

**V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**

***Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a  
Geometria do Triângulo***

Humberto José Bortolossi e José Osório de Figueiredo

Universidade Federal Fluminense

João Pessoa - PB

# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

<b>1</b>	<b>Segmento orientado e área com sinal de um triângulo</b>	p. 6
1.1	Segmento orientado . . . . .	p. 6
1.2	Divisão de um segmento orientado em uma dada razão . . . . .	p. 8
1.3	Divisão harmônica . . . . .	p. 10
1.4	Área com sinal de triângulo . . . . .	p. 11
1.5	Teorema do co-lado . . . . .	p. 18
1.6	Teorema de Ceva . . . . .	p. 21
<b>2</b>	<b>Coordenadas baricêntricas</b>	p. 26
2.1	Definição de coordenadas baricêntricas . . . . .	p. 27
2.2	Coordenadas baricêntricas dos vértices, dos pontos médios dos lados e do baricentro do triângulo de referência . . . . .	p. 29
2.3	Relação entre coordenadas baricêntricas e área com sinal . . . . .	p. 30
2.4	Coordenadas baricêntricas de pontos sobre os lados do triângulo de referência	p. 32
2.5	Coordenadas baricêntricas do incentro . . . . .	p. 33
2.6	Coordenadas baricêntricas do circuncentro . . . . .	p. 34
2.7	Coordenadas baricêntricas dos ex-incentros . . . . .	p. 35
2.8	Coordenadas baricêntricas do centro de Spieker . . . . .	p. 35
2.9	Coordenadas baricêntricas homogêneas e exatas . . . . .	p. 37
2.10	Ponto no infinito . . . . .	p. 40
2.11	Operações com coordenadas baricêntricas . . . . .	p. 41

2.12	Ponto divisor de um segmento em uma dada razão . . . . .	p. 42
2.13	Coordenadas baricêntricas de $T = X(55)$ . . . . .	p. 44
2.14	Coordenadas baricêntricas de $T' = X(56)$ . . . . .	p. 45
2.15	Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas . . . . .	p. 46
2.16	Coordenadas baricêntricas do ortocentro . . . . .	p. 49
2.17	Coordenadas baricêntricas do Ponto de Gergonne . . . . .	p. 51
2.18	Coordenadas baricêntricas do Ponto de Nagel . . . . .	p. 52
2.19	Coordenadas baricêntricas do centro do círculo de nove pontos . . . . .	p. 54
<b>3</b>	<b>Divisores harmônicos</b>	p. 56
3.1	Divisão harmônica de $\overline{HG}$ por $N_c$ e $O$ . . . . .	p. 57
3.2	Divisão harmônica de $\overline{GN_a}$ por $I$ e $S_p$ . . . . .	p. 60
3.3	Divisão harmônica da bissetriz interna por $I$ e $I_A$ . . . . .	p. 61
<b>4</b>	<b>Resumo dos centros estudados</b>	p. 63
	<b>Apêndice A – Um modelo para pontos no infinito usando coordenadas homogêneas</b>	p. 65
	<b>Apêndice B – O círculo de nove pontos</b>	p. 69
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 72

