V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

O Software Maxima e suas aplicações

L. C. R. Goulart * S. L. de Oliveira †

1 Introdução

O Maxima [1]é um software livre para cálculos matemáticos, semelhante ao MatLab e ao Mathematica. É um software CAS (Computer Algebra System - Sistema de Computação Algébrica) para manipulação de expressões simbólicas e numéricas, incluindo limites, diferenciação e integração, matrizes, funções dentre outras, trabalhando seus dados em duas ou três dimensões.

MAXIMA é um descendente de Macsyma, o sistema legendário de álgebra do computador desenvolvido nos anos de 1960 no Instituto de Tecnologia de Massachusetts. É o único sistema baseado em Macsyma ainda publicamente disponível e com uma comunidade de usuários ativa. A filial do MAXIMA de Macsyma foi mantida por William Schelter. Em 1998 obteve a permissão liberar o código fonte sob a GNU General Public License (GPL). Desde então um grupo dos usuários e de colaboradores deu forma para trazer o MAXIMA a uma maior audiência. Assim sendo o MAXIMA é considerado um software livre, podendo então ser usado sem necessidade de registro e pagamento, isto é, um software gratuito. Um dos poucos nessa área

O Maxima pode ser compilado em muitos sistemas, incluindo Windows, Linux, e MacOS X estando disponível no GNU General Public License. O download do software pode ser feito pelo link `http://ufpr.dl.sourceforge.net/sourceforge/maxima/maxima-5.11.0.exe`

2 Página Inicial

Ao abrirmos o programa temos a janela:

*Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia , DEBI, BA, Brasil, lauragou@gmail.com
†Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia , DEBI, BA, Brasil, oliveira@uesb.edu.br
[1]Site Oficial do Maxima: `http://maxima.sourceforge.net`

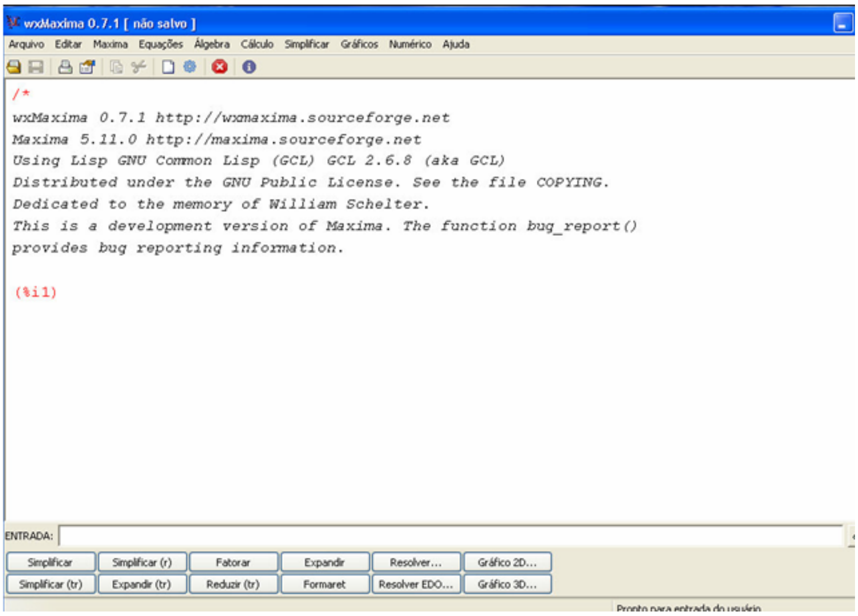


Figura 1: Página Inicial

A parte acima do %i1 o usuário pode desconsiderar, pois se tratam de informações sobre o programa. O %i1 representa a posição na memória de cada operação a ser realizada. Para recomeçar a memória basta acessar (Maxima - Iniciar Programa). Você sempre digitará a operação na caixa ENTRADA, ela aparecerá na frente de (%i1) esse 'i' no meio significa INPUT, ou seja, indica entrada de informações. Já a saída do programa será representada por (%o1), sendo o 'o' de OUTPUT. Depois de digitada a operação, para indicar ao programa que a expressão já pode ser resolvida é necessário digitar um '; '(ponto e vírgula) no fim da expressão ou teclar enter.

