UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
PIBID-UFBA
SUBPROJETO DE MATEMÁTICA

THAIS DE BARROS SILVANY DE ANDRADE
FELIPE CARLO DE FREITAS PINTO
MARIANA SILVA TAVARES

ORIENTADORA: PROFª ELIANA PRATES SOARES – UFBA

Salvador
2010

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática

Pibid – UFBa. Subprojeto em Matemática

Aplicações do Software GeoGebra para o Ensino Médio

Prezado Cursista,

Essa nossa oficina tem como objetivos:

1) Mostrar a professores de matemática, ou futuros professores, como é possível usar o software GeoGebra para elaboração de aulas práticas em laboratório de informática ou aulas teóricas usando recursos de multimídia.

2)Apresentar a estudantes do ensino médio um bom software livre e como este pode ser utilizado como recurso auxiliar nos seus estudos de matemática.

Sobre o software

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. O GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

O software é facilmente encontrado em sites na Internet, disponível para download, como, por exemplo, em http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm ou http://www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra/geogebra.overview

Aplicações para o estudo de funções afins com o software GeoGebra.

Funções afins

Uma função f de R em R tal que f(x) = ax + b, com a e b números reais, é o que chamamos de função afim.

Exemplo: Fazendo a = 2 e b = 3, obtemos a função afim   f(x) = 2x +3.

Para esta função, vamos representar no GeoGebra o ponto do seu gráfico A = (4, 11). Digite A= (4, 11) em **Entrada** e tecle **Enter**. Observe a representação do ponto A e suas coordenadas na tela à esquerda. Represente mais um ponto, B, do gráfico.

Como o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta, então para representá-lo basta desenhar dois dos seus pontos e traçar a reta pelos pontos.

Com o GeoGebra podemos desenhar figuras geométricas. Vamos desenhar a reta que passa pelos pontos A e B, ou seja o gráfico da função.

Clique na ferramenta , **Reta Definida por 2 Pontos**. Clique no ponto A e em seguida no ponto B.

Clique em **Arquivo, Novo**, Não salve o arquivo.

Podemos representar o gráfico de uma função usando outro recurso do GeoGebra.

Para a função f(x) = 2x +3, digite f(x) = 2x + 3 em **Entrada** e tecle **Enter.**

Com o GeoGebra podemos calcular raízes de funções. Para a função f(x) = 2x+3, Digite **raiz[f]** em **Entrada** e tecle **Enter.**

Observe a representação do ponto A no gráfico e suas coordenadas na tela, à esquerda.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Com o GeoGebra podemos ilustrar facilmente as propriedades das funções como, por exemplo, as que se referem aos coeficientes angular e linear de uma função afim.

Considere as funções afins

$f1(x) = x + 2$; $f2(x) = 2x + 2$; $f3(x) = -3x + 2$; $f4(x) = -5x + 2$;

que possuem o mesmo coeficiente linear $b = 2$. Ao representá-las ao mesmo tempo podemos comparar seus gráficos.

Digite **a =1** em **Entrada** e tecle **Enter.**

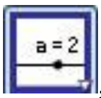
Digite f(x) = a*x +2 em **Entrada** tecle **Enter**. Você terá o gráfico de $f(x) = x +2$.

Clique com o botão direito do mouse no gráfico da função e em seguida com o botão esquerdo em **habilitar rastro**. Em **Entrada** digite **a** =2 e tecle **Enter**. Você terá o gráfico de $f(x) = 2x +2$. Analogamente entre com cada um dos valores $a = -3$, $a = -5$

Podemos trabalhar de modo análogo mantendo o coeficiente linear e variando o angular

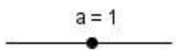
Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo

Vamos obter uma animação dos gráficos das funções $f(x) = ax + 2$ da seguinte forma:

Clique na ferramenta 

, **Seletor**, e em seguida num ponto da tela (no lado direito da tela). Vai aparecer uma pequena janela. Nesta janela faça min igual a -20 e max igual a 20. Clique em **Animação, Oscilando, Crescente, Aplicar**.

Digite f(x) = a*x + 2 em **Entrada** e tecle **Enter.**

Clique, com o botão direito do mouse, na figura 

e em seguida em **Animação Ativada**.

Com essa animação o GeoGebra apresenta os gráficos das funções $f(x) = ax + 2$.

