

INVESTIGANDO O CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVES COM O USO DO GEOGEBRA

Evanilson Landim Alves
landime@hotmail.com

Conceição de Lourdes Farias Bandão
clfb_05@hotmail.com

Wagner Willen Cavalcanti Araquam
wagnerwillen@hotmail.com

Resumo: Desde as civilizações egípcias, babilônias e gregas a relação entre as medidas de ângulos e segmentos têm proporcionado a solução de grandes problemas como o cálculo da medida do raio da Terra, a distância relativa do Sol e da Lua e a localização de um navio em alto mar. Estes problemas eram geralmente motivados pela necessidade de calcular distâncias que não podiam ser medidas diretamente, por isso, matemáticos como Tales e Eratóstenes sentiram-se motivados a investigá-los. Diante disso, propomos nesta oficina uma proposta de ensino para cálculos de distâncias inacessíveis e compreensão do conceito de tangente por meio do Geogebra que é um software de geometria dinâmica.

Palavras-chave: Distâncias inacessíveis; Geogebra; Situações didáticas e adidáticas; Resolução de problemas.

1. Introdução

A resolução de problemas que envolvam o cálculo de distâncias inacessíveis, como calcular a altura de uma árvore, a largura de um rio ou a distância relativa entre o Sol e a Lua, tem sido uma necessidade de todas as civilizações, sejam elas antigas, como a dos egípcios, babilônios e gregos ou mais contemporâneas como a nossa. Mas, apesar de ser uma necessidade cotidiana, e por isso uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio apresentam muitas dificuldades nestes conceitos que geralmente são trabalhados a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, como apontam algumas pesquisas (OLIVEIRA, 2006; BRITO e MOREY, 2004; GOUVEIA, 1998; COSTA, 1997; LORENZATO, 1993; DANTE, 1988).

Os softwares de geometria dinâmica têm sido apontados como mídias que podem colaborar com a elaboração e consistência da aprendizagem destes conceitos de trigonometria quando bem utilizados pelos professores e professoras.

2. O cálculo de distâncias inacessíveis no decorrer da história da matemática

Determinar um marco inicial para a história da matemática, ou da geometria, como parte dela, não é tarefa simples, por considerarmos que o desenvolvimento de atividades relacionadas com o uso da matemática é inerente a espécie humana e por identificarmos há cerca de 6.000 anos o surgimento da escrita que proporcionou a esta espécie representar seus registros e pensamentos.

A existência de uma matemática anterior ao aparecimento da escrita pode ser observada há cerca de 2,5 milhões de anos, quando os australopitecos utilizaram a pedra, como uma tecnologia para descarnar animais (D'AMBRÓSIO, 2005). Com isso, esta espécie utiliza o raciocínio lógico-dedutivo, característico da matemática, para garantir a sua alimentação com mais eficiência e ainda colabora com a evolução da espécie.

As mudanças climáticas motivaram o desenvolvimento da agricultura e a criação de calendários e almanaques que serviam para ajudar os agricultores a prever as chuvas ou a sua escassez. Contudo, aconteciam constantes enchentes no vale dos rios Amarelo, Nilo, Tigre e Eufrates. É a partir deste que contexto que Heródoto (484-425 a.C.) acredita ter surgido à geometria, mais especificamente, nas margens do rio Nilo, tendo em vista que os egípcios cultivavam terras divididas em lotes pelos funcionários do faraó. Assim, a cada enchente do Nilo estas divisões precisavam ser refeitas a fim de controlar a arrecadação dos impostos pelo faraó.

Mas, foram os gregos que nomearam e desenvolveram as técnicas egípcias utilizadas na medição de terras. Com isso, tanto os egípcios quanto os gregos trabalharam com outras atividades geométricas, como por exemplo, a invenção do relógio do sol e a construção de pirâmides que serviam de túmulo para os faraós. Isso mostra que a ciência é resultado do conhecimento acumulado por outros povos, ou seja, a geometria grega é resultante de conhecimentos que os egípcios e babilônios já possuíam.

Tales (624-548 a.C.) foi um matemático grego que causou grande admiração nos egípcios ao calcular a altura da pirâmide de Quéops, observando o comprimento da sombra da pirâmide e o comprimento da sombra de um bastão vertical.

