas retas, determinar a área do triângulo ABP .
8. Determinar a equação da hipérbole que tem assíntotas as retas $2x + 3y = 0$ e $2x - 3y = 0$, e que passa pelo ponto $P = (4, 0)$.
9. Seja A o conjunto de todas as retas de equações reduzidas $y = mx - 5$. Determinar as retas de A que são tangentes à circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y - 2x = 0$.
10. Determinar a posição relativa entre a reta $r : \sqrt{2}x - y + 3 = 0$ e a elipse $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 = 4$.
11. Determinar a posição relativa entre a reta $r : 2x - 2y - 2 = 0$ e a hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - 8y^2 = 8$.
12. Seja $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}$ de equação carteseiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostre que

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta},$$

com $r = d(P, F_1)$, $F_1 = (-c, 0)$ e θ o ângulo entre o eixo dos x e o segmento de reta $\overline{F_1P}$.

2.6 Mudança de Coordenadas

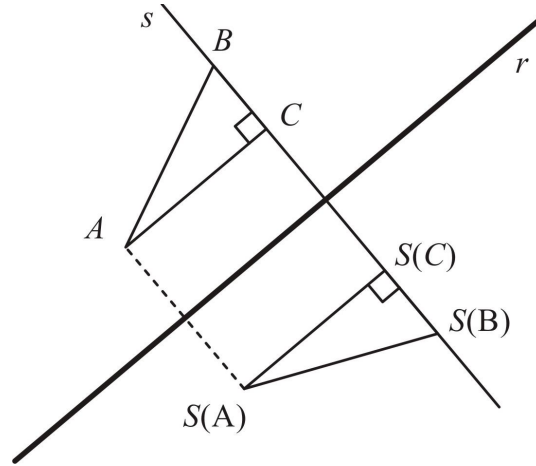
Uma *isometria* ou um *movimento rígido* em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação (função) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distância, isto é,

$$d(T(A), T(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2.$$

Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é um *ponto fixo* de uma isometria T em $\mathbb{R}^2$ se $T(P) = P$.

Seja r uma reta em $\mathbb{R}^2$. Uma *reflexão* em r é a única transformação $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada $P \in \mathbb{R}^2$ um único $S(P) \in \mathbb{R}^2$ tal que o ponto médio do segmento $\overline{PS(P)}$ é o pé da perpendicular traçada de P a r se $P \notin r$ e $S(P) = P$ se $P \in r$. A reta r é chamada o *eixo* de S . Note que $S^2(P) = S \circ S(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$, isto é, $S^2 = I$ é a transformação identidade.

Dados $A, B \in \mathbb{R}^2$. Sejam s a reta passando por B e perpendicular a r , $C \in r_1 \cap s$, com r_1 a reta passando por A e paralela a r . Então os triângulos ABC e $S(A)S(B)S(C)$ são congruentes (confira Figura ??).



Reflexão com eixo a reta r .

Portanto,

$$d(S(A), S(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2,$$

isto é, toda reflexão com eixo r é uma isometria em $\mathbb{R}^2$.

Agora vamos determinar a expressão analítica de uma reflexão com eixo r . Sejam $y = mx + b$ a equação reduzida da reta r , $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $Q = S(P) = (u, v)$. Então

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}u + v \quad \text{ou} \quad u + mv = x + my$$

é a equação reduzida da reta s perpendicular a r e passando por Q . Como $d(P, r) = d(Q, r)$ temos que

$$\frac{|mx - y + b|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|mu - v + b|}{\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow |mx - y + b| = |mu - v + b|.$$

Logo,

$$mx - y + b = mu - v + b \quad \text{ou} \quad mx - y + b = -(mu - v + b).$$

Assim, temos os seguintes sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} u + mv = x + my \\ mu - v = mx - y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u + mv = x + my \\ mu - v = -mx + y - 2b. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos

$$u = x, \quad v = y \quad \text{ou} \quad u = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \frac{2m}{1 + m^2}(y - b), \quad v = \frac{2m}{1 + m^2}x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}y + \frac{2b}{1 + m^2}.$$

Portanto, $S(x, y) = (x, y)$ ou

$$S(x, y) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \frac{2m}{1 + m^2}(y - b), \frac{2m}{1 + m^2}x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}y + \frac{2b}{1 + m^2} \right).$$

Finalmente, se θ é o ângulo que a reta r faz com o eixo dos x e $b = 0$, então $m = \tan \theta$ e é fácil verificar que

$$S(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta).$$

Em particular, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ temos que

$$S(x, y) = (y, x).$$

Neste caso, dizemos que S é uma *permutação de eixos*.