3 Operações Básicas

As operações básicas são facilmente representadas por:

- Adição (+)
- Subtração (-)
- Multiplicação (∗)
- Divisão (/)
- Potenciação(ˆ)

Exemplo 3.1.

```
(%i1) 3 + 5; (INPUT - representada em azul no MAXIMA).
(%o1) 8 (OUTPUT - representada em preto no MAXIMA).

(%i2) 7 - 5;
(%o2) 2

(%i3) 3 * 5;
(%o3) 15
```

```
(%i4) 8/4;
(%o4) 2

(%i5) 3^2;
(%o5) 9

(%i6) 3*5+2^2-1;
(%o6) 18
```

4 Principais Comandos

Existem algumas constantes importantes predefinidas em Maxima. Os seus nomes começam sempre por %.

Número π	%pi	`(%i1) %pi,numer; ou (%i1) float(%pi);`
		`(%o1) 3.141592653589793`
Número e	%e	`(%i2) %e,numer;`
		`(%o2) 2.718281828459045`
Número Imaginário $i = \sqrt{-1}$	%i	`(%i3) %i*%i; ou (%i4) (%i)*(%i);`
		`(%o3) -1 (%o4) -1`

Tabela 1: Principais Constantes

O comando **float**[2] é utilizado para resolver a expressão:

Exemplo 4.1. `(%i1) float(log(%e));`

```
(%o18) 1.0

(%i2) float cos(%pi);
(%o2) -1

(%i3) float(cos(%pi));
(%o3) -1.0
```

4.1 Outros Comandos

Comando	Descrição
>	Estritamente maior
>=	Maior ou igual
<	Estritamente menor
<=	Menor ou igual
=	Igual
#	Negação de igualdade
:	Para atribuir valores a variáveis

Tabela 2: Comandos Relacionais

[2]Para o mesmo propósito também podemos utilizar o comando **x, numer**.

Exemplo 4.2.

```
(%i1) x:2;
(%o1) 2;

(%i2) y:3;
(%o2) 3

(%i3) x+3
(%o3) 5

(%i4) x^2-y
(%o4) 1
```

Observação 4.1. *Um comando bastante utilizado é o % que quando aparece sozinho, representa o último resultado apresentado.*

Exemplo 4.3.

```
(%i3) %+3;
(%o3) 4
```

5 Expressões Algébricas

Exemplo 5.1.

```
(%i1) a^2-2*a*b+b^2;
(%o1)  a2 -2ab+b2 (clicar em fatorar)

(%i2) factor(%);
(%o2) (b-a)2

(%i3) 2*x^3+x^2-2*x-1;
(%o3) 2x3+x2-2x-1 (clicar em fatorar)

(%i4) factor(%);
(%o4) (x-1).(x+1).(2x+1)

(%i5) (x^3+x^2-5*x+3)/(x^2-2*x+1);
(%o5)  (clicar em simplificar)

(%i6) ratsimp(%);
(%o6) x+3

(%i7) (x+3)*(x-2);
(%o7) (x-2).(x+3) (clicar em expandir)

(%i8) expand(%);
(%o8) x2+x-6
```

```
(%i9) (x+y)^2;
(%o9) (y+x)

(%i10) expand(%);
(%o20) y2+2xy+x2
```

6 Funções no Maxima

Para definir uma função no MAXIMA, é muito parecido com o modo usual de se escrever, acrescentando: ao sinal de =

Exemplo 6.1.

```
(%i1) f(x,y,z) := x * y + 2 * z;
(%o1) f(x,y,z) := x y + 2 z

(%i2) f(1,2,3);
(%o2) 8

(%i3) g(x,y,z) := x*y^2 + z;
(%o3) g(x,y,z):=x y2 + z

(%i4) g(1,2,3);
(%o4) 7
```

Tabela 3: Principais Funções

Cosseno de x, cosseno hiperbólico de x	$\cos(x), \cosh(x)$
Seno de x, seno hiperbólico de x	$\sin(x), \sinh(x)$
Tangente de x, tangente hiperbólico de x	$\tan(x), \tanh(x)$
Arco-seno de x	asin(x)
Arco-cosseno de x	acos(x)
Raiz quadrada de x	sqrt(x)
Fatorial de x	x!
Logaritmo natural de x	$\log(x)$
Exponencial de x	$\exp(x)$

Observação 6.1. *As funções trigonométricas, no MAXIMA, supõem que os ângulos estejam representados em radianos.*

O MAXIMA não possui uma função interna para o logaritmo de outra base, assim é útil a definição de transformar o logaritmo para a base e. Como sugestão de função para calculo de log em outras bases temos o seguinte exemplo:

Exemplo 6.2. `(%i21)logb(a):=logb/loga`

(%o21)$log(a) := \dfrac{logb}{loga}$

O MAXIMA tenta tornar os resultados mais exatos possíveis, porém em alguns casos isso não é possível, pois o resultado é um tipo flutuante, como por exemplo:

```
(%i1) log(10);
(%o1) log(10)
```

Porém se mesmo assim você deseja saber esse valor, basta você forçar o MAXIMA a retornar um ponto flutuante, assim:

```
(%i1) float (log (10));
(%o1) 2.302585092994046
```

Exemplo 6.3. `(%i1) (2*sqrt(5)+3/2)^2`

(%o1) $(2\sqrt(5) + 3/2)^2$

```
(%i2) cos(%pi)
(%o2) -1
(%i3) sqrt(-1)
(%o3) %i
(%i4) exp(1)
(%o4) %e
```

Observação 6.2. *A função trigexpand serve para expandir senos ou co-senos de somas ou diferenças de ângulos.*

Exemplo 6.4.

```
(%i1)  sin(u+v);
(%o1) sin(v+u)

(%i2) trigexpand(%);
(%o2) cos(u)*sin(v)+sin(u)*cos(v)
```

7 Salvar documento

Se, após a realização de operações na interface do wxMáxima, pretendemos voltar a utilizar o trabalho, devemos seguir os seguintes passos:

- Arquivo;
- Salvar como;
- Escolher o diretório;
- Salvar.

8 Números Decimais

Muitas vezes, os resultados e os cálculos efetuados necessitam de serem expressos com um determinado número de casas decimais e/ou algarismos significativos. Podemos estabelecer essa precisão mediante a fixação de um valor à variável interna global **fpprec** (float para precisão, que por defeito no Máxima é 16) ou através do menu **Numérico** do WxMaxima; na opção "Ajustar Precisão".

Exemplo 8.1. *Calcule o valor de e, π com 20 casas decimais.*

```
(%i1)float(%e);
(%o1) 2.718281828459045

(%i2) float(%pi);
(%o2) 3.141592653589793

(%i3) fpprec : 20;
(%o3) 20

(%i4) bfloat(%e)
(%o4) 2.7182818284590452354b0
```

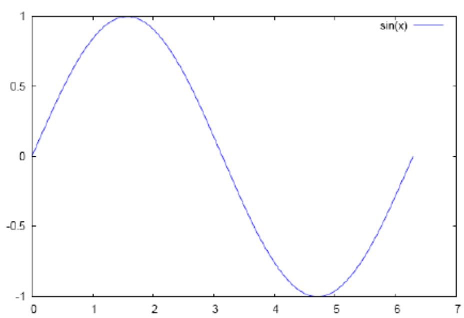
9 Gráficos

9.1 Gráficos em 2D

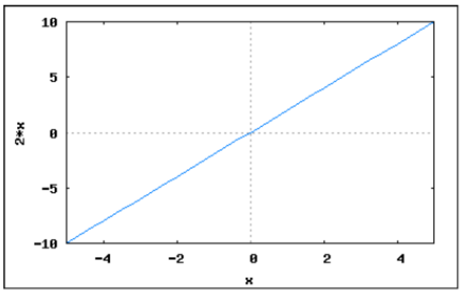
Os gráficos gerados pelo MAXIMA aparecem em um programa anexo ao MAXIMA o gnuplot graph. A função mais conhecida para traçar gráficos em duas dimensões é a 'plot2d', que deve ser implementada da seguinte forma:

plot2d(função, [eixo,início,final])