# *Lista de Figuras*

1.1	$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ e $\nabla ABC = \nabla PBC + \nabla PCA + \nabla PAB$ . . . . .	p. 12
1.2	$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ . . . . .	p. 13
1.3	As 7 regiões mostrando os sinais de $S_{PBC}$ , $S_{PCA}$ e $S_{PAB}$ . . . . .	p. 14
1.4	Proporção entre áreas com sinal e bases de triângulos de mesma altura . . . .	p. 18
1.5	O Teorema do co-lado: $S_{ABC}/S_{PBC} = \overline{AX}/\overline{PX}$ . . . . .	p. 19
1.6	Circuncentro $O$ como ortocentro do triângulo medial. . . . .	p. 24
2.1	Ponto de Gergonne $G_e$ . . . . .	p. 51
2.2	Ponto de Nagel $N_a$ . . . . .	p. 53
3.1	A reta de Euler passando por $H$ , $G$ e $O$ , com $HG = 2 \cdot GO$ . . . . .	p. 58
3.2	Reta de Euler passando por $N_c$ , $G$ e $O$ com $\overline{OG} = 2 : \overline{GN_c}$ . . . . .	p. 59
3.3	$H$ , $N_c$ , $G$ e $O$ são colineares com $\overline{N_cG} : \overline{GO} : \overline{HN_c} = 1 : 2 : 3$ . . . . .	p. 59
3.4	$I$ , $G$ e $N_a$ são colineares com $\overline{N_aG} = 2 \cdot \overline{GI}$ . . . . .	p. 60
3.5	$I$ , $G$ e $S_p$ são colineares com $\overline{IG} = 2 \cdot \overline{GS_p}$ . . . . .	p. 61
3.6	$I$ , $G$ , $S_p$ e $N_a$ são colineares com $\overline{GS_p} : \overline{IG} : \overline{S_pN_a} = 1 : 2 : 3$ . . . . .	p. 61
4.1	Resumo dos centros estudados. . . . .	p. 63
A.1	A reta $r$ do plano $xy$ é identificada pelo plano que contém $r'$ e passa pela origem. . . . .	p. 66
A.2	A reta $r$ do plano $xy$ é identificada pelo plano que contém $r'$ e passa pela origem. . . . .	p. 66
A.3	A terceira coordenada homogênea nula caracteriza o ponto no infinito. . . . .	p. 67
A.4	Não existem retas paralelas quando as coordenadas são homogêneas. . . . .	p. 67
B.1	O círculo de nove pontos e seu centro $N_c = X(5)$ em ETC. . . . .	p. 69

# Introdução

No colégio, estudamos o triângulo e aprendemos que existem muitas propriedades que são invariantes, isto é, independem da posição e do formato do triângulo. Por exemplo, as três medianas de um triângulo *sempre* interceptam-se em um ponto, o *baricentro* do triângulo. Outros pontos notáveis: o incentro (interseção das bissetrizes internas), o circuncentro (interseção das mediatrizes) e o ortocentro (interseção das alturas) são conhecidos desde a Grécia Antiga.

A geometria do triângulo é bastante rica. De fato, ao longo da história da matemática, vários outros pontos com propriedades especiais foram identificados. Recentemente, o pesquisador Clark Kimberling catalogou mais de 3000 centros especiais do triângulo em sua obra *Encyclopedia of Triangle Centers* (ETC). Nesta enciclopédia, cada centro é descrito através de suas coordenadas baricêntricas. Este tipo de coordenadas foi apresentado pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius em 1827 e, como veremos, elas possuem propriedades muito convenientes.

Coordenadas baricêntricas estão intimamente ligadas ao conceito de área. De fato, é possível construir todo um sistema axiomático para a geometria usando-se áreas. O método da área tradicional é muito antigo. A demonstração de Euclides para o teorema de Pitágoras, por exemplo, faz o uso de áreas. De maneira curiosa, o emprego de áreas para se resolver problemas em geometria não é um hábito ocidental como é, por exemplo, na China. De fato, a ferramenta padrão que estamos acostumados a usar é semelhança ou congruência de triângulos. Contudo, em muitos casos, não fica evidente quais triângulos considerar e para que isto aconteça, construções não-intuitivas de retas auxiliares são necessárias embora triângulos com um lado em comum apareçam muito mais naturalmente em um enunciado de um teorema em geometria do que triângulos semelhantes ou congruentes.

Neste trabalho, estamos considerando conhecidas as fórmulas da geometria analítica que determinam as coordenadas cartesianas do ponto médio  $M_{AB}$  de um segmento de reta  $AB$ , as coordenadas cartesianas do baricentro  $G$  de um triângulo  $\Delta ABC$  e a área  $S$  convencional (euclidiana) deste triângulo, a saber :

$$M_{AB} = \frac{A + B}{2}$$
$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\mathcal{D}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

O conceito de ponto no infinito é tratado no Apêndice A e o maravilhoso círculo de nove pontos, no Apêndice B. O leitor interessado pode verificar as demais fórmulas da geometria euclidiana aqui usadas (e listadas na sequência), consultando em [8].

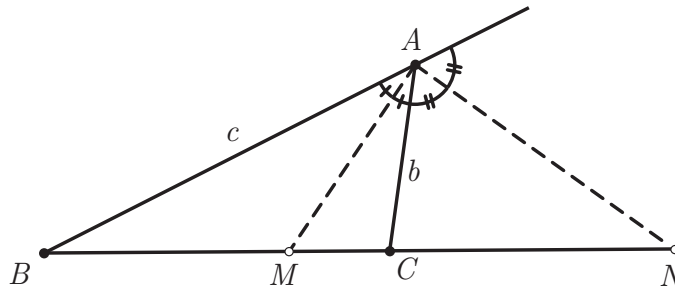
Área convencional (euclidiana) do triângulo.

