

PROBLEMAS INVERSOS E A MATEMÁTICA DA TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

ADRIANO DE CEZARO* & FABIANA TRAVESSINI DE CEZARO†

Os *Problemas Inversos* envolvem conhecimentos em várias áreas da matemática e possuem muitas aplicações em outras ciências. Entre os problemas que são foco de interesse atual de pesquisa estão: aplicações industriais, como testes não destrutivos, identificação de parâmetros em processos industriais, [2, 7, 10, 12, 14, 25]; tomografias e aplicações às ciências médicas, como detecção de tumores e fraturas, [3, 18, 19, 21, 22]; aplicações à geofísica com detecção de reservatórios de minerais, prospecção de hidrocarbonetos, [13, 23, 25, 27].

Neste trabalho, daremos atenção especial a matemática dos Problemas Inversos que envolvem a reconstrução de imagens por *Tomografia Computadorizada*. Ou seja, queremos identificar a forma e a densidade de um objeto, imerso em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, através de medidas de um conjunto de intensidades dos raios-X que atravessam Ω . Nesse processo, o conjunto de parâmetros conhecidos são a intensidade inicial do raio-X e medições de sua intensidade de chegada a um detector. Fisicamente, a diferença entre a intensidade inicial e final do raio-X depende do coeficiente de absorção local e do caminho que o raio-X percorre ao atravessar Ω . Do ponto de vista matemático, esse processo é modelado pela *Transformada de Radon*.

Nosso foco é apresentar, utilizando conceitos de Álgebra Linear [9, 20, 24] e Análise [15, 16, 17], alguns métodos de obtenção de soluções estáveis para o problema em *Tomografia Computadorizada*. Observamos que a solução deste problema é complexa e envolve técnicas em matemática, física e computação científica, [3, 4, 6, 5, 21, 22]. Portanto, problemas em *Tomografia Computadorizada* envolvem conhecimentos interdisciplinares e, em particular, ferramentas matemáticas adequadas para a modelagem e análise do modelo. Ainda, exigem o desenvolvimento e estudo de métodos adequados para a obtenção de uma solução [3, 8, 13, 19, 22, 26]. Tais métodos se encaixam no estudo dos chamados *Problemas Inversos*, [1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 27].

Dada a relevância do tópico, objetivamos despertar o interesse do público nessa área, divulgando um pouco da teoria matemática que permeia a investigação científica dos *Problemas Inversos* e a importância teórica e prática destes na reconstrução de imagens por *Tomografia Computadorizada*.

Referências

- [1] J. Baumeister, *Stable solution of inverse problems*, Advanced Lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.
- [2] J. Baumeister and A. Leitão, *Topics in inverse problems*, Publicações Matemáticas do IMPA., (IMPA), Rio de Janeiro, 2005, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [3] M. Bertero and P. Boccacci, *Introduction to inverse problems in imaging*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1998.
- [4] T.M. Buzug, *Computer Tomography - From Photom Statistics to Modern Cone-Beam CT*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

*Universidade Federal do Rio Grande, IMEF, RS, Brasil, adrianocezaro@furg.br e
Doutor pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, RJ, (2010), decezar@impa.br

†Universidade Federal do Rio Grande, IMEF, RS, Brasil, fabianacezaro@furg.br e
Doutoranda do Instituto de Matemática, IME, UFRJ, Brasil, fabi.travessini@gmail.com

- [5] **De Cezaro, A. and Leitão, A.,** *Introdução aos Problemas Inversos Lineares*, IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática - Maringá - PR, online: <http://www.dma.uem.br/bienalsbm>, 2008.
- [6] ———, **Problemas Inversos: Uma Introdução**, I Colóquio de Matemática da Região Sul - Santa Maria - RS, <http://w3.ufsm.br/colmatsul/>, 2010.
- [7] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, *Regularization of inverse problems*, Mathematics and its Applications, vol. 375, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [8] C. L. Epstein, *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2003.
- [9] C. W. Groetsch, *Generalized inverses of linear operators: representation and approximation*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, No. 37.
- [10] ———, *Inverse problems in the mathematical sciences*, Vieweg Mathematics for Scientists and Engineers, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.
- [11] ———, *Inverse problems*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999, Activities for undergraduates.
- [12] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 127, Springer, New York, 2006.
- [13] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [14] M. M. Lavrentiev, A. V. Avdeev, M. M. Lavrentiev, Jr., and V. I. Priimenko, *Inverse problems of mathematical physics*, Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP, Utrecht, 2003.
- [15] E. L. Lima, *Curso de análise. Vol. 1*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976.
- [16] ———, *Espaços métricos*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 4, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.
- [17] ———, *Curso de análise. Vol. 2*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 13, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.
- [18] A. K. Louis, *Inverse problems in medicine*, Applications of mathematics in industry and technology (Siena, 1988), Teubner, Stuttgart, 1989, pp. 277–287.
- [19] ———, *Application of the approximate inverse to 3D X-ray CT and ultrasound tomography*, Inverse problems in medical imaging and nondestructive testing (Oberwolfach, 1996), Springer, Vienna, 1997.
- [20] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
- [21] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, Classics in Applied Mathematics, vol. 32, (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.
- [22] F. Natterer and F. Wübbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.

- [23] A. G. Ramm and A. I. Katsevich, *The Radon transform and local tomography*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [24] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, second ed., Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980.
- [25] A. Tarantola, *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005.
- [26] C. R. Vogel, *Computational methods for inverse problems*, Frontiers in Applied Mathematics, vol. 23, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002, With a foreword by H. T. Banks.
- [27] J. P. Zubelli, *An introduction to inverse problems. Examples, methods and questions*, 22° Colóquio Brasileiro de Matemática., (IMPA), Rio de Janeiro, 1999, Appendix A by the author and Luis Orlando Castellano Pérez.