Outras medidas de distâncias inacessíveis foram calculadas por Aristarco e Eratóstenes, por volta do século III a. C. Aristarco, utilizando instrumentos rudimentares para a nossa época, percebeu que a distância entre o Sol e a Lua (quando meio cheia) é $\frac{29}{30}$ de um ângulo reto. Com isso, mostrou que a distância da Terra ao Sol é cerca de 20 vezes maior que a distância da Terra a Lua. Já Eratóstnes, observou que ao meio dia do solstício¹ de verão, uma vara colocada na vertical não projetava nenhuma sombra em Siena (há aproximadamente 1 000 km de Alexandria), ou seja, os raios solares caíam verticalmente (figura 1). Porém, em Alexandria, no mesmo instante, os raios do Sol formavam um ângulo de $\frac{1}{50}$ da circunferência completa com a vertical (figura 2). Eratóstenes tinha conhecimento de que a distância entre Siena e Alexandria era de aproximadamente 5 000 estádios². Com essas informações, Eratóstenes obteve 250 000 estádios como sendo a medida da circunferência da Terra. Como naquela época já era conhecida a relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, pode-se obter facilmente a medida do raio da Terra.

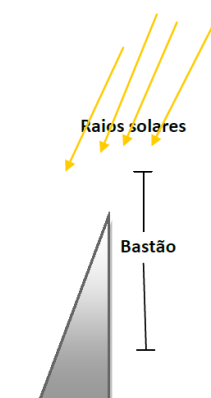


Figura 1

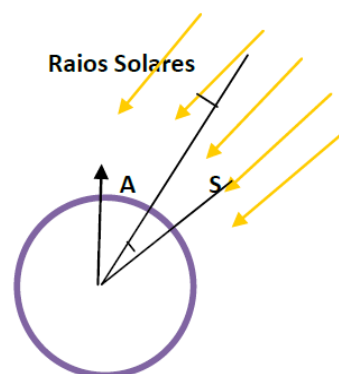


Figura 2

¹ Segundo a astronomia é quando o Sol aparenta atingir a maior declinação em latitude medida a partir da linha do equador. O solstício de verão ocorre no hemisfério norte em junho e no hemisfério sul em dezembro.

² Unidade de comprimento utilizada por vários povos. Para os gregos a referência era o estádio de Olímpia, cidade da Grécia antiga que sediou no século VIII a.C os primeiros jogos olímpicos e que tinha cerca de 185 metros de comprimento. Eratóstenes utilizou como referência o estádio egípcio que tinha cerca de 135 metros de longitude.

3. Geogebra: um software de geometria dinâmica

O termo Geometria Dinâmica foi inicialmente utilizado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen, eles tinham como objetivo diferenciar este tipo de software dos demais softwares geométricos. A Utilização dos softwares de construções geométricas permite designar programas interativos para a criação, manipulação e transformação de figuras mantendo suas propriedades. Sendo assim os programas usados em geometria dinâmica não devem ser vistos como referência a uma nova geometria.

O Geogebra é um software livre de geometria dinâmica para o ensino da matemática que junta à geometria, álgebra e o cálculo e foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e Judith Hohenwarter. Este software está disponível em múltiplas plataformas (Windows, Linux, Macintosh, etc.) e para funcionar deve ter o Java Script instalado.

O Geogebra possibilita apresentar um objeto matemático por meio da zona gráfica, da zona algébrica ou numérica e da folha de cálculo (figura 3).



Figura 3 – Tela inicial do Geogebra

Usando a Entrada de Comando podemos inserir diretamente expressões algébricas no Geogebra. Por exemplo, inserindo $f(x) = x^3 + 4$ na entrada de comando, a função f aparecerá na zona algébrica e o respectivo gráfico na zona gráfica. Na zona algébrica, os objetos

matemáticos são organizados em duas classes: objetos livres e objetos dependentes. Na folha de cálculo cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente. Por exemplo, a célula da coluna G e linha 1 é nomeada como célula G1.

4. A Teoria das Situações didáticas

O matemático e didata francês Guy Brousseau (1986) apresenta por meio da teoria das situações didáticas uma forma de compreender e agir com relação ao ensino e a aprendizagem de matemática. Essa teoria é motivada por estudos construtivistas e pela crítica levantada por Brousseau contra os métodos adotados pelos professores nas décadas de 60 e 70, quando estava em ascensão a Matemática Moderna. Assim, Brousseau desenvolveu uma proposta que apresenta como base a problematização matemática, por acreditar que o indivíduo aprende quando enfrenta situações que o conduzem a contradições e desequilíbrios.