Uma *translação* ou *translação de eixos* é a única transformação $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b).$$

Geometricamente, uma translação é uma transformação que move todo ponto a mesma distância na mesma direção, isto é, dados $A, B \in \mathbb{R}^2$, então $d(A, T_{a,b}(A)) = d(B, T_{a,b}(B))$ e os segmentos $\overline{AT_{a,b}(A)}$ e $\overline{BT_{a,b}(B)}$ são paralelos. Note que $T_{a,b}$ não tem pontos fixos.

Proposição 2.44 *Sejam $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$. Então $T_{a,b} = S_2 \circ S_1$, onde S_1 é a reflexão de eixo a mediatriz do segmento $\overline{OP}$ e S_2 é a reflexão de eixo à reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ por P . Em particular, $T_{a,b}$ é uma isometria em $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Sejam $y = \frac{b}{a}x$ a reta suporte dos pontos O e P e $d = a^2 + b^2$. Então

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{2b} \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{b}$$

são os eixos de S_1 e S_2 , respectivamente. Logo,

$$S_1(x, y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{d}x - \frac{2ab}{d}\left(y - \frac{d}{2b}\right), -\frac{2ab}{d}x - \frac{b^2 - a^2}{d}y + b \right)$$

e

$$S_2(x, y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{d}x - \frac{2ab}{d}\left(y - \frac{d}{b}\right), -\frac{2ab}{d}x - \frac{b^2 - a^2}{d}y + 2b \right).$$

Assim,

$$S_2 \circ S_1(x, y) = S_2(S_1(x, y)) = (x + a, y + b) = T_{a,b}(x, y),$$

isto é, $T_{a,b} = S_2 \circ S_1$. ■

Exemplo 2.45 Sejam $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ pontos quaisquer em $\mathbb{R}^2$. Então existe uma isometria T em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(A) = B$.

Solução. Sejam $T_{-a, -b}$ e $T_{c, d}$ translações em $\mathbb{R}^2$. Então $T = T_{c, d} \circ T_{-a, -b}$ tem a propriedade desejada, pois

$$T(A) = T(a, b) = T_{c, d} \circ T_{-a, -b}(a, b) = T_{c, d}(0, 0) = (c, d) = B.$$

Uma *rotação* é a única transformação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R_\theta(O) = O$ e

$$\theta = \angle \left(\overline{OP}, \overline{OR_\theta(P)} \right), \quad \forall P \in \mathbb{R}^2 \text{ com } P \neq O,$$

onde O é chamado o *centro* de R e θ o *ângulo de rotação* de R_θ . Note que O é o único ponto fixo de R_θ .

Proposição 2.46 Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma rotação anti-horário de ângulo de rotação θ . Então $R_\theta = S_2 \circ S_1$, onde S_1 é a reflexão de eixo a bissetriz do ângulo θ e S_2 é a reflexão de eixo à reta r suporte de O e $R_\theta(P)$. Em particular, R_θ é uma isometria em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que P esteja no eixo dos x . Então $y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)x$ e $y = \tan\theta x$ são os eixos de S_1 e S_2 , respectivamente. Logo,

$$S_1(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta)$$

e

$$S_2(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta).$$

Assim,

$$S_2 \circ S_1(x, y) = S_2(S_1(x, y)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Portanto, $S_2 \circ S_1(0, 0) = (0, 0)$ é o único ponto fixo e $\theta = \angle \left(\overline{OP}, \overline{O(S_2 \circ S_1)(P)} \right)$, isto é, $R_\theta = S_2 \circ S_1$. ■

Exemplo 2.47 Identificar a equação $x^2 - 4py = 0$.