Funções quadráticas

Uma função f de R em R, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é o que chamamos de função quadrática.

Vamos representar no GeoGebra a função $f(x) = x^2 - 3x +1$ e calcular suas raízes e seu vértice.

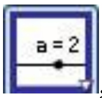
Digite a equação f(x) = x^2-3x +1 no campo **Entrada** e tecle **Enter**.

Para obter as raízes digite **raiz[f]** no campo **Entrada** e tecle **Enter**.

Para obter o vértice da parábola digite **extremo[f]** no campo **Entrada** e tecle **Enter**.

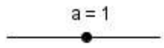
Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo

Vamos observar a concavidade da parábola variando o coeficiente de x^2

Clique na ferramenta 

, e em seguida num ponto da tela. Em seguida faça min igual a -20 e max igual a 20.

Digite f(x) = a*x^2 + 2x + 1 em **Entrada** e tecle **Enter**

Com o botão direito do mouse clique e arraste o ponto da figura 

. Dessa forma você irá variar valores de a e obter os gráficos correspondentes (bastante ilustrativo para exposição em sala de aula)

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Veremos um exemplo de uma aplicação de funções quadráticas

Uma bala é atirada de um canhão de brinquedo e descreve a curva $y = -3x^2 + 6x$, onde x e y são medidos em metro.

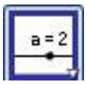
a) Represente a curva usando o GeoGebra.

b) Complete: A altura máxima que a bala alcançou foi de ....

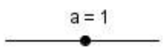
c) Complete: O alcance do disparo foi de ....

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo

Vamos dar movimento à bala de canhão do Exercício anterior

Clique na ferramenta 

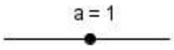
e em seguida num ponto da tela. Na nova tela faça min igual a 0 e max igual a 2. Clique em **Animação**, **Oscilando**, **Crescente**, **Aplicar**.

Use o botão direito do mouse para arrastar o ponto da figura 

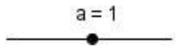
. e fazer a=0.

Digite (a, -3a^2+6a) em **Entrada** e tecle **Enter.**

Com o botão direito do mouse clique no novo ponto A e marque habilitar rastro.

Pronto, **vamos ver a bala se deslocar:** Clique, com o botão direito do mouse, na figura 

e em seguida em **Animação Ativada**.

Para parar a animação clique, com o botão direito do mouse, na figura 

e em seguida em **Animação Ativada**.

Para apagar o rastro, Com o botão direito do mouse clique no ponto A e marque **habilitar rastro**.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo

Aplicações para o estudo de funções exponenciais com o software GeoGebra.

Função Exponencial:

Uma função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, definida de R em R. é o que chamamos de função exponencial de base a.

Exemplo: Fazendo a = 2, obtemos a função exponencial $f(x) = 2^x$.

Fazendo $a = \frac{1}{2}$, obtemos a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Vamos agora examinar o comportamento da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, dividindo em 2 casos.

1º caso: a > 1.

Para este caso, vamos considerar inicialmente a função $f(x) = 2^x$.

Representemos no plano cartesiano pontos da forma $(n,2^n)$, ou seja, pontos do gráfico dessa função, usando o GeoGebra.

Para o ponto $(1,2^1)$, digite n=1 em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite (n,2^n) em **Entrada** e tecle **Enter.**

Para outros pontos, clique com o botão direito do mouse no ponto A e selecione **Habilitar Rastro.**

Para o ponto $(2,2^2)$, digite n=2 em **Entrada** e tecle **Enter.**

Repita o procedimento para os seguintes valores de n: -2, ½, -1, 0.

Agora vamos representar o gráfico da função: Digite f(x)=2^x em **Entrada** e tecle **Enter.**

Observe que quanto maior o expoente x, maior é a potência 2^x ou seja, a função $f(x) = 2^x$ *é crescente.*

Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OX. Para ver isto, clique na pequena seta da ferramenta  **Deslocar Eixos** e em seguida em  **Ampliar**. Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Vamos representar gráficos de outras funções $f(x) = a^x$, *com* $a > 1$.
*D*igite a =3 em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite $f(x) = a$^x em **Entrada** e tecle **Enter.**
Para outras funções, clique com o botão direito do mouse no gráfico que está na tela e selecione **Habilitar Rastro, e atribuir novos valores maiores do que 1 a** ***a*****.** Por exemplo, para $f(x) = (3/2)^x$, digite a=3/2 em **Entrada** e tecle **Enter.**
Atribua outros valores maiores 1 para a.