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}, \quad S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}C}{2}, \quad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \quad S = \frac{abc}{4R} \quad \text{e} \quad S = p \cdot r.$$

Teorema dos cossenos e teorema dos senos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \quad \text{e} \quad \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R.$$

Teorema da bissetriz interna (TBI) e teorema da bissetriz externa (TBE).



$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{c}{b} \quad \text{e} \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{c}{b}$$

# 1 Segmento orientado e área com sinal de um triângulo

## 1.1 Segmento orientado

**Definição 1.1** (SEGMENTO ORIENTADO) Um *segmento orientado* é um segmento de reta ao qual se atribui uma escolha para as extremidades inicial e final do segmento. Usaremos a notação  $\overline{AB}$  para designar o segmento orientado cuja extremidade inicial é o ponto  $A$  e cuja extremidade final é o ponto  $B$ .

Naturalmente, se  $A$  e  $B$  são pontos distintos de uma reta, o segmento orientado  $\overline{AB}$  é diferente do segmento orientado  $\overline{BA}$  e também o são as suas medidas que serão definidas a seguir.

**Definição 1.2** (MEDIDA DE SEGMENTO ORIENTADO) A *medida* (ou *comprimento*) de um segmento orientado  $\overline{AB}$ , que por abuso de linguagem também será denotada por  $\overline{AB}$ , é definida da seguinte maneira: se  $A$  e  $B$  são dois pontos de uma reta orientada  $\ell$ , então

$$\overline{AB} = \begin{cases} +|AB|, & \text{se } \overline{AB} \text{ tem a mesma orientação da reta } \ell, \\ -|AB|, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $|AB|$  representa a medida euclidiana do segmento de reta com extremidades  $A$  e  $B$ .

Sejam  $a$  e  $b$  as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  sobre uma reta orientada  $\ell$  como na figura.



Sabemos que a medida euclidiana  $|AB|$  é dada pela expressão  $|b - a|$ . Qual é a expressão para a medida do segmento orientado  $\overline{AB}$  em termos das coordenadas  $a$  e  $b$ ?

(1) Se  $\overline{AB}$  e  $\ell$  têm a mesma orientação, sua medida será

$$\overline{AB} = +|AB| = |b - a| = b - a.$$

(2) Se  $\overline{AB}$  e  $\ell$  têm orientações contrárias, sua medida será

$$\overline{AB} = -|AB| = -|b - a| = -(a - b) = b - a.$$

Portanto,  $\overline{AB} = b - a$ . Note assim que, ao contrário da medida euclidiana, a medida de um segmento orientado é uma função polinomial das coordenadas dos pontos.

**Proposição 1.1** Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos colineares. Então,

(1)  $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ . Em particular,  $\overline{AB} = -\overline{BA}$ .

(2)  $\overline{AB} = 0$  se, e somente se,  $A = B$ .

(3)  $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ .

*Demonstração:* Sejam  $a, b$  e  $c$  as coordenadas dos pontos  $A, B$  e  $C$ .

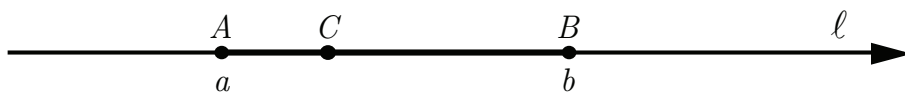
(1)  $\overline{AB} + \overline{BA} = b - a + a - b = 0$ .

(2)  $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow A = B$ .

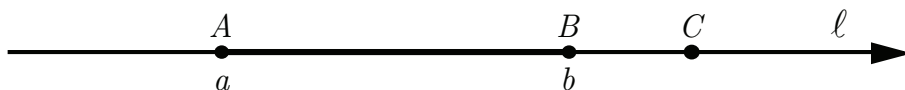
(3)  $\overline{AC} + \overline{CB} = c - a + b - c = b - a = \overline{AB}$ . ■

Observe que a Proposição 1.1 (3) é válida independentemente da posição de  $C$ : este pode estar entre  $A$  e  $B$ , estar à direita de  $A$  e  $B$  ou à esquerda de  $A$  e  $B$ . A expressão é sempre a mesma. No caso de medidas euclidianas, precisamos considerar 3 casos:

(1) Para o ponto  $C$  entre  $A$  e  $B$ , vale que  $|AC| + |CB| = |AB|$ .