Solução. Fazendo a mudança de coordenadas $u = y$ e $v = x$, isto é, uma permutação de eixos, obtemos

$$v^2 = 4pu.$$

Assim, essa equação representa uma parábola no plano $u0v$ com foco $F = (p, 0)$ e diretriz $u = -p$. Portanto, a equação $4py = x^2$ representa uma parábola no plano $x0y$ com foco $F = (0, p)$ e diretriz $y = -p$.

Exemplo 2.48 Identificar a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com } b > a > 0.$$

Solução. Fazendo a mudança de coordenadas $u = y$ e $v = x$, isto é, uma permutação de eixos, obtemos

$$\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2} = 1 \text{ com } b > a > 0.$$

Assim, essa equação representa uma elipse no plano $u0v$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, onde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Portanto, a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ com } b > a > 0$$

representa uma elipse no plano $x0y$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$.

Exemplo 2.49 *Identificar a equação*

$$2x^2 + 9y^2 + 4x + 36y + 26 = 0.$$

Solução. Como

$$2x^2 + 4x = 2(x + 2)^2 - 8 \text{ e } 9y^2 + 36y = 9(y + 2)^2 - 36$$

temos que

$$2x^2 + 9y^2 + 4x + 36y + 26 = 0 \Rightarrow 2(x + 2)^2 + 9(y + 2)^2 = 18.$$

Dividindo todos os termos por 18, obtemos

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{2} = 1.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $u = x + 2$ e $v = y + 2$, isto é, uma translação de eixos, obtemos

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{2} = 1.$$

Assim, essa equação representa uma elipse no plano $u0v$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$. Portanto, a equação

$$2x^2 + 9y^2 + 4x + 36y + 26 = 0$$

representa uma elipse no plano $x0y$ com centro $C = (-2, -2)$ e focos $F_1 = (-2 - \sqrt{7}, -2)$ e $F_2 = (-2 + \sqrt{7}, -2)$.

Exemplo 2.50 *Identificar a equação $xy - 1 = 0$.*

Solução. Fazendo a mudança de coordenadas

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \text{ e } v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) \text{ e } y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v),$$

isto é, uma rotação de ângulo $\theta = -\frac{\pi}{4}$, obtemos

$$u^2 - v^2 = 2.$$

Dividindo todos os termos por 2, temos que

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1.$$

Assim, essa equação representa uma hipérbole no plano $u0v$ com centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$. Portanto, a equação

$$xy - 1 = 0$$

representa uma hipérbole no plano $x0y$ com centro $C = (0, 0)$ e focos

$$F_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } F_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

Teorema 2.51 *Seja*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A, B e C , não todos nulos, a equação cartesiana de uma cônica.

- 1. Se $A = C$, $A \cdot C \neq 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio.*
- 2. Se $A \cdot C = 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma parábola, duas retas ou o conjunto vazio.*
- 3. Se $A \neq C$, $A \cdot C > 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.*
- 4. Se $A \cdot C < 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma hipérbole ou duas retas.*

Prova. Fica como um exercício. ■

Seja

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes com A e C , não ambos nulos, e $B \neq 0$, a equação cartesiana de uma cônica. Então a mudança de coordenadas

$$u = x \cos \theta - y \sin \theta \text{ e } v = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

ou, equivalentemente,

$$x = u \cos \theta + v \sin \theta \text{ e } y = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

transforma essa equação em

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \\ B' &= (A - C) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta) \\ C' &= A \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' &= D \cos \theta - E \sin \theta \\ E' &= D \sin \theta + E \cos \theta \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Assim, pela segunda equação, $B' = 0$ se, e somente se,

$$\cot(2\theta) = \frac{C - A}{B}.$$

Portanto, é sempre possível, por uma rotação conveniente R_θ , obter uma nova equação da cônica sem o termo cruzado uv . Note que

$$C' + A' = C + A \text{ e } C' - A' = \frac{B}{\sin(2\theta)}$$

se $\sin(2\theta) \neq 0$, simplifica os cálculos dos coeficientes da nova equação, pois

$$\sin^2(2\theta) = \frac{1}{1 + \cot^2(2\theta)} = \frac{B^2}{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}.$$

EXERCÍCIOS

1. Identificar as equações abaixo:

- (a) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$.
- (b) $x^2 - y^2 - x - y = 0$.
- (c) $x^2 - 4x - 6y + 10 = 0$.
- (d) $9x^2 + 25y^2 - 72x - 100y + 19 = 0$.
- (e) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.
- (f) $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 6 = 0$.
- (g) $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 9 = 0$.
- (h) $3x^2 + 3y^2 - 8xy - 7 = 0$.