Sempre que o professor tem a intenção de favorecer a aprendizagem do aluno com relação ao algum objeto matemático, tem-se uma situação didática. Segundo Brousseau (1986):

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (p. 8).

A teoria das situações didáticas envolve professor, aluno e conhecimento matemático. Ao professor cabe selecionar uma boa situação, isto é, buscar uma situação que seja capaz de promover a aprendizagem, tendo em vista, que é ele quem conhece os objetivos educacionais esperados para o domínio de determinadas competências. Contudo, só haverá aprendizagem se o aluno se apropriar da situação, ou seja, é necessário que o problema proposto seja motivador e que ele o tenha como seu e se interesse pela busca de estratégias que sejam capazes de resolvê-lo. Isso é o que Brousseau chama de devolução o processo de transferência de propriedade psicológica do professor para o aluno. A partir da devolução da situação para o aluno é que ele começa a pensar e investigar caminhos para apresentar ao professor uma solução, por isso, o processo de devolução é uma via de mão dupla. Enquanto

o professor prepara o meio³ para apresentar a situação ao aluno, este considera o trabalho do professor e as regras do contrato didático⁴ para devolver a resposta da situação a ele proposta.

No decorrer da dialética existente na devolução das responsabilidades (professor-aluno e aluno-professor) da situação ocorre a aprendizagem. Contudo, até que isso ocorra é necessário investigar alguns tipos de situações didáticas que levam à tona diversas variáveis, inclusive, variáveis que vão além do controle do professor. Brousseau chamou de situações adidáticas, aquelas nas quais o aluno age sem a influência direta do professor no decorrer do processo de aprendizagem, ou seja, são nestas situações que os alunos são convidados a investigar e descobrir sozinho, sendo assim, momentos privilegiados da aprendizagem. É importante considerar que a ausência do professor faz com que ele perca o controle apenas momentaneamente do saber produzido pelo aluno, mas foi o professor quem escolheu a situação. Por isso, toda situação adidática é um tipo de situação didática.

A partir da análise das especificidades da aprendizagem da matemática, Brousseau apresentou quatro categorias para as situações didáticas: situação adidática de ação, situação adidática de formulação, situação adidática de validação e situação de institucionalização.

Na situação de ação o aluno age de modo mais operacional na busca de solução para o problema, por isso, é comum nesta fase o aluno apresentar uma resposta para a situação mesmo sem conseguir uma explicação mais elaborada que justifique a sua afirmação. É o momento da tomada de decisões.

É na situação de formulação que o aluno mostra utilizar alguns modelos teóricos, mas sem se preocupar com a validade das suas afirmações, ou seja, ele faz algumas afirmações que são resultados da sua interação com o problema, mas embora estas afirmações tenham uma intenção de validação não é uma exigência da situação.

Na situação adidática de validação espera-se que as proposições levantadas pelos alunos sejam verificadas cuidadosamente a fim de serem validadas ou abandonadas. Nesta tipologia de situação didática, o aluno já está convencido da validade da sua afirmação, mas precisa elaborar algum tipo de discurso a fim de ajudar outras pessoas a compreenderem este saber.

³ É onde ocorrem as mudanças que visam desestabilizar o sistema didática e provocar o surgimento de conflitos cognitivos que favorecem a aprendizagem.

⁴ Conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e vice-versa (BROUSSEAU, 1986).

Como o conhecimento elaborado naquela situação particular precisa ser utilizado em outras situações, a situação didática de institucionalização envolve professor e aluno na busca de uma síntese que o envolva com outros saberes e permita uma validade cultural, ou seja, é aí que ocorre a sistematização do saber por meio de definições e propriedades matemáticas.

5. O cálculo de distâncias inacessíveis utilizando o Geogebra

Desde os egípcios com o estabelecimento de comunidades fixas e a necessidade de cobrar impostos, até os dias de hoje, a humanidade tem tido a necessidade de resolver inúmeros problemas como a altura de pirâmides e prédios, a largura de rios e mais recentemente investiga distâncias inacessíveis até mesmo no espaço cósmico. Em todas estas situações o homem recorre a conhecimentos básicos de geometria, como por exemplo, o estudo do triângulo, do retângulo e do círculo.