(2) Para o ponto  $C$  à direita de  $A$  e  $B$ , vale que  $|AC| - |CB| = |AB|$ .





(3) Para o ponto  $C$  à esquerda de  $A$  e  $B$ , vale que  $-|AC| + |CB| = |AB|$ .



## 1.2 Divisão de um segmento orientado em uma dada razão

**Definição 1.3** (DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM UMA DADA RAZÃO) Sejam  $A, B$  e  $P$  pontos de uma reta  $\ell$  com  $A$  e  $B$  distintos e seja  $k$  um número real,  $k \neq -1$ . Dizemos que o ponto  $P \neq B$  divide o segmento orientado  $\overline{AB}$  na razão  $k$  se

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k.$$

Note que  $k$  deve ser diferente de  $-1$  pois, por hipótese,  $A$  e  $B$  são pontos distintos. De fato:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -1 \Rightarrow \overline{AP} = -1 \cdot \overline{PB} \Rightarrow \overline{AP} + \overline{PB} = 0 \Rightarrow \overline{AB} = 0 \Rightarrow A = B,$$

o que é uma contradição pois  $A$  deve ser diferente de  $B$ .

Na seqüência, para mostrar a unicidade do ponto divisor, mister se faz conhecer o lema seguinte envolvendo quatro pontos colineares.

**Lema 1.1** Se  $A, B, C$  e  $D$  são pontos colineares, então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

*Demonstração:* Fazendo  $t = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ , temos:

$$\begin{aligned} t &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot [\overline{DA} + \overline{AB}] + \overline{AD} \cdot [\overline{BA} + \overline{AC}] \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot [-\overline{AD} + \overline{AB}] + \overline{AD} \cdot [-\overline{AB} + \overline{AC}] \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} - \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{DA} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AB} \cdot [\overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AC}] \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CC} = \overline{AB} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. ■

**Proposição 1.2** (UNICIDADE DO PONTO DIVISOR) Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos. Se os pontos  $C$  e  $D$  dividem  $\overline{AB}$  na mesma razão  $k$ , então  $C = D$ .

*Demonstração:* Como, por hipótese,  $C$  e  $D$  dividem  $\overline{AB}$  na mesma razão  $k$ , temos que

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

Daí,  $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AD} \cdot \overline{CB}$  e, portanto,  $\overline{AC} \cdot \overline{DB} - \overline{AD} \cdot \overline{CB} = 0$ . Sendo assim,

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + [\overline{AC} \cdot \overline{DB} - \overline{AD} \cdot \overline{CB}] = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

Como  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são pontos colineares, pelo Lema 1.1 segue-se que esta última expressão é igual a zero. Mas, por hipótese,  $A \neq B$ , assim  $\overline{CD} = 0$ , o que finalmente implica em  $C = D$ . ■

**Proposição 1.3** Dado um segmento orientado  $\overline{AB}$  e uma razão  $k$ ,  $k \neq -1$ , temos:

- (1) Se  $k \geq 0$ , existe um único ponto  $P \in \overline{AB}$  que divide  $\overline{AB}$  nessa razão. Neste caso, denominaremos o ponto  $P$  de *divisor interno* do segmento  $\overline{AB}$ .
- (2) Se  $k < 0$ , existe um único ponto  $P \in \overleftrightarrow{AB} - \overline{AB}$  que divide  $\overline{AB}$  nessa razão. Neste caso, denominamos o ponto  $P$  de *divisor externo* do segmento  $\overline{AB}$ .