- (i) $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$.
- (j) $16x^2 + 4y^2 - 32x + 16y + 96 = 0$.

2. Seja $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Mostrar que se $T_1, T_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, então $T_2 \circ T_1 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.
- (b) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, então $T^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

3. Determinar todas as isometrias $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde $ab + cd = 0$, $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$.

4. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$. Uma *homotetia* de centro O e razão λ é a única transformação $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(O) = O$ e $H(P)$ é o único ponto da semi-reta OP com $d(O, H(P)) = \lambda d(O, P)$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$ com $P \neq O$. Determinar a expressão analítica de H . Conclua que H é bijetora e que

$$d(H(P_1), H(P_2)) = \lambda d(P_1, P_2), \quad \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2.$$

5. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 0$. Uma *inversão* de polo O e razão λ é a única transformação

$$E : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

tal que $E(P)$ é o único ponto da semi-reta OP com $d(O, P) \cdot d(O, E(P)) = \lambda^2$, para todo $P \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Determinar a expressão analítica de E . Conclua que E é bijetora e que o conjunto

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 : E(P) = P\}$$

é uma circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio λ , o qual é chamado de *círculo isométrico*.

6. Seja F uma figura em $\mathbb{R}^2$. Uma *simetria* de F é uma isometria T de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(F) = F$. Determinar todas as simetrias de um triângulo equilátero e das letras A , H e N .

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação definida por

$$T(x, y) = (x, y) \text{ exceto } T(0, 0) = (1, 0) \text{ e } T(1, 0) = (0, 0).$$

Mostrar que T é bijetora mas não é uma isometria.

8. Sejam $C_2(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

e $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os números complexos. Mostrar que as transformações $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C_2(\mathbb{R})$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$T_1(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \text{ e } T_2(x, y) = z, \text{ ou } z = x + iy,$$

são bijetoras. Conclua que podemos identificar esses conjuntos.

9. Seja $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^2$.

- (a) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ fixa dois pontos distintos A e B , então T fixa todo os pontos da reta suporte de A e B , isto é, $T = I$ ou T é uma reflexão.
- (b) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ fixa três pontos não-colineares A , B e C , então $T = I$ é a identidade.
- (c) Mostrar que existe no máximo um elemento $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(C) = C'$, onde ABC e $A'B'C'$ são triângulos congruentes.

10. Mostrar que toda isometria de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrita como a composta de uma reflexão, uma rotação e uma translação.

11. Seja $\text{Isom}(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{C}$.

- (a) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ é uma translação, então $T(z) = z + w$, para algum $w \in \mathbb{C}$.
- (b) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ é uma rotação de ângulo θ , então $T(z) = e^{i\theta}z$.
- (c) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ é uma reflexão de eixo x , então $T(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado complexo de z .
- (d) Mostrar que todo $T \in \text{Isom}(\mathbb{C})$ pode ser escrito na forma

$$T(z) = uz + w \text{ ou } T(z) = u\bar{z} + w, \text{ onde } u, w \in \mathbb{C} \text{ e } |u| = 1.$$

12. Seja $P_0 = (a, b)$ um ponto fixado em $\mathbb{R}^2$. Uma *semelhança* é a única transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (ax - by, bx - ay).$$

Mostrar que $T = H \circ R_\theta$, onde R_θ é uma rotação de ângulo θ e H uma homotetia.