Tem-se que se a >1, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente. O eixo OX é uma assíntota do seu gráfico e o gráfico não corta esse eixo.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

2º caso: 0 < a < 1.

Para este caso, vamos considerar inicialmente a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Represente no plano cartesiano pontos da forma (n,(1/2)^n), ou seja, pontos do gráfico dessa função, usando o GeoGebra, atribuindo valores a n.
Represente o gráfico da função: Digite f(x) = (1/2)^x em **Entrada** e clique **Enter** no teclado**.**

Temos que quanto maior o expoente x, menor é a potência $(1/2)^x$, ou seja, a função $f(x) = (1/2)^x$ *é decrescente.*

Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OX.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Vamos representar gráficos de outras funções $f(x) = a^x$, *com* $0 < a < 1$.

*D*igite *a* =1/3 em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite *f(x) = a^x* em **Entrada** e tecle **Enter.**

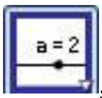
Para outras funções, clique com o botão direito do mouse no gráfico que está na tela e selecione **Habilitar Rastro, e atribuir novos valores menores do que 1 a** ***a*****.** Por exemplo, para $f(x) = (1/5)^x$, digite *a*=1/5 em **Entrada** e tecle **Enter.**

Atribua outros valores para *a*.

Tem-se que se 0< a <1, a função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente. O eixo OX é uma assíntota do seu gráfico e o gráfico não corta esse eixo.

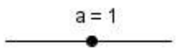
Vamos obter uma animação dos gráficos das funções $f(x) = a^x$ da seguinte forma:

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo

Clique na ferramenta 

, Seletor, e em seguida num ponto da tela (no lado direito da tela). Vai aparecer uma pequena janela. Nesta janela faça min igual a 0.25 e max igual a 4. Clique em **Animação, Oscilando, Crescente, Aplicar**.

Digite *f(x) = a^x* em **Entrada** e clique **Enter** no teclado

Clique, com o botão direito do mouse, na figura 

e em seguida em Animação Ativada.

Com essa animação o Geogebra apresenta os gráficos das funções $f(x) = a^x$.

Exercícios de Funções Exponenciais

1. A produção de uma indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano ela diminuiu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei $y = 1000 . (9/10)^x$.

a) Represente o gráfico desta função no geogebra. Esta função é crescente ou decrescente?

b) Qual o número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo?

Resolução:

a) Para representar o gráfico da função $f(x) = 1000 \cdot (9/10)^x$ com o Geogebra, basta digitar f(x) = 1000*(9/10)^x em **Entrada** e clique **Enter** no teclado.

Observe que, como $0 < 9/10 = 0{,}9 < 1$, a função $f(x) = 1000 \cdot (9/10)^x$ é decrescente.

b) Para descobrir o número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo, precisamos substituir este valor em x.

Logo, temos:

$f(x) = 1000 \cdot (9/10)^x \Longrightarrow f(2) = 1000 \cdot (9/10)^2 \Longrightarrow f(2) = 1000 \cdot (81/100) \Longrightarrow$

f(2) = 810 unidades produzidas.

2. Um datilográfo, após **x** dias de experiência consegue datilografar uma quantidades de palavras por minuto de acordo com a função: $f(x) = 60 - 55.\ e^{-x/10}$. (OBS: e = 2,72)

a) Represente o gráfico desta função no geogebra. Esta função é crescente ou decrescente?

b) Observando o gráfico, o que podemos dizer com respeito ao datilógrafo?

c) Quantas palavras ele datilografava por minuto, quando não tinha experiência?

Resolução:

a) Para representar o gráfico da função $f(x) = 60 - 55.\ e^{-x/10}$ com o Geogebra, basta digitar f(x) = 60 – 55*e^(-x/10) em **Entrada** e clique **Enter** no teclado.