Estes conteúdos, embora, integrem o campo conceitual⁵ da geometria básica ainda não são bem compreendidos pelos alunos que quando se deparam com problemas que exigem tais abordagens acabam fracassando como apontam diversos estudos (GOUVEIA, 1998; LORENZATO, 1993; DANTE, 1988).

Os parâmetros curriculares nacionais de matemática apontam a importância do aluno reconhecer a natureza de uma situação-problema e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da matemática, o que pode acontecer, por exemplo, em situações que envolvam o cálculo de distâncias. (BRASIL, 2002, p. 159).

Para Nascimento (2004) grande parte das dificuldades pontuadas no processo de aprendizagem é resultado da maneira utilizada pelos alunos na organização do raciocínio e na construção de argumentações lógicas. No que se refere a aprendizagem de conceitos geométricos Souza, Diniz, Vieira (1997) apontam o uso de softwares de geometria dinâmica como tecnologias que podem colaborar com o processo de ensino-aprendizagem de geometria.

Segundo Silveira

O uso de softwares educacionais oferece muitas potencialidades, como por exemplo: ambiente rico de imagens, sons e animações, fornecendo dessa maneira um estudo mais dinâmico, permitindo que o aluno, experimente,

⁵ Vergnaud (1988) define um campo conceitual como sendo um conjunto de situações que exigem o domínio de vários conceitos de naturezas distintas.

construa, interprete, visualize situações relativas ao conteúdo de sala de aula. Diante do computador os alunos procuram as soluções para os seus problemas e dessa maneira constroem ao mesmo tempo o próprio conhecimento. (2008, p. 24)

Contudo, estes mesmos autores enfatizam que não basta inserir uma determinada tecnologia na escola, é preciso que o professor consiga proporcionar ao aluno situações que permitam a manipulação, a construção e o dinamismo que os softwares de geometria dinâmica devem apresentar. Tendo em vista que:

Um software pode ser usado de diversas formas em função do seu tipo, mas pode também ser usado em diferentes momentos de uma aprendizagem e ter funções variadas nessa aprendizagem. (BELLEMAIN, BELLEMAIN, GITIRANA, 2006, p. 2).

No intuito de oferecer uma melhor compreensão dos conceitos aqui discutidos propomos esta oficina a ser desenvolvida com os participantes organizados em pequenos grupos em três momentos. O primeiro momento tem como objetivo familiarizar os participantes com o Geogebra, por meio de algumas atividades tais como: representação de pontos, segmentos, retas, ângulos e demais figuras geométricas. No segundo momento sugerimos a resolução de uma atividade, que chamamos de pré-teste (figura 4) a fim de observarmos como, e se, os participantes resolvem problemas envolvendo o cálculo de distâncias inacessíveis. Enfim, no terceiro momento desenvolveremos duas atividades.

Vitor está numa das margens de um rio (ponto A) e quer medir sua largura x . Ele observa uma árvore que está na margem oposta do rio (ponto B) e caminha em linha reta até ficar de frente para a árvore (ponto C). Ajude Vitor determinar a largura do rio, sabendo que $\widehat{BAC}$ mede 36° . (Dado $\text{tg } 36^\circ = 0,73$)

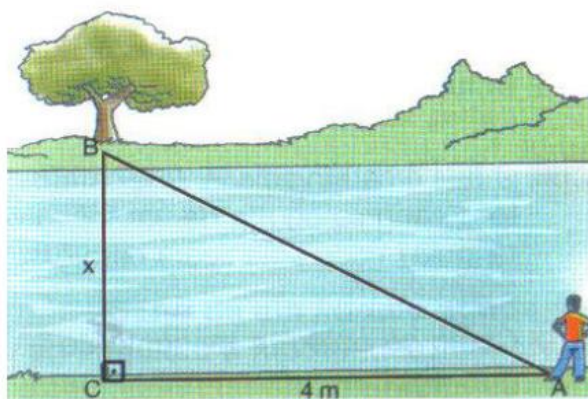


Figura 4 – Pré-teste (BONJORNO, BONJORNO, OLIVARES, 2006)