*Demonstração:* Escolhendo um sistema de coordenadas onde  $A$  tem coordenada 0 e  $B$  tem coordenada 1, temos estabelecida uma orientação para a reta que passa por  $A$  e  $B$ . Sejam  $k$  um número real,  $k \neq -1$  e  $P$  o (único) ponto de coordenada

$$p = \frac{k}{1+k}.$$

Daí, temos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{p-a}{b-p} = \frac{\frac{k}{1+k} - 0}{1 - \frac{k}{1+k}} = \frac{\frac{k}{1+k}}{\frac{1}{1+k}} = k,$$

ou seja, exibimos um ponto que divide  $\overline{AB}$  na razão  $k$ . A unicidade de  $P$  é consequência imediata da Proposição 1.2 e também da unicidade do real  $p$ , coordenada de  $P$ . Agora, observe que:

- (1) Para  $k \geq 0$ , temos  $0 \leq p < 1$  e isto mostra que  $P \in \overline{AB}$ .
- (2) Para  $k < 0$ , temos  $p < 0$  ou  $p > 1$  e isto mostra que  $P \in \overleftrightarrow{AB} - \overline{AB}$ . ■

### 1.3 Divisão harmônica

Com os resultados anteriores, temos que se  $A$  e  $B$  são pontos distintos de uma reta  $\ell$  e  $k$  é um número real diferente de  $-1$  e  $1$ , então existem exatamente dois pontos  $M$  e  $N$  pertencentes à reta  $\ell$  que dividem o segmento  $\overline{AB}$  nas razões  $k$  e  $-k$ , ou seja,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = k \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -k \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.$$

Perceba ainda que:

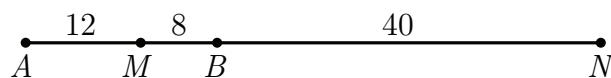
- (1) Se  $k = 0$ , então  $A = M = N$ .
- (2) Se  $k > 0$ , então  $M$  é divisor interno e  $N$  é divisor externo de  $\overline{AB}$ .
- (3) Se  $k < 0$ , então  $M$  é divisor externo e  $N$  é divisor interno de  $\overline{AB}$ .

**Definição 1.4** (DIVISÃO HARMÔNICA) Sejam  $A, B, M$  e  $N$  pontos colineares. Dizemos que  $M$  e  $N$  dividem harmonicamente o segmento  $\overline{AB}$ , se

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.$$

Neste caso,  $M$  e  $N$  são denominados *divisores harmônicos* ou *conjugados harmônicos* com relação ao segmento  $\overline{AB}$ .

**Exemplo 1.1** Considere os pontos  $A, B, M$  e  $N$  como na figura abaixo.



- (1) Observe que valem as igualdades

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{60}{-40} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}},$$

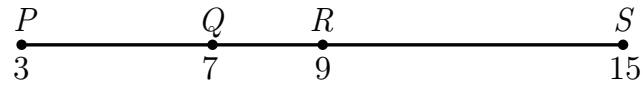
segundo-se daí que  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{AB}$ .

- (2) Observe que valem as igualdades

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \frac{-12}{60} = -\frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{BN}} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{BN}},$$

segundo-se daí que  $A$  e  $B$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{MN}$ . ■

**Exemplo 1.2** Com os dados da figura abaixo temos:



(1) Observe que valem as igualdades

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{7-3}{9-7} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{PS}}{\overline{SR}} = \frac{15-3}{9-15} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = -\frac{\overline{PS}}{\overline{SR}},$$

segundo-se daí que  $Q$  e  $S$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{PR}$ .

(2) Observe que valem as igualdades

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{PS}} = \frac{3-7}{15-3} = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{QR}}{\overline{RS}} = \frac{9-7}{15-9} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{QP}}{\overline{PS}} = -\frac{\overline{QR}}{\overline{RS}},$$

segundo-se daí que  $P$  e  $R$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{QS}$ . ■

**Observação 1.1** Quando  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{AB}$ , vale que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} &\Rightarrow \frac{-\overline{MA}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{MB}}{-\overline{BN}} \\ &\downarrow \\ \frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{BN}}, \end{aligned}$$