Observe que, como $e = 2{,}72 > 1$, a função $f(x) = 60 - 55.\ e^{-x/10}$ é crescente.

b) Podemos verificar que, com o passar dos dias, o datilógrafo vai aumentar a quantidade de palavras por minuto datilografadas, porém isso acontecerá até o dia que ele alcançar a quantidade máxima, pois o gráfico, a partir deste dia, é constante.

c) Quando o datilógrafo apresentou-se em seu local de trabalho pela primeira vez, ele não tinha experiência pois não havia trabalhado nem um dia ainda. Portanto a variável **x** que representa o número de dias trabalhado valia zero.

Logo, devemos substituir x pelo valor zero na função.

$f(x) = 60 - 55.\ e^{-x/10} \Longrightarrow f(x) = 60 - 55.\ e^{-0/10} \Longrightarrow f(x) = 60 - 55.\ (1) \Longrightarrow$

f(x) = 5 palavras por minuto.

Aplicações para o estudo de funções logarítmicas com o software GeoGebra

Para começarmos a falar da função logarítmica, vamos revisar a definição de logaritmo:

Dizemos que o logaritmo de um número positivo x, na base a, positiva e diferente de 1, é o expoente y ao qual se deve elevar a para se obter x.

$$\boxed{log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \text{, com } x > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1}$$

Função Logarítmica:

Uma função f(x) = $\log_a x$*, com a > 0 e a ≠ 1, definida de* R_+^* *em R. é o que chamamos de função logarítmica de base a.*

Exemplo: Fazendo a = 2, obtemos a função logarítmica f(x) = $\log_2 x$

Fazendo a = $\frac{1}{2}$ *, obtemos a função logarítmica f(x) =* $\log_{\frac{1}{2}} x$.

Vamos agora examinar o comportamento da função logarítmica. Temos dois casos:

1º caso: a > 1.

Para este caso, vamos considerar a função *f(x)* = $\log_{10} x$.

Representemos no plano cartesiano pontos da forma (n,lg(n)), ou seja, pontos do gráfico dessa função, usando o GEOGEBRA.

Para o ponto (1, $\log_{10} 1$), digite n=1 em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite (n,lg(n)) em **Entrada** e tecle **Enter.**

Para outros pontos, clique com o botão direito do mouse no ponto A e selecione **Habilitar Rastro.**

Para o ponto (10, $\log_{10}(10)$), digite n=10 em **Entrada** e tecle **Enter.**

Repita o procedimento para os seguintes valores de n: 1/10, 1/100, 3, 6.

Agora vamos representar o gráfico da função: Digite f(x)=lg(x) em **Entrada** e tecle **Enter.**

Observe que quanto maior o valor de x, maior é o valor $log_{10} x$ ou seja, a função $f(x) = log_{10} x$ *é crescente.*

Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OY. Para ver isto, clique na pequena seta da ferramenta  **Deslocar Eixos** e em seguida em  **Ampliar**. Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Vamos representar gráficos de outras funções $f(x) = log_a x$ *, com a >1.*

Como o Geogebra não possui ferramenta própria para esboçar funções logarítmicas em outras bases, usaremos a fórmula da mudança de base $log_a x = \dfrac{log_{10} x}{log_{10} a}$

Para a função $f(x) = log_2 x$, em **Entrada** digite a = 2 e tecle **Enter**. Em **Entrada** digite f(x) = lg(x)/lg(a) e tecle **Enter.**

Para outras funções, clique com o botão direito do mouse no gráfico que está na tela e selecione **Habilitar Rastro,** e atribua novos valores maiores do que 1 a ***a*.** Por exemplo, para $f(x)=log_3 x$, digite *a*=3 em **Entrada** e tecle **Enter.**
Atribua outros valores maiores do que 1 para *a*.

Tem-se que se a >1, a função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente. O eixo OY é uma assíntota do seu gráfico e o gráfico não corta esse eixo.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

2º caso: 0 < a < 1.
Para este caso, vamos considerar inicialmente a função $f(x) = log_{1/10} x$.

Represente o gráfico da função: Digite $f(x)=lg(x)/lg(1/10)$ em **Entrada** e tecle **Enter.**

Temos que quanto maior o valor de x, menor é o valor de $log_{1/10}\,x$, ou seja, a função $f(x)=log_{1/10}\,x$ *é decrescente.*

Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OY.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Vamos representar gráficos de outras funções $f(x)=log_a\,x$, *com* $0<a<1$.