Atividade 1 – Investigando razões

Construa no Geogebra um ângulo de medida qualquer. Marque em um dos lados deste ângulo um ponto e passando por ele uma reta perpendicular a este mesmo lado do ângulo. Em seguida, marque o ponto que indica a intersecção entre a perpendicular traçada e o outro lado do ângulo. Agora, complete o quadro abaixo e responda as questões propostas. Lembramos que para realizar esta atividade será necessário em alguns momentos mover a perpendicular construída mantendo o ângulo fixo, em outros, faz-se necessário mover um dos lados do ângulo. Ainda, para o cálculo da razão sugerimos utilizar a calculadora ou a planilha do Geogebra.

Medida do ângulo	Medida do segmento oposto ao ângulo	Medida do segmento adjacente ao ângulo	Razão entre o segmento oposto e o segmento adjacente

Observando os dados do quadro acima, o que parece acontecer com a razão entre o segmento oposto e o segmento adjacente ao ângulo construído:

- a) quando a medida do ângulo permanece fixa?
- b) quando a medida do ângulo sofre variação?

Atividade 2 – Calcular a medida do pé direito desta sala, considerando-a inacessível.

Atividade 3 – Realizando um procedimento análogo ao da atividade 2 (manual com régua e compasso ou no Geogebra) preencher o quadro abaixo:

Medida do ângulo	Tangente
5°	
10°	
20°	
30°	
40°	
45°	
60°	
75°	
89°	

Nesta atividade cada grupo irá obter a tangente para duas medidas de ângulos. Assim, ao término da atividade cada grupo socializa o valor da tangente obtido e organizaremos o quadro acima.

6. Referências Bibliográficas

BELLEMAIN, F; BELLEMAIN, P.M.B; GITIRANA, V. **Simulação no ensino da matemática: um exemplo com cabri-géomètre para abordar os conceitos de área e perímetro**. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia-SP: III SIPEM, 2006.

BONJORNO, J. R; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática fazendo a diferença**. 8. Ed. São Paulo, FTD, 2006. (página 175 8ª série 320 p.)

BORBA, M.C. PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autentica, 2003.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1999.

BRITO, A. J.; MOREY, B. B. **Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental**. Revista Horizontes, v. 22, n.1, p. 65-70, jan./jun. 2004

BROUSSEAU G., Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2, La pensée sauvage, Grenoble, 1986.

CONNE, F. Savoir et Connaissance dans La Perspective de La Transposition Didactique. In: BRUN, J. (org.). Didactique des Mathématiques. Paris, Delachaux et Niestlé, 1996.

COSTA, N. M. L., **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador.** Dissertação (Mestrado em ensino da matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

D’AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática- elo entre as tradições e a modernidade.** 2 ed. São Paulo: Autêntica, 2002.

DANTE, Luis R. **Criatividade e Resolução de Problemas na Prática Educativa Matemática,** Tese de Livre –Docência, UNESP, Rio Claro, 1988.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 1 ed. Campinas, 2004.

GITIRANA, V. **Função Matemática:** o entendimento dos alunos a partir do uso de softwares educacionais. A pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula, In: Borba, R. e Guimarães, G. São Paulo: Cortez, 2009.

GOUVÊA, F. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração:** uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental, Dissertação de mestrado em educação matemática, PUC-SP, 1998.

IMENES, L.M.P.; JAKUBO, J.J.; LELLIS, M.C. **Pra que serve matemática? Semelhança.** 6 ed. São Paulo, 1992.

LORENZATO, S. **Os "porques" Matemáticos dos alunos e as Respostas dos Professores,** Proposições, vol. 10, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1993.

MEC, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

NASCIMENTO, R. B. **Investigações em Geometria Via Ambiente Logo.** Revista Ciência & Educação, v. 10, n. 1, p. 1-21, 2004

OLIVEIRA, F. C. Dificuldades no processo ensino aprendizagem de Trigonometria por meio de atividades.

SILVEIRA, A.M. **O uso de programas computacionais como recurso auxiliar para o ensino de geometria espacial.** Santa Maria, 2004.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S.; VIEIRA, R. M.; OCHI, F. H. **A Matemática das Sete Peças do Tangram.** São Paulo, CAEM-IME-USP, 1997.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades.