V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

PROBLEMAS: OBSERVANDO, REFLETINDO E CONSTRUINDO

ANETE SOARES CAVALCANTI [*] DALTON FRANCISCO DE ARAÚJO [†]
ANDERSON SPINELLI VALDEVINO DA SILVA [‡] CLEITON LUIS DE SIQUEIRA ALVES [§]
TIAGO CAVALCANTE DE BARROS [¶]

1 Técnicas de Resolução de Problemas

A Matemática surgiu na busca constante que os homens realizavam pela resolução de seus problemas diários como contagem, armazenamento de água, detenção de enchentes, necessidades de trocas de mercadorias, melhor estratégia para plantação, a criação da moeda, dentre outras coisas. O problema matemático é de suma importância para o desenvolvimento e aprendizado da Matemática, no intuito de resolvê-lo o indivíduo tem que organizar e aplicar todo seu conhecimento. Ele estimula a criatividade e a curiosidade aprimorando o raciocínio do indivíduo que o resolve, isso faz com que ele adquira gosto pelo exercício mental proporcionado pelo problema tornando a descoberta de sua solução uma realização pessoal de grande importância. Como podemos observar é pelo problema que a Matemática surge, com ele desenvolvem-se novas ideias fazendo crescer as diversas áreas da mesma. Mas o que é de fato um problema? Daremos agora definições de problema de alguns autores as quais o leitor poderá identificar a que mais se adequa a sua concepção de problema.

- Dante[2] − É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.
- Polya[1] − O problema é o meio pela qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o "alimento"da evolução Matemática.
- Callejo e Vila[4] − O termo problema é utilizado para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.

Baseado em todas essas definições concluímos que um problema vai além de uma simples verificação de aprendizagem. É uma maneira alternativa de ensinar. É algo que te faz pensar mais delicadamente.

Existe alguma diferença entre problema matemático e exercício matemático? Entendemos que um problema matemático é diferente de um exercício Matemático. Um exercício matemático é aquele que quem resolve utiliza-se dele para memorizar determinado assunto e os tipos de questões que podem surgir com ele, ou seja, o exercício envolve mera aplicação de resultados teóricos enquanto um problema envolve invenção e criação, quem irá resolvê-lo precisará utilizar de conhecimentos adquiridos e não simplesmente da memorização de fórmulas, os problemas são desafiadores e motivadores enquanto os exercícios são rotineiros e de resolução direta.

[*] Universidade Federal Rural de Pernambuco , DM, PE, Brasil, anete_sc@yahoo.com.br
[†] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - *Campus* Ipojuca, IFPE, PE, Brasil, daltonfrancisco@ipojuca.ifpe.edu.br
[‡] Universidade Federal Rural de Pernambuco , DM, PE, Brasil, illenips16@hotmail.com
[§] Universidade Federal Rural de Pernambuco , DM, PE, Brasil, cleiton.luisufrpe@gmail.com
[¶] Universidade Federal da Paraíba , DM, PE, Brasil, tiagocavalcantedebarros@hotmail.com

Segue abaixo as concepções defendidas por Polya[1] elas partem do princípio da divisão da estratégia de resolução dos problemas em quatro etapas:

- 1ª etapa: compreensão do problema O primeiro passo é entender o problema. É importante fazer perguntas. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar à incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias? Construir figuras para esquematizar a situação proposta no exercício pode ser muito útil, sobretudo introduzindo-se notação adequada. Sempre que possível, procurar separar as condições em partes.

- 2ª etapa: construção de uma estratégia de resolução Encontrar conexões entre os dados e a incógnita. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada em tempo razoável. É importante fazer perguntas. Você já encontrou este problema ou um parecido? Você conhece um problema semelhante? Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar? Olhe para a incógnita e tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante. Caso você encontre um problema relacionado ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo. Você pode usar seu resultado ou método? É necessário introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos? Você consegue enunciar o problema de uma outra maneira? Caso você não consiga resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido! Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? E um caso mais geral e/ou mais acessível? Você consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condições do problema e observe o que ocorre com a incógnita: como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa desde os dados? Você consegue imaginar outros dados capazes de produzir à incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os lados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos? Não se esqueça de levar em conta todos os dados e todas as condições.

- 3ª etapa: executando a estratégia Frequentemente, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acabam se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução (e, deste modo, acabam sendo obrigados a voltar para a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia). Ao executar a estratégia, verifique cada passo. Você consegue mostrar que cada um deles está correto?

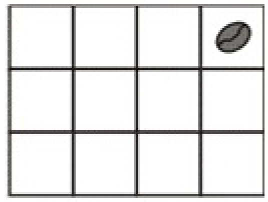
- 4ª etapa: revisando a solução Você deve examinar a solução obtida, verificando os resultados e os argumentos utilizados. Você pode obter a solução de algum outro modo? Qual a essência do problema e do método de resolução aplicado? Em particular, você consegue usar o resultado – ou o método – em algum outro problema? Qual a utilidade deste resultado?

A resolução de situações problemas, na aprendizagem de um aluno, é de fundamental importância, pois por meio dessa metodologia de ensino é possível construir determinados conceitos matemáticos. Consequentemente, desenvolvimento do raciocínio matemático. Resolver problemas é uma das atividades humanas mais complexas. Nela estão envolvidos diferentes tipos de conhecimentos, como as estratégias heurísticas que dão indicações sobre possíveis caminhos a seguir, embora seja preciso tentar selecionar adequadamente e adaptar à situação concreta, assim como processo de controle e auto-regulação, as emoções, as atitudes e as crenças. Callejo e Vila (2007, p.68). A resolução de problemas é uma ponte para o despertamento do aluno quanto ao conhecimento matemático formal, interagindo com seu conhecimento prévio!

2 Alguns Problemas

1. (OBM - 2010) A figura representa uma barra de chocolate que tem um amendoim apenas num pedaço. Elias e Fábio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Então combinam dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando

o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fábio fique com o amendoim ao final?



(a) Escolher a primeira coluna à esquerda.

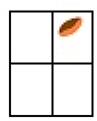
(b) Escolher as duas primeiras colunas à esquerda.

(c) Escolher a terceira linha, de cima para baixo.

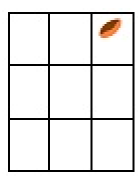
(d) Escolher as duas últimas linhas, de cima para baixo.

(e) Qualquer uma, já que Fábio forçosamente ficará com o amendoim.

Solução Quem deixar a barra de chocolate no formato a seguir obriga o outro a comer o amendoim:



Se Elias pegar a coluna mais à esquerda, o chocolate vira um quadrado de lado 3:



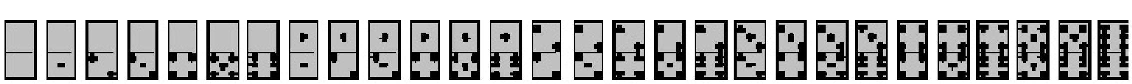
Só existem duas possibilidades, conforme a regra do jogo.

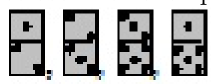
A partir de agora, se Fábio pegar a coluna à esquerda, Elias pega a linha de baixo e não come o amendoim. Se Fábio pegar as duas colunas da esquerda, Elias pega as duas linhas de baixo e não come o amendoim. Um raciocínio análogo demonstra que Fábio também fica com o amendoim se pegar as colunas de baixo. Qualquer outra repartição inicial de Elias permite que Fábio deixe apenas o amendoim ou o chocolate quadrado de lado 2, o que também obriga Elias a ficar com o amendoim. Assim, Elias precisa começar da coluna mais à esquerda. Indicar o que será avaliado no problema. Raciocínio lógico, interpretação do problema.

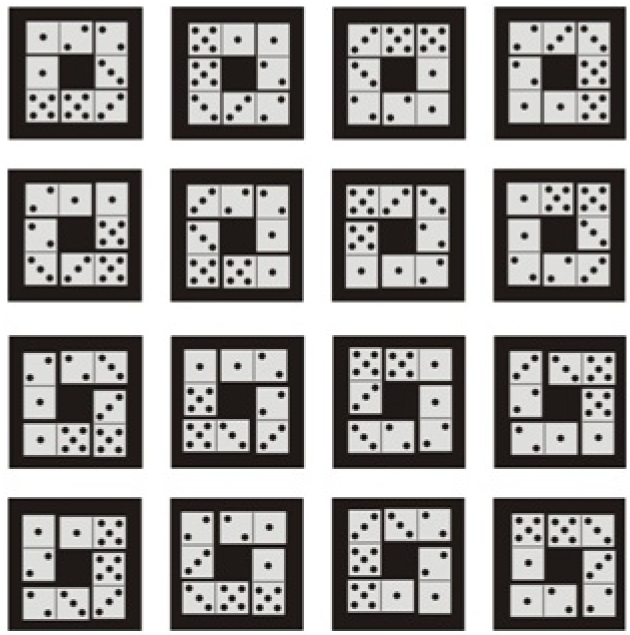
Citar possíveis dificuldades que o aluno possa encontrar ao tentar resolver o problema. Interpretação errada no que diz respeito às regras.

Citar atividades (dinamicas ou não) que podem ser trabalhadas com os alunos de modo a desenvolver o tema do problema. Desenvolver problemas análogos com regras mais simples.

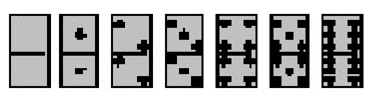
2. (OBM – 2009) Um dominó é formado por 28 peças diferentes. Cada peça tem duas metades, sendo que cada metade tem de zero a seis pontos:



Esmeralda coloca 4 peças de dominó dentro de um estojo, respeitando as regras do jogo, isto é, peças vizinhas se tocam em metades com as mesmas quantidades de pontos. Caso seja possível guardar as quatro peças no estojo, dizemos que o conjunto de quatro peças é precioso. Por exemplo, a figura abaixo mostra as maneiras de guardar o conjunto precioso formado pelas peças .



(a) Mostre que um conjunto precioso não pode conter duas peças duplas. Suponha que seja possível um conjunto precioso conter duas peças duplas. Assim necessariamente elas não poderiam se tocar. Logo, seriam então necessárias duas peças iguais para que se complete o conjunto precioso. Absurdo. A figura abaixo mostra as peças duplas.

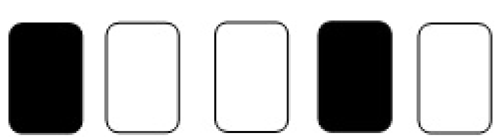


(b) Quantos conjuntos preciosos contêm uma peça dupla? Fixada uma peça dupla restam seis possibilidades para a segunda peça e cinco possibilidades para terceira peça que independe das cabeças e por fim, a ultima peça é consequência.

(c) Determine a quantidade total de conjuntos preciosos. A cargo do leitor. Indicar o que será avaliado no problema. A habilidade do aluno em questões de combinatória.

Citar possíveis dificuldades que o aluno possa encontrar ao tentar resolver o problema A escolha da técnica de contagem. Citar atividades (dinâmicas ou não) que podem ser trabalhadas com os alunos de modo a desenvolver o tema do problema. Trabalhar questões diversas de contagem. E levar o dominó para atividade acima proposta.

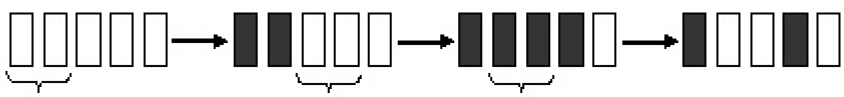
3. (OBM − 2009)Cinco cartas iguais têm um lado branco e um lado preto. Elas se encontram em fila com a face branca para cima. Um movimento consiste em escolher um único par de cartas vizinhas e virá-las. No mínimo, quantos movimentos são necessários para que as cartas fiquem como na figura ao lado?



(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) Não é possível obter a configuração acima

Solução

B) Para que a primeira e a quarta cartas fiquem pretas, são necessários pelo menos dois movimentos. Por outro lado, com apenas dois movimentos, a segunda carta seria preta. Assim, a quantidade mínima é três, conforme o exemplo abaixo:



Essa maneira com três movimentos é a única?