*D*igite a =1/3 em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite $f(x)=lg(x)/lg(a)$ em **Entrada** e tecle **Enter.**

Para outras funções, clique com o botão direito do mouse no gráfico que está na tela e selecione **Habilitar Rastro,** e atribua novos valores menores do que 1 a ***a*.** Atribua outros valores para *a*.

Tem-se que se 0< a <1, a função logaritmica $f(x)=log_a\,x$ é decrescente. O eixo OY é uma assíntota do seu gráfico e o gráfico não corta esse eixo.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Tem-se que fixando a, com $a > 0$ *e* $a \neq 1$, a função logarítmica
$f(x)= log_a\,x$ é a inversa da função exponencial $g(x)= a^x$ e que, portanto o gráfico da função f é simétrico ao gráfico da função *g em relação à reta* $y = x$. Ilustraremos essa propriedade usando o Geogebra:

*D*igite a =3 em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite $f(x)=lg(x)/lg(a)$ em **Entrada** e tecle **Enter** e digite $g(x)=a\wedge x$ e tecle **Enter**. Digite $y = x$ em **Entrada** e tecle **Enter.**
Observe a simetria entre os dois gráficos.

Atribua outros valores para a >1 e para 0< a <1.

Exercício de Função Logarítmica

1. (Ufscar) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $y = 1{,}5 + \log_2(x + 1)$, com y em metros e x em anos.

a) Represente o gráfico desta função no geogebra. Esta função é crescente ou decrescente?

b) Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, qual o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte?

Resolução:

a) Para representar o gráfico da função $y = 1{,}5 + \log_2(x + 1)$ com o Geogebra, basta digitar y = 1.5 + lg(x + 1)/lg(2) em **Entrada** e clique **Enter** no teclado.

Observe que, como $2 > 1$, a função $y = 1{,}5 + \log_2(x + 1)$ é crescente.

b) Devemos substituir y pelo valor 3,5 na função.

$y = 1{,}5 + \log_2(x + 1) \Longrightarrow 3{,}5 = 1{,}5 + \log_2(x + 1) \Longrightarrow 2 = \log_2(x + 1) \Longrightarrow$

$2^2 = x + 1 \Longrightarrow 4 = x + 1 \Longrightarrow x = 3$. A resposta é 3 anos.

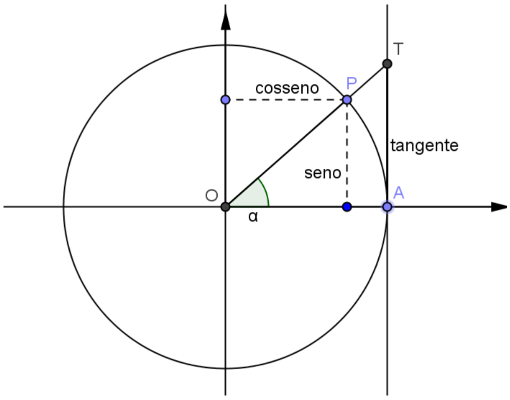
Com o Geogebra podemos também obter esse valor:

Em **Entrada** digite y = 3.5 e tecle **Ent**er, para obter esta reta. Em seguida, clique na seta da ferramenta Novo Ponto  e em seguida em , Interseção de Dois Objetos. Depois clique no gráfico da função e na reta y = 3.5. As coordenadas do ponto A serão apresentados no lado esquerdo da tela, a abscissa de A é o valor procurado.

Aplicações para o estudo de trigonometria com o software GeoGebra

I – O Ciclo trigonométrico.

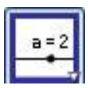
O círculo unitário, com centro na origem do plano cartesiano, é o que chamamos de ciclo trigonométrico.



Dado um ponto P pertencente ao ciclo trigonométrico, sua abscissa é o cosseno do ângulo α formado entre o segmento OP e o eixo OX, bem como sua ordenada é o seno do mesmo ângulo. A tangente do ângulo α é a ordenada do ponto T, obtido como interseção da reta perpendicular ao eixo OX pelo ponto A = (1,0) e a reta OP.

Represente o ciclo trigonométrico no GeoGebra digitando sua equação x^2 + y^2 =1 em **Entrada** e tecle **Enter**. Vamos fixar esse círculo na tela: Clique nele (ou na sua equação, que aparece do lado direito da tela) com o botão direito do mouse. Em seguida em **propriedades** e em **fixar objeto**.