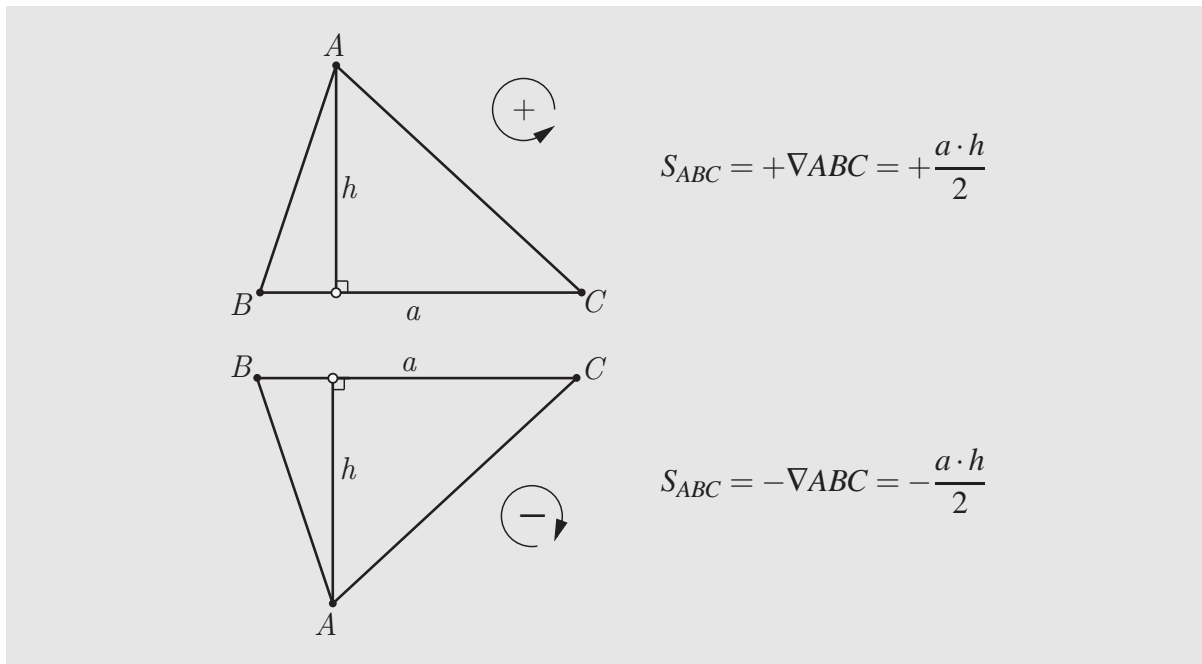
segundo-se daí que  $A$  e  $B$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{MN}$ . Logo, se  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{AB}$  então, reciprocamente,  $A$  e  $B$  são conjugados harmônicos com relação ao segmento  $\overline{MN}$ . ■

## 1.4 Área com sinal de triângulo

**Definição 1.5** (ÁREA COM SINAL DE UM TRIÂNGULO) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos do plano. Definimos a *área com sinal*  $S_{ABC}$  como sendo:

$$S_{ABC} = \begin{cases} 0, & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ forem colineares (triângulo degenerado),} \\ +\nabla ABC, & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido anti-horário,} \\ -\nabla ABC, & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido horário,} \end{cases}$$

onde  $\nabla ABC$  representa a área convencional (euclidiana) de um triângulo  $\Delta ABC$ .



A área com sinal possui duas propriedades importantes:

(1) (Propriedade da permutação) Segue-se da definição que

$$S_{ABC} = S_{BCA} = S_{CAB} = -S_{ACB} = -S_{CBA} = -S_{BAC}.$$

(2) (Propriedade da decomposição) Sendo  $\Delta ABC$  um triângulo, um ponto  $P$  no plano determina outros três sub-triângulos  $\Delta PBC$ ,  $\Delta PCA$  e  $\Delta PAB$ .

Com a noção de áreas com sinal, podemos relacionar as áreas destes quatro triângulos através de uma única expressão:

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}. \quad (1.1)$$

Se estivéssemos trabalhando com áreas convencionais, seria necessário considerar as sete relações possíveis, dependendo da posição do ponto  $P$ , como indicam as Figuras 1.1 e 1.2.

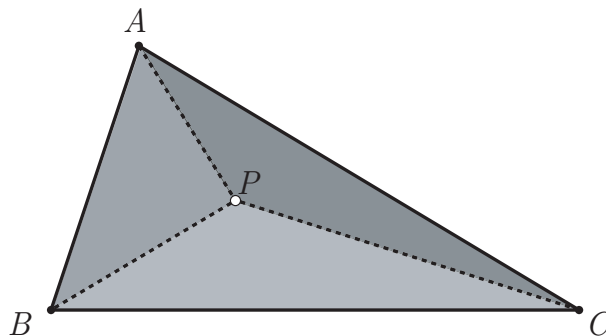


Figura 1.1:  $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$  e  $\nabla ABC = \nabla PBC + \nabla PCA + \nabla PAB$ .