Exemplo 9.1. `(%i1) plot2d(sin(x),[x,0,2*%pi]))`



Exemplo 9.2. `(%i2) (2*x,[x,0,2*%pi]))`

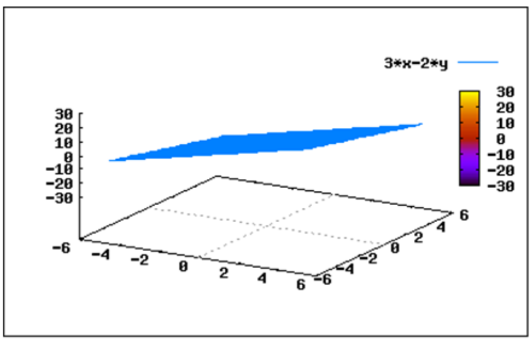


9.2 Gráficos em 3D

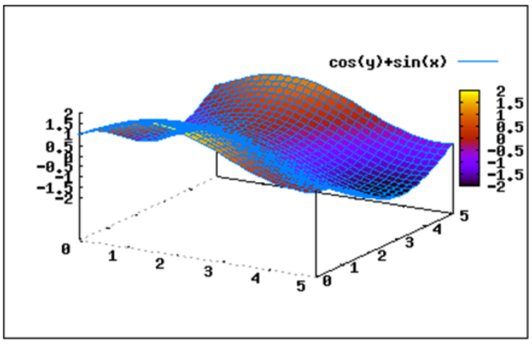
Para implementação de gráficos em três dimensões a função a ser usada é a plot3d, que se assemelha muito com a plot2d. O programa gerador de gráficos, o gnuplot, permite que em gráficos de três dimensões, possa ser feito o manuseamento do gráfico gerado de acordo com o usuário, bastando apenas clicar em cima do gráfico e girá-lo ao seu gosto. Você pode também remanejar a escala de acordo com seu gosto bastando apenas clicar com o botão 3 do mouse, isto é, o do meio.

plot3d(função,[eixo1,início1,fim1],[eixo2,início2, fim2])

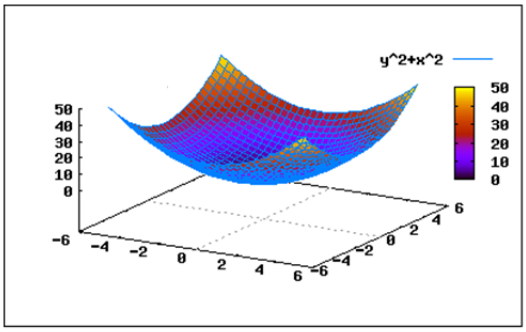
Exemplo 9.3. `(%i1) plot3d(3*x-2*y,[x,-5,5],[y,-5,5])`



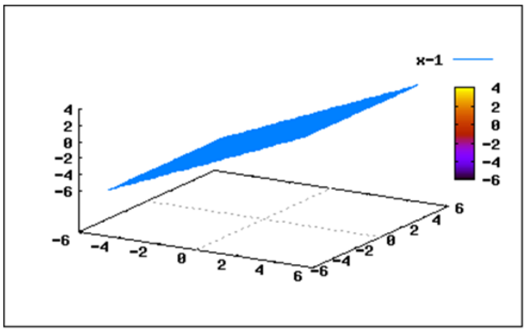
Exemplo 9.4. `(%i1) plot3d(sin(x)+cos(y), [x, -10,10], [y, 0,10])`



Exemplo 9.5. (%oil)plot3d(x^2+y^2, [x,-5,5], [y,-5,5])



Exemplo 9.6. (%il)plot3d(x-1,[x,-5,5],[y,-5,5]



Observação 9.1. *Você poderá girar o gráfico com o mouse.*

10 Matrizes

A introdução de uma matriz no Maxima pode ser feita da seguinte forma:

Seja a matriz A_{mxn} então o comando será **Matrix([vetor da 1ª linha],[vetor da 2ª linha],...,[vetor da nésima linha]**).