13. Seja $\text{Isom}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}$.

- (a) Mostrar que se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ fixa dois pontos distintos a e b , então $T = I$ é a identidade.
- (b) Mostrar que todo $T \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ pode ser escrito na forma

$$T(x) = mx + b, \quad m \in \{-1, 1\} \text{ e } b = T(0).$$

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 1.2

3. Sim. O valor da abscissa igual a 0.
5. (a) $x = -3$ e $y = 8$; (b) $x = 1$ e $y = -1$; (c) $x = 5$ e $y = -3$; (d) $x = -3$ ou 2 e $y = 0$ ou 2 ; (e) $x = -2$ ou 2 e $y = -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$.
7. $(2, 1) \in A$; $(0, 1) \notin A$; $(-2, 3) \notin A$; $(1, 0) \in A$ e $(-1, -2) \in A$.
11. Seja $(x, y) \in A \times B$. Então $x \in A$ e $y \in B$. Como $B = C \cup D$ e $y \in B$ temos que $y \in C$ ou $y \in D$. Logo, $x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in A$ e $y \in D$. Assim, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in A \times D$. Portanto,

$$(x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D),$$

ou seja, $A \times B \subseteq (A \times C) \cup (A \times D)$. A recíproca prova-se de modo análogo.

Seção 1.3

1. (a) $5\sqrt{2}$ u c; (b) $2\sqrt{5}$ u c; (c) 5 u c.
3. (a) Como $d(A, B) = 5$, $d(A, C) = 4$ e $d(B, C) = 3$ são os comprimentos dos lados do triângulo ABC temos que o perímetro é igual

$$p = 3 + 4 + 5 = 12;$$

(b) Como

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(B, C)^2$$

temos que o triângulo ABC é retângulo e sua área é igual a 6 u a.

5. $P = (1, 0)$.
7. $C = (3, 6)$ e $D = (6, 2)$ ou $C = (-5, 0)$ e $D = (-2, -4)$.
9. $P = (3, 3)$.

Seção 1.4

1. (a) $m = -1$; (b) $m = \frac{5}{7}$; (c) $m = 1$; (d) $m = -\frac{7}{13}$.
3. (a) $y = 5x + 3$, $m = 5$ e $b = 3$; (b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{7}{3}$; (c) $y = \frac{1}{2}x + 2$, $m = \frac{1}{2}$ e $b = 2$; (d) $y = -2x + \frac{1}{3}$, $m = -2$ e $b = \frac{1}{3}$.
5. $y = 4x - 11$.
7. $2x - 5y + 18 = 0$.
9. $4x + 3y + 12 = 0$.
11. $y = -7$.
13. Sim.
15. (a) Sim; (b) Não; (c) Não; (d) Sim.
17. (a) 2 u c; (b) 4 u c; (c) 0 u c; (d) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ u c; (e) $3\sqrt{2}$ u c.
19. (a) 2 u c; (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ u c; (c) $\frac{|C-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ u c.
21. $\frac{16\sqrt{65}}{65}$ u a.
23. Sabemos que área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}(\text{base} \cdot \text{altura}).$$

Fixando um dos vértices, digamos A , obtemos que o comprimento da base é igual a $d(B, C)$ e da altura é igual a $d(A, r)$, onde r é a reta que passa pelos pontos B e C , isto é,

$$(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y + (x_3y_2 - x_2y_3) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} d(A, r) &= \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ &= \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)|}{d(B, C)} \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}d(B, C) \cdot d(A, r) \\ &= \frac{1}{2}|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)| \\ &= \frac{1}{2}|\mathbf{D}|, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{D} = \det(\mathbf{A}) \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. 32 u a.

27. $x = -9$ ou $x = -1$.

29. $P = (-4, -7)$.

31. Consideremos o feixe

$$x - y + 1 + \lambda(2x + 3y - 2) = 0.$$

Então é fácil verificar que $P_0 = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ é o ponto de interseção do feixe. Como $P_0 = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ e $P = (3, -2)$ pertencem a reta temos que a inclinação é dada por

$$m = \frac{-2 - \frac{4}{5}}{3 + \frac{1}{5}} = -\frac{7}{8}.$$

Logo, a equação da reta é

$$y + 2 = -\frac{7}{8}(x - 3) \text{ ou } 7x + 8y - 5 = 0.$$

33. (a) $\frac{\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\theta = \arctan \frac{2}{3}$; (d) $\frac{\pi}{4}$.