Indicar o que será avaliado no problema. A capacidade de raciocínio lógico. Citar possíveis dificuldades que o aluno possa encontrar ao tentar resolver o problema A argumentação na quantidade mínima de movimentos. Citar atividades (dinamicas ou não) que podem ser trabalhadas com os alunos de modo a desenvolver o tema do problema. Questões semelhantes ao problema proposto.

4. (OBM – 2008)Rafael tem 10 cartões. Cada um tem escrito um dos números 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68, e todos os dez números aparecem. Qual o menor número de cartões que Rafael pode escolher de modo que a soma dos números nos cartões escolhidos seja exatamente 100?

(a) 2
(b) 3
(c) 4
(d) 5
(e) não é possível obter soma 100 com esses cartões.

Notando que os 10 números ou terminam em 3 ou terminam em 8 e que a soma deve ser um múltiplo de 10. Só apresenta três possibilidades, ou são cinco números que terminam em 8, ou quatro números que terminam em 3 e um que termine em 8, ou ainda dois números que terminam em 3 e três que terminem em 8.

Solução Letra (D) Note que todos os cartões deixam resto 3 na divisão por 5. Então, para que a soma dos cartões seja 100, que é múltiplo de 5, precisamos de pelo menos cinco cartões. Rafael pode escolher 3, 13, 23, 28 e 33, assim a resposta é 5. Indicar o que será avaliado no problema. A interpretação do problema. Soma e combinações. Citar possíveis dificuldades que o aluno possa encontrar ao tentar resolver o problema Perceber a combinação correta de forma que a soma de números que terminem em 3 ou 8 sejam um múltiplo de dez. Citar atividades (dinâmicas ou não) que podem ser trabalhadas com os alunos de modo a desenvolver o tema do problema.

3 Criação de Problemas

Nesta seção será dada, ainda mais, um ar de criatividade a nossa oficina! Tentaremos criar problemas inspirados em diversos fatores, como problemas em cima de problemas, problemas relacionados ao nosso cotidiano (baseados, por exemplo, em reportagens de jornal), problemas contextualizados, temas que envolvam interdisciplinariedade e principalmente tentaremos tornar os docentes/discentes mais interessados em fazer com que suas aulas fiquem mais "enigmáticas". Claro que como neste momento esperamos algo quase artístico, sabemos que isto precisa de treino e inspiração, daremos apenas uma motivação inicial para os ouvintes.

Exemplo 1 Considere o seguinte trecho da reportagem retira do Diário de Pernambuco no dia 30 de maio de 2010, intitulada **Medida de Responsabilidade**:

[...]*Considerada um avanço no trânsito pelos especialistas, a resolução 277 chega em boa hora para por ordem no transporte da garotada de até 10 anos. Até porque o Brasil não tem boa reputação neste aspecto. De acordo com Luiza Batista de Sá Leitão, consultora em prevenção de acidentes na infância, numa escala de 0 a 10 da Organização Mundial de Saúde, o Brasil tem nota 4, quando se trata de dispositivos de proteção para crianças. "Temos quase 700 crianças que morrem todos os anos, como ocupantes de veículos. Mortes que poderiam, muitas vezes, serem evitadas se tivesse com um dispositivo", defende Luiza Batista de Sá Leitão. Até em matéria de estatística, o Brasil ainda não progrediu, pois todos os dados, são de 2003 a 2007, quando se registraram 3.211 mortes deste tipo.*[...]