Centralize o desenho usando a ferramenta.  **Deslocar Eixos:** Clique na tela, prenda o botão do mouse e arraste. Depois clique na pequena seta dessa ferramenta, e em  e em seguida clique na tela para ampliá-la.

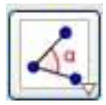
Clique na ferramenta 

e em seguida num ponto da tela. Na nova tela marque **ângulo.** Observe que o novo parâmetro será α. Clique em **Aplicar**.

Arraste o ponto que apareceu, para mudar o valor de α, até que fique aproximadamente 30º.

Vamos construir um ponto P sobre o círculo. Digite P = (cos(α), sin(α)) em **Entrada** e tecle **Enter**. Construa também os pontos auxiliares Q=(cos(α), 0) e R = (0, sin(α)).

Clique na pequena seta da ferramenta  e em seguida em . **Segmento Definido por 2 Pontos**. Vamos construir três segmentos: Clique no ponto P e na origem, clique no ponto P e no ponto Q, clique no ponto P e no ponto R.

Representando o ângulo central: Represente o ponto E = (1,0). Clique na ferramenta  **Ângulo**. Em seguida clique em E, na origem e em P (nesta ordem).

A tela está pronta. Para cada ângulo α, a tela apresenta o valor e a representação geométrica do seu cosseno e seu seno.

Com o botão direito do mouse clique e arraste o ponto da tela 

. Dessa forma você irá variar valores do ângulo α e obter valores de seno e cosseno de α que aparecem na tela do seu lado esquerdo, como coordenadas do ponto P

Use esse sistema para completar os valores (aproximados) da tabela abaixo

Ângulo α	$\cos(\alpha)$	$\mathrm{sen}(\alpha)$
30^o		
45^o		
120^o		

Outro modo de conseguir os valores dos ângulos é dar um clique duplo em α, 

que aparece na tela do seu lado esquerdo, alterar seu valor e teclar **Enter**.

Esconda os segmentos que representam $\mathrm{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ clicando com o botão direito do mouse em cada um deles e em seguida em Exibir Objeto.

Vamos representar a tangente do ângulo α:. Clique em  **Reta Perpendicular,** em seguida no eixo OX e no ponto E=(1,0) . Dessa forma você obterá uma reta que passa por A e é perpendicular a OX. Para obter a reta que passa pela origem e por P, clique em  **Reta Definida por dois Pontos**, Clique na origem e no ponto P. Para obter o ponto T, que é interseção das duas retas, clique na pequena seta da ferramenta  e em seguida em . **Interseção de Dois objetos**. Clique em cada uma das retas e você terá o ponto de interseção delas. Clique com o botão direito do mouse no ponto obtido e renomeie-o como T.

Com o botão direito do mouse clique e arraste o ponto da tela 

. Dessa forma você irá variar valores do ângulo α e obter a representação gráfica da sua tangente cujo valor é igual à ordenada de T, que aparece na tela, do seu lado esquerdo.

Use esse sistema para completar os valores (aproximados) da tabela abaixo

Ângulo α	tan(α)
30º	
45º	
120º	
230 º	

Clique em **Arquivo, Novo**. Não salve o arquivo.

II – Funções trigonométricas.

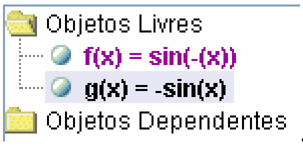
Inicialmente, é necessário que mudemos a apresentação do eixo das abscissas para que sua variação esteja em função do valor de π. Use os comandos:
Na barra de comandos, selecione **"Opções"** e escolha **"Janela de Visualização".**
Escolha "**EixoX**", no campo "**Unidade**", escolha "**π**" , marque o campo "**Distância**", e neste escolha "**π/2**". Clique em "**Fechar**".

Esboce os gráficos das funções abaixo:
f(x) = sen(x) (sen(x) escreve-se como sin(x))
g(x) = cos(x)
h(x) = tan(x)
Apague cada um desses gráficos: Clique com o botão esquerdo do mouse em cada um deles e em seguida clique em Apagar

Vamos verificar as propriedades sen(-x) = -sen(x), cos(-x) = cos(x) e tan(-x)= -tan(x), construindo os gráficos das funções correspondentes.