Seção 1.5

1. O raio da circunferência que tem centro em $C = (4, 9)$ e que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$ é dado por

$$r = d(C, P) = 10.$$

3. (a) Circunferência de centro $C = (3, -2)$ e raio $R = 5$; (b) Parábola de diretriz a reta $x = -\frac{1}{24}$ e foco $F = (\frac{1}{24}, 0)$; (c) ??????

5. 6.

7. $2x - y - 5 = 0$ e $11x + 2y + 5 = 0$.

9. $r \cap \mathcal{H} = \{(4, 1)\}$.

Seção 1.6

1. (a) Circunferência de centro $C = (1, -1)$ e raio $R = \frac{1}{2}$; (b) Duas retas $x - y = 0$ ou $x + y = 0$; (c) Parábola com foco $F = (2, \frac{5}{2})$ e diretriz $y = -\frac{5}{2}$; (d) Elipse de centro $C = (4, 2)$ e focos $F_1 = (0, 2)$ e $F_2 = (8, 2)$; (e) Hipérbole de centro $C = (1, -2)$ e focos $F_1 = (1 - \sqrt{13}, -2)$ e $F_2 = (1 + \sqrt{13}, -2)$; (f) Parábola com foco $F = (2, 1)$ e diretriz $x + y - 2 = 0$; (g) Elipse de centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-2, -2)$ e $F_2 = (2, 2)$; (h) Hipérbole de centro $C = (0, 0)$ e focos $F_1 = (-2, 2)$ e $F_2 = (2, -2)$; (i) Duas retas $x - y + 2 = 0$ ou $x - y - 2 = 0$; (j) Conjunto vazio.
3. Como $a^2 + c^2 = 1$ temos que $P = (a, c)$ pertence a uma circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio $R = 1$. Logo, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos \theta$ e $c = \sin \theta$. Mas as equações $ab + cd = 0$ e $b^2 + d^2 = 1$ implicam que $b = -\sin \theta$ e $d = \cos \theta$ ou $b = \sin \theta$ e $d = -\cos \theta$. Portanto,

$$T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

ou

$$T(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta)$$

isto é, T é uma rotação sobre a origem ou uma reflexão com eixo uma reta passando pela origem.

5. Sejam $P = (x, y)$ e $Q = E(P) = (u, v)$. Então $Q = (\mu x, \mu y)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$. Logo, $d(O, Q) = \mu d(O, P)$, isto é,

$$u^2 + v^2 = \mu^2(x^2 + y^2).$$

Como $d(O, P) \cdot d(O, E(P)) = \lambda^2$ temos que

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = \lambda^4.$$

Assim, encontrando o valor de μ , obtemos

$$E(x, y) = \left(\frac{\lambda^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{\lambda^2 y}{x^2 + y^2} \right) \text{ e } E^{-1} = E.$$

7. É fácil verificar que T é bijetora. Sejam $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. Então

$$1 = d(A, C) \neq \sqrt{2} = d(B, C) = d(T(A), T(C)).$$

Portanto, T não é uma isometria.

9. (a) Seja P um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$. Então

$$d(A, P) = d(A, T(P)) \text{ e } d(B, P) = d(B, T(P)).$$

Logo, $T(P) = P$ ou $S \circ T(P) = P$, onde S é uma reflexão com eixo a reta suporte de A e B . Portanto, $T = I$ ou $T = S$.

(b) Se $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ fixa três pontos não-colineares A , B e C , então pelo item (a) T fixa a reta suporte de A e B . Logo, T é a identidade I ou uma reflexão S com eixo a reta suporte de A e B . Como $S(C) \neq C$ temos que $T = I$.