Podemos nos imaginar lendo este jornal de domingo no café da manhã e a partir daí surgir um problema! Por exemplo: "Verifique a quantidade de mortes, das quais as novas normas estabelecidas pelo CONTRAN tentam reduzir, ocorridas em 2008 e 2009 levando em consideração que a média na reportagem se refere aos últimos 7 (sete) anos."Note que olhando rapidamente a resolução parece simples, mas podemos ter alguns problemas de interpretação, por exemplo o que o autor quer dizer com "nos últimos 7 (sete) anos"'? Se considerarmos que estes últimos 7 anos são de 30 de novembro de 2003 a 30 de maio de 2010 (**data da reportagem**) nós não conseguiríamos responder o problema! Mas uma simples frase acrescentada eliminaria este problema, por exemplo:

"Verifique a quantidade de mortes, das quais as novas normas estabelecidas pelo CONTRAN tentam reduzir, ocorridas em 2008 e 2009 levando em consideração que a média na reportagem se refere aos últimos 7 (sete) anos **(de janeiro de 2003 a dezembro de 2009)**."

Cuja solução seria:

Seja x a quantidade de mortes nos anos de 2008 e 2009, daí

$$\frac{3211 + x}{7} = 700 \Rightarrow x = 1689.$$

Embora a solução seja curta estamos avaliando diversos conceitos de Matemática, como interpretação de texto, média aritmética e cálculo de período.

Na criação de problemas temos que ter muito cuidado com as interpreteções de texto que podem surgir. Assim como na Resolução de Problemas, a Criação deles precisa passar pela quarta etapa: **Revisão**. É muito comum vermos questões de vestibulares, concursos e até mesmo ENEM sendo canceladas por terem duas respostas (onde as duas podem constar no gabarito ou não), estas questões são ditas mal elaboradas.

Vejamos agora um exemplo de questão de contagem que foi baseada num edital de concurso.

Exemplo 2 Considere o Edital 13/09 da UFRPE referente a Seleção simplificada para professor subisstituto na Sede, UAST e UAG. O quadro de vagas é dado abaixo:

Departamento/Unidade	Área/Matérias	Vagas	Regime	Período de Inscrição
Matemática	*Matemática	05	40 horas (contrato 06 meses)	16 a 20/11/2009
Medicina Veterinária	**Deontologia e Medicina Legal Veterinária	01	40 horas (contrato 06 meses)	16 a 20/11/2009
Letras e Ciências Humanas	Sociologia Rural e Sociologia do Desenvolvimento	01	40 horas (06 meses)	16 a 20/11/2009
Unidade Acadêmica de Garanhuns	**Anatomia Animal	01	40 horas (contrato 06 meses)	16 a 20/11/2009
Unidade Acadêmica de Garanhuns	***Fenômenos de Transportes	01	20 horas (contrato de 06 meses)	16 a 20/11/2009
Unidade Acadêmica de Serra Talhada	Química Orgânica e Fundamentos de Química Orgânica	02	20 horas (contrato 06 meses)	16 a 20/11/2009

Suponha que temos 11 inscritos para a área de Matemática, de quantas maneiras os candidatos poderiam preencher as vagas?

Um erro comum neste tipo de problema é o de considerarmos as 11! formas dos candidatos se classificarem. Mas está claro na pergunta que só precisamos prencher as 5 vagas, ou seja, $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Exemplo 3 (*A Matriz Mágica de Gardner*) Considere a matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$.

Escolha um número qualquer na matriz, separe e elimine a linha e coluna que o contém , digamos que o escolhido fosse 7. Escolha um dentre os que sobraram e elimine a linha e coluna que o contém. Continue este processo, no fim sobrará um único número e você ficará com 4 números cuja soma será 34. Veja o esquema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & * & 4 \\ * & * & * & * \\ 9 & 10 & * & 12 \\ 13 & 14 & * & 16 \end{bmatrix} (7), \begin{bmatrix} 1 & 2 & * & * \\ * & * & * & * \\ 9 & 10 & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} (16), \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 10 & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} (1).$$

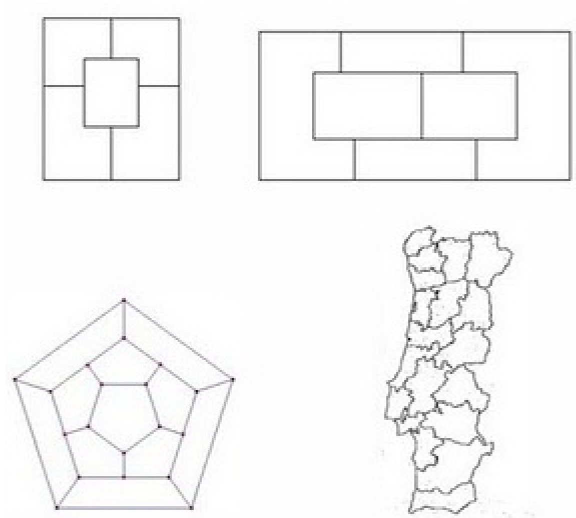
E $7 + 16 + 1 + 10 = 34$. Este enígma chama atenção e deixa muitos leigos interessados em tentar descobrir o que está por trás dele (como os diversos problemas propostos por Gardner!). Claro que após vários testes eles se conformam, mas será que isso é suficiente? Para resolvê-lo usamos vários conhecimentos de matrizes, como determinantes e linhas linearmente dependentes. Podemos criar vários problemas em cima deste. Variações dele, como por exemplo trabalhar com matrizes 2×2 e 3×3 nas escolas, ou até mesmo tentar generalizar para matrizes

$n \times n$, no ensino superior. Vale a pena nos perguntarmos se existem outras matrizes mágicas, por exemplo:

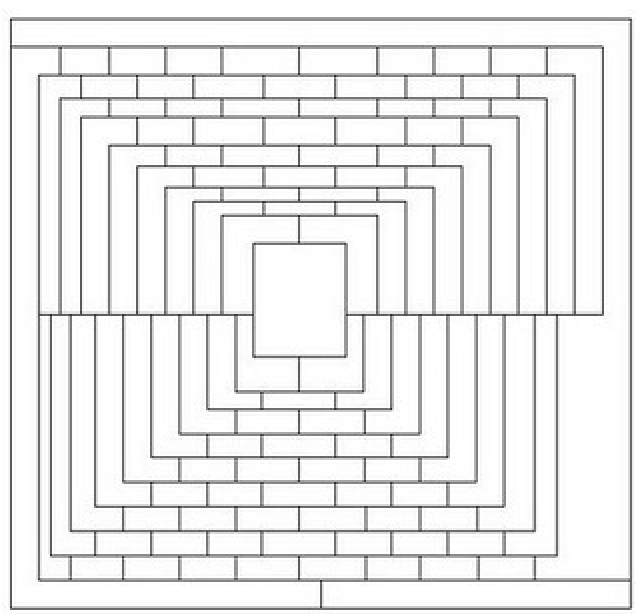
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Ou seja baseado neste problema podemos tentar criar uma máquina de construção de matrizes mágicas! E qual seria a regra? Respondendo a primeira pergunta, o que está por trás da Matriz Mágica de Gardner, podemos criar a nossa “máquina”’.

Exemplo 4 *(Coloração de Mapas)* Pinte os mapas abaixo com o menor número de cores possível, onde pedaços adjacentes não podem ser pintados com a mesma cor!

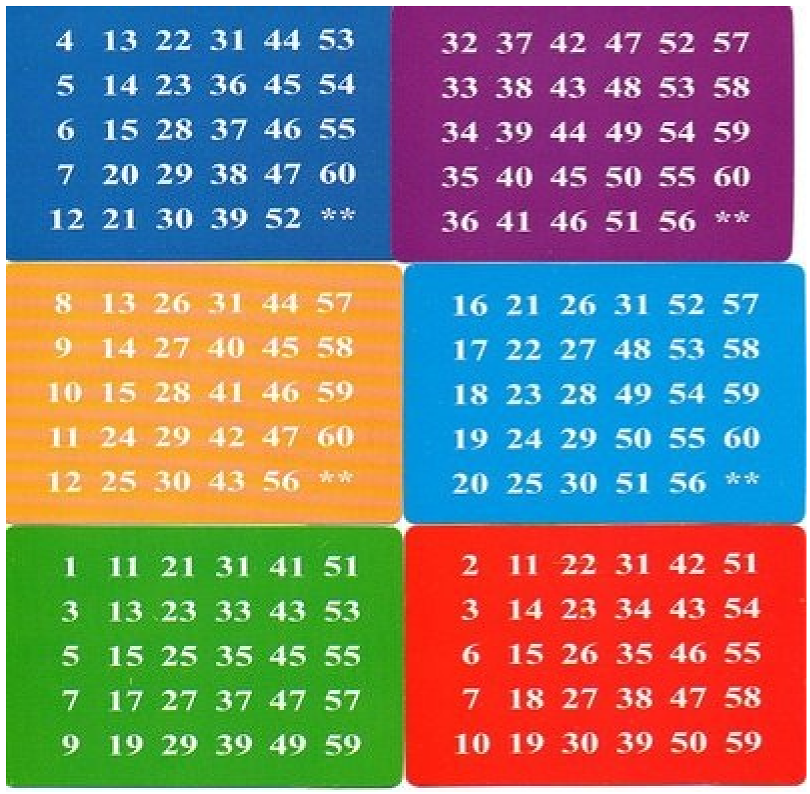


Em dia 1 de Abril de 1975, Martin Gardner publicou, na revista americana Scientific American, o mapa abaixo com 110 regiões.



Segundo Gardner (neste artigo), este mapa não pode ser colorido com quatro cores! Isso foi polêmico na época, pois entraria em contradição com o Teorema das Quatro Cores. Ou seja, se Gardner tivesse certo, este mapa seria um contra-exemplo para o teorema. Tente colori-lo com apenas 4 cores. Como a revista era bem divulgada na época, acreditamos que várias pessoas tentaram colorir este mapa. Apenas em 1998, Wagon, apresentou uma coloração com quatro cores do mapa de Gardner. O fato de este artigo ter sido publicado em **primeiro de abril** aumenta ainda mais a nossa desconfiança, será que foi tudo brincadeira do Gardner?

Exemplo 5 (*Tabelas Mágicas*) Considere os seis cartões coloridos abaixo.



Pede-se a uma pessoa que pense num número natural menor ou igual a 60. De seguida pede-se que indique a cor das cartas onde esse número aparece. Assim podemos descobrir qual é o número que a pessoa pensou. Por exemplo, se você pensou num número que está nas cartas vermelha, azul escuro e roxo, seu número será 38. Neste enígma surgem várias perguntas, como por exemplo, como a pessoa descobriu o número? Será que teria como decorarmos todas as interseções dos cartões para identificar os número? Ou ainda, como contruir esses cartões?

A resolução de situações problemas, na aprendizagem de um aluno, é de fundamental importância, pois por meio dessa metodologia de ensino é possível construir determinados conceitos matemáticos. Consequentemente, desenvolvimento do raciocínio matemático. Ela é uma ponte para o despertar do aluno quanto ao conhecimento matemático formal, interagindo com seu conhecimento prévio!

Assim, nossa proposta visa à construção de conceitos matemáticos pelo participante com situações que estimulem a curiosidade Matemática através de suas experiências com problemas de natureza diferente e pela interpretação na procura de explicar dentro de sua concepção a matemática envolvida. Nossa oficina busca exatamente fazer com que os "alunos" desenvolvam "técnicas" que facilitem a resolução de questões seguindo passos que foram apresentados segundo o modelo de resolução(organização) de Polya e que possam construir Matemática de maneira interessante e atrativa.

Resolver problemas é uma das atividades humanas mais complexas. Nela estão envolvidos diferentes tipos de conhecimentos, como as estratégias heurísticas que dão indicações sobre possíveis caminhos a seguir, embora seja preciso tentar selecionar adequadamente e adaptar à situação concreta, assim como processo de controle e auto-regulação, as emoções, as atitudes e as crenças. Callejo e Vila[4].

Referências

[1] POLYA, G. - *A arte de resolver problemas*, Interciência, Rio de Janeiro, 2ª Edição, 1995.

[2] DANTE, L. R. - *Didática da Resolução de problemas de matemática*, Ática, São Paulo, 1991.

[3] D´AMBROSIO, B. S. - *Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates*, SBEM, Ano II, N2, Brasília, 1989.

[4] CALLEJO, M. L. E VILA, ANTONI - *Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na Resolução de problemas*, Artmed, Porto Alegre, 1989.