Para sen(-x) = -sen(x):

Esboce os gráficos das funções f(x) = sen(-x) e g(x) = -sen(x) em cores diferentes. Digite **f(x)=sin(-x)** em **Entrada** tecle "**Enter**". Em seguida clique no gráfico com o botão direito do mouse, clique em **Propriedade**, clique em **Co**r. Escolha uma cor para o gráfico. Faça o mesmo para a função g(x).

Vamos esconder um dos gráficos para observar o outro e constatar que eles são iguais. Para isto clique sobre o círculo que aparece ao lado da função que deseja esconder 

. Para exibi-lo novamente clique outra vez sobre o círculo.

Apague os gráficos da tela.

Repita esse procedimento para os outros casos.

Apague os gráficos da tela.

Vamos explorar os gráficos de funções da forma *f(x) = bsen(x)*, variando a constante **b**.

Digite **b=5** (ou outro valor de sua preferência) em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite **f(x) = b*sin(x)** em **Entrada** e tecle **Enter**. Atribua valores arbitrários para **b** e observe o que acontece:

Os valores máximo e mínimo da função *f(x) = bsen(x)* são respectivamente |**b**| e -|**b**| e o período é **2π**. Apague os gráficos da tela.

Vamos explorar os gráficos de funções da forma *f(x) = sen(bx)*, variando a constante **b**, em uma mesma tela.

Digite **b=2** (ou outro valor de sua preferência). Digite **f(x) = sin(b*x)** em **Entrada** e tecle **Enter.**

Atribua valores arbitrários para **b** e observe o que acontece: Os valores máximo e mínimo da função *f(x) = sen(bx)* são respectivamente **1** e **-1** e o período é **2π/b**.

Vamos agora obter uma animação com as funções *f(x) = sen(bx)*

Para isto clique sobre o círculo que aparece ao lado de b. Vai aparecer na tela a figura . Clique outra vez em b, agora com o botão direito e marque Animação Ativada. Apague os gráficos da tela.

Trabalhe de modo análogo com as funções *cos(bx), bcos(x), tan(bx), btan(x).*

Aplicações para o estudo de funções envolvendo módulo com o software GeoGebra

F***unção Modular***

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, que se indica por | x |, é definido da seguinte *maneira:*

se x é positivo ou zero, | x | é igual ao próprio x.

Exemplos: | 2 | = 2 ; | 1/2 | = 1/2 ; | 15 | = 15

se x é negativo, | x | é igual a -x.

Exemplos: | -2 | = -(-2) = 2 ; | -20 | = -(-20) = 20

Chamamos de função modular à função *f* de R em R definida por *f(x)*= |*x*|

Portanto

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos usar o GeoGebra para representar a função modular. Digite **f(x) = abs(x)** em **Entrada** e tecle **Enter.**

Clique em **Arquivo**, **Novo**. Não salve o arquivo.

Ao compor a função modular com uma função f(x), nesta ordem, obtemos a função g(x) = f(|x|). E ao compor f(x) com a função modular, nesta ordem, obtemos a função h(x) = |f(x)|. Essas funções, g(x) e h(x), guardam relações interessantes com a f(x) que se traduzem como simetrias entre seus gráficos e o gráfico de f(x). Veremos a seguir essas relações.

Funções da forma g(x) = f(|x|).

Sejam a função *f(x)=3x+3 e a função g(x)=3*|*x*|*+3*, que é a composta da função modular com *f(x)*. Represente os gráficos das duas funções em cores diferentes.

Compare os dois gráficos, escondendo alternadamente um deles e visualizando o outro. Para isto clique sobre o círculo que aparece ao lado da função que deseja esconder. Para exibi-lo novamente clique outra vez sobre o círculo.

Observe que g(x) = f(x) se $x \geq 0$ e que g(x) = f(-x) se x <0. Portanto o gráfico de g(x) coincide com o gráfico de f(x) no 1^o e 4^o quadrantes e é uma figura simétrica em relação ao eixo OY.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Trabalhe de forma análoga com os pares de funções

a) $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = |x|^2 + |x| - 2$

b) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{|x|}$

c) $f(x) = \log_2^x$ e $g(x) = \log_2^{|x|}$ (Digite: g(x)= lg(abs(x))/lg(2))

Funções da forma h(x) = |f(x)|

Sejam a função *f(x) = x - 3 e* a função *h(x)*=|*x -3*|, que é a composta da função *f(x)* com a função modular. Represente os gráficos das duas funções em cores diferentes.