(c) Já vimos que existe uma translação T_1 tal que $T_1(A) = A'$. Como

$$d(A', B') = d(A, B) = d(T_1(A), T_1(B)) = d(A', T_1(B))$$

temos que B' e $T_1(B)$ estão na mesma circunferência de centro A' . Logo, existe uma rotação R_θ com centro A' tal que $R_\theta \circ T_1(B) = B'$. Assim,

$$R_\theta \circ T_1(A) = A' \text{ e } R_\theta \circ T_1(B) = B'.$$

Como

$$d(A', C') = d(A, C) = d(R_\theta \circ T_1(A), R_\theta \circ T_1(C)) = d(A', R_\theta \circ T_1(C))$$

e

$$d(B', C') = d(B, C) = d(R_\theta \circ T_1(B), R_\theta \circ T_1(C)) = d(B', R_\theta \circ T_1(C))$$

temos que $R_\theta \circ T_1(C) = C'$ ou $S \circ R_\theta \circ T_1(C) = C'$, onde S é uma reflexão com eixo a reta suporte de A' e B' . Portanto, $T = R_\theta \circ T_1$ ou $T = S \circ R_\theta \circ T_1$ tem a propriedade desejada. A unicidade segue do item (b).

10. Sejam $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ e $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Suponhamos que $T(A) = (a, b)$. Então

$$T_{-a, -b} \circ T(A) = A.$$

Fazendo $B' = T_{-a, -b} \circ T(B)$, obtemos

$$1 = d(A, B) = d(T_{-a, -b} \circ T(A), T_{-a, -b} \circ T(B)) = d(A, B').$$

Logo, B' está em uma circunferência de centro A e raio 1. Assim, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $B' = (\cos \theta, \sin \theta)$. Então

$$R_{-\theta}(B') = B \text{ e } R_{-\theta}(A) = A.$$

Fazendo $C' = R_{-\theta} \circ T_{-a, -b} \circ T(C)$, obtemos

$$d(A, C') = 1 \text{ e } d(B, C') = \sqrt{2},$$

pois $R_{-\theta} \circ T_{-a, -b} \circ T(A) = A$ e $R_{-\theta} \circ T_{-a, -b} \circ T(B) = B$. Então $C' = (0, 1) = C$ ou $C' = (0, -1)$. Seja

$$S(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } C' = (0, 1) \\ (x, -y) & \text{se } C' = (0, -1). \end{cases}$$

Assim, tomando $T_2 = S \circ R_{-\theta} \circ T_{-a, -b}$, temos que

$$T_2 \circ T(A) = A, \quad T_2 \circ T(B) = B \text{ e } T_2 \circ T(C) = C.$$

Portanto, pelo item (b) do Exercício anterior, $T_2 \circ T = I$, isto é, $T = T_2^{-1} = T_{a, b} \circ R_\theta \circ S$.

13. (a) Seja c um elemento qualquer de $\mathbb{R}$. Então

$$|c - a| = d(a, c) = d(T(a), T(c)) = d(a, T(c)) = |T(c) - a|.$$

Logo,

$$T(c) - a = \pm(c - a).$$

Suponhamos, por absurdo, que $T(c) \neq c$. Se $T(c) - a = c - a$, então $T(c) = c$, o que é uma contradição. Assim, $T(c) - a = -c + a$, isto é, $T(c) = -c + 2a$. De modo análogo, obtemos $T(c) = -c + 2b$. Logo, $2a = 2b$, ou seja, $a = b$, o que é uma contradição. Portanto, $T(c) = c$ e $T = I$, pois c é arbitrário.

(b) Seja $T \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ e suponhamos que $T(0) = b$. Então

$$1 = d(0, 1) = d(T(0), T(1)) = d(b, T(1)) = |T(1) - b|.$$

Logo, $T(1) = b \pm 1$. Se $T(1) = b + 1$, então $T_{1,-b} \in \text{Isom}(\mathbb{R})$. Logo, $T_{1,-b} \circ T(0) = 0$ e $T_{1,-b} \circ T(1) = 1$. Assim, pelo item (a), $T_{1,-b} \circ T = I$, isto é, $T = T_{1,b}$. Se $T(1) = b - 1$, então $T_{-1,-b} \in \text{Isom}(\mathbb{R})$. Logo, $T_{-1,-b} \circ T(0) = 0$ e $T_{-1,-b} \circ T(1) = 1$. Assim, pelo item (a), $T_{-1,-b} \circ T = I$, isto é, $T = T_{-1,b}$. Portanto, em qualquer caso, $T(x) = mx + b$, onde $m \in \{-1, 1\}$ e $b = T(0)$.