Trabalhando com matrizes	**Comandos**
Definir matrizes	A: matrix([1,2],[1,3])
	B:matrix([-1,2],[1,4])
Soma ou diferença de matrizes	A+B, A-B
Produto de matrizes	A ∗ B
Matriz inversa	invert(A)
Matriz transposta	transpose(A)
Determinante de uma matriz	determinant(A)

Exemplo 10.1. `(%i1) A: matrix([1,2,3],[-4,5,1],[1,1,-1]);`

$$(\%o1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.2. `(%i2) B: matrix([0,1,5],[-4,3,0],[0,5,-2]);`

$$(\%o2) \begin{pmatrix} 0 & 15 & \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.3. `(%i3) A+B;`

$$(\%o3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -8 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.4. `(%i4) A-B;`

$$(\%o4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.5. `(%i5) A*B;`

$$(\%o5) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 15 \\ 16 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.6. `(%i6) invert(A)`

$$(\%o6) \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{5}{39} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{39} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{39} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.7. `(%i7) transpose(A);`

$$(\%o7) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 10.8. `(%i8) determinant(A);`

(%o8) -39

11 Equações

No MAXIMA as equações definem-se através do operador "=". Para aceder ao primeiro e ao segundo membro utilizam-se, respectivamente, os comandos "lhs"e "rhs"(que podemos traduzir como lado esquerdo e lado direito).

Exemplo 11.1. *Defina a equação e aceda ao primeiro e ao segundo membro da mesma.*

```
(\%i1)eq:x^3+4=(6+x^2)/x;
```

(%o1) $x^3 + 4 = \dfrac{6 + x^2}{x}$

```
(%i2)lhs(eq);
```

(%o2) $x^3 + 4$

```
(%i3)rhs(eq);
```

(%o3) $\dfrac{6 + x^2}{x}$

Podemos somar e multiplicar expressões a ambos os membros de uma equação.

Exemplo 11.2. `(x/4)*eq;`

$$\frac{x(x^3+4)}{4} = \frac{x^2+6}{4}$$

Exemplo 11.3. `(%i5)expand(%)`

$\frac{x^4}{4} + x = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}$

Observação 11.1. *A equação já vem simplificada .*

Para resolver equação, basta utilizar a função **'solve'**.

Exemplo 11.4. *Resolva* $3x^2 - 6x - 9 = 0$

```
(%i1) solve (3*x^2-6*x-9=0);
(%o1) [x = 3, x = - 1]
```

12 Sistemas Lineares

Se o número de equações for igual ao número de incógnitas, a função'solve' pode resolver o sistema

Exemplo 12.1. $\begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 8 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$

```
(%i1) solve([x+y+4*z=0, y-z+2*x=8, z+3*x-2*y=4]);
(%o1) [[z=-18/17,y=26/17,x=46/17]]
```

Exemplo 12.2. $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-2y=4 \end{cases}$

```
(%i2) solve([x+2*y=8,x-2*y=4]);
(%o2) [[y=1,x=6]]
```

13 Limites

Para calcular o limite de uma função usamos o comando **limit**. Se o limite for à esquerda usando no final da expressão o comando **plus** e à direita o comando **minus**.

Exemplo 13.1. *Calcule o limite da função* $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ *no ponto x=3.*

```
(%il) limit((x^2-x-6)/(x-3),x,3);
(%ol) 5
```

Exemplo 13.2. *Calcule o* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

```
(%i1) limit((sqrt(x+3)-2)/(x-1),x,1);
(%ol) 1/4
```

Exemplo 13.3. *Calcule o limite à esquerda e à direita da função* $\frac{1}{x}$ *no ponto x=0.*

```
(%il) limit(1/x,x,0,plus);
```

(%ol)$+\infty$

```
(%i2) limit(1/x,x,0,minus);
```

(%o2) $-\infty$

Observação 13.1. *Se a expressão de saída for* **ind** *ou* **und**, *significa que o limite calculado é indefinido.*

Exemplo 13.4.

```
(%i3) limit((x^2-x+6)/(x-3),x,3);
(%o3) und
```

14 Derivada

Para calcular a derivada de uma função, usa-se o comando **diff**.