Compare os dois gráficos, escondendo alternadamente um deles e visualizando o outro. Para isto clique sobre o círculo que aparece ao lado da função que deseja esconder. Para exibi-lo novamente clique outra vez sobre o círculo.

Observe que h(x) = f(x), se $x \geq 3$. Ou seja, se $y \geq 0$, com y = x – 3. E h(x) = -f(x) se x < 3 ou seja, se y < 0. Portanto considerando y = f(x), o gráfico de h(x) coincide com o gráfico de f(x) na região em que $y \geq 0$. Na região em que y< 0, o gráfico de h(x) é simétrico ao gráfico de f(x) em relação ao eixo OX.

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Trabalhe de forma análoga com os pares de funções

a) $f(x) = x^2 + x - 2$ e $h(x) = | x^2 + x - 2|$

b) $f(x) = 2^x$ e $h(x) = |2^x|$ *(Por que os gráficos coincidem?).*

c) $f(x) = \log_2^x$ e $h(x) = |\log_2^x|$.

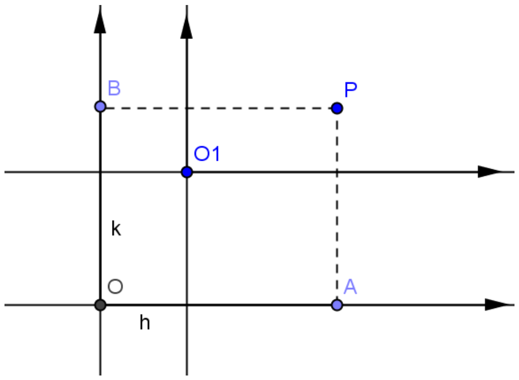
Translação de eixos.

Conhecendo a curva dada pela equação $y = f(x)$, um bom recurso para a construção do gráfico de curvas do tipo $y - k = f(x - h)$ é a translação de eixos.

No plano em que o sistema de eixos xOy está definido, dizemos que ocorreu uma translação de eixos ao tomarmos novos eixos paralelos aos anteriores, com as mesmas orientações,

Consideremos que os eixos dados Ox e Oy foram transladados aos eixos O_1x' e O_1y' com nova origem $O_1 = (h,k)$ em relação aos eixos dados. Seja P um ponto de coordenadas (x, y) em relação aos eixos originais e (x', y') em relação aos novos eixos. Vamos relacionar (x, y) com (x', y').

Temos que:



$OA = x = x' + h \Rightarrow x' = x - h$

$OB = y = y' + k \Rightarrow y' = y - k$

Uma curva de equação $y - k = f(x - h)$ no sistema de eixos xOy terá equação

$y' = f(x')$ no sistema de eixos $x'O_1 y'$

A forma de uma curva não é afetada pela posição dos eixos coordenados, no
entanto sua equação é modificada.

Portanto uma curva de equação $y - k = f(x - h)$ tem a mesma forma que a curva de equação $y = f(x)$. Apenas estará deslocada h unidades para a direita e k unidades para cima em relação à curva $y = f(x)$.

Represente no GeoGeobra as funções: f(x) = |x|, g(x) = |x-2|, h(x) = |x| -3

Observe que todos os gráficos têm a mesma “forma”.E que em relação ao gráfico de f(x), o gráfico de g(x) está duas unidades deslocado para a direita e o gráfico de h(x), 3 unidades para baixo.
Vamos explorar os gráficos de funções da forma $f(x) - k = (x - h)^2$, variando as constantes h e k
Digite **h=0** em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite **k=0** em **Entrada** e tecle **Enter**. Digite **f(x) = (x-** h)^2 + k. Atribua valores arbitrários para **h e k** e observe o que acontece.
Vamos agora obter uma animação com essas funções. Para isto clique no círculo que aparece ao lado de h. Daí vai surgir na tela a figura . Clique outra vez em h, agora com o botão direito e marque Animação Ativada. Faça o mesmo com k

Clique em **Arquivo**, **Novo**, Não salve o arquivo.

Trabalhe de forma análoga com as funções

a) $f(x) = |x - h| + k$
b) $f(x) = 2^{|x-h|} + k$
c) $f(x) = \cos(x-h) + k$