Exemplo 14.1. *Calcule a derivada da função* $f(x) = x^n$

```
(%i1) diff(x^n, x);
```

(%o1) nx^{n-1}

Exemplo 14.2. *Calcule a derivada da função* $f(x) = senx$.

```
(%i1) diff(sin(x),x);
(%o1) cos(x)
```

Exemplo 14.3. *Calcule a derivada da função* $f(x) = x^2 senx$ *(regra do produto)*

```
(%i1) diff(x^2*sin(x),x,1);
(%o1) 2xsin(x)+x2cos(x)
```

Exemplo 14.4. *Calcule a derivada da função* $f(x) = \frac{e^x}{tg(x)}$ *(regra do quociente)*

(%o1) $\frac{e^x log(e)}{tan(x)} - \frac{e^x sec(x)}{tan(x)^2}$

Exemplo 14.5. *Calcule a derivada da função* $f(x) = arctg(x)$.

(%o1) $\frac{1}{x^2+1}$

14.1 Regra da cadeia

Exemplo 14.6. *Calcule a derivada da função* $f(x) = \sqrt{x^3 - 2}$

```
(%i30)diff(sqrt(x^3-2),x);
```

(%o30) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}$

Exemplo 14.7. *Calcule a derivada da função* $f(x) = atan(2x)$.

```
(%i14)diff(atan(2*x),x,1);
```

(%o14) $\frac{2}{4x^2+1}$

14.2 Derivadas sucessivas

Basta indicar a ordem da derivada da seguinte forma `diff(f(x),x,2)`, nesse caso indica $f''(x)$.

Exemplo 14.8. *Calcular* $f''(x)$ *da função* $f(x) = x^3$.

```
(%i1) diff(x^3,x,2);
(%o1) 6x
```

14.3 Derivadas parciais

Escrevemos uma lista de variáveis de derivação, seguida cada uma da sua ordem (nesse caso não pode ser omitida a ordem de derivação).

Exemplo 14.9. *Calcule a derivada* $f_x f_y$ *ou* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y \partial x}$ *da função* $f(x) = x^3y^2$.

```
(%i1) diff(x^3*y^2,x,1,y,1);
```

(%o1) $6x^2y$

15 Integrais

Para calcular a derivada de uma função, usa-se o comando **integrate**.

15.1 Integral indefinida

O comando **integrate** não apresenta a constante de integração. Desta forma, a primitiva da função é a que está indicada a menos da soma de uma constante arbitrária.

Exemplo 15.1. *Calcular a integral da função* $f(x) = x^2$.

```
(%i1) integrate(x^2,x);
```

(%o1) $x^3/3$

Exemplo 15.2. *Calcule a integral da função* $f(x) = sen^2x.cosx$. *(Mudança de Variáveis)*

```
(%i1)  f(x):=sin(x)^2 * cos(x);
```

(%o1) $f(x) := sin(x)^2cos(x)$

```
(%i2)  Intg:integrate (f(x), x);
```

(%o2)$sin(x)^3/3$

15.2 Integral definida

O cálculo de uma integral definida em um intervalo é feito pelo comando **integrate(expressão, variável, limite inferior, limite superior)**.

Exemplo 15.3. *Calcule a integral* $\int_{-1}^{2} x(1+x^2)dx$.

```
(%i27)f(x):=(x*(1+x^2));
```

(%o27)$f(x) := x(1+x^2)$

```
(%i28)Intg:integrate(f(x),x,-1,2);
```

(%o28)$\frac{21}{4}$

Exemplo 15.4. *Calcule a integral* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x)dx$.

```
(%i29) f(x):=sin(x)^2;
```

(%o29)$f(x) := sin(x)^2$

```
(%i31)integrate(f(x),x,0,%pi/2);
```

(%o31)$\frac{\%pi}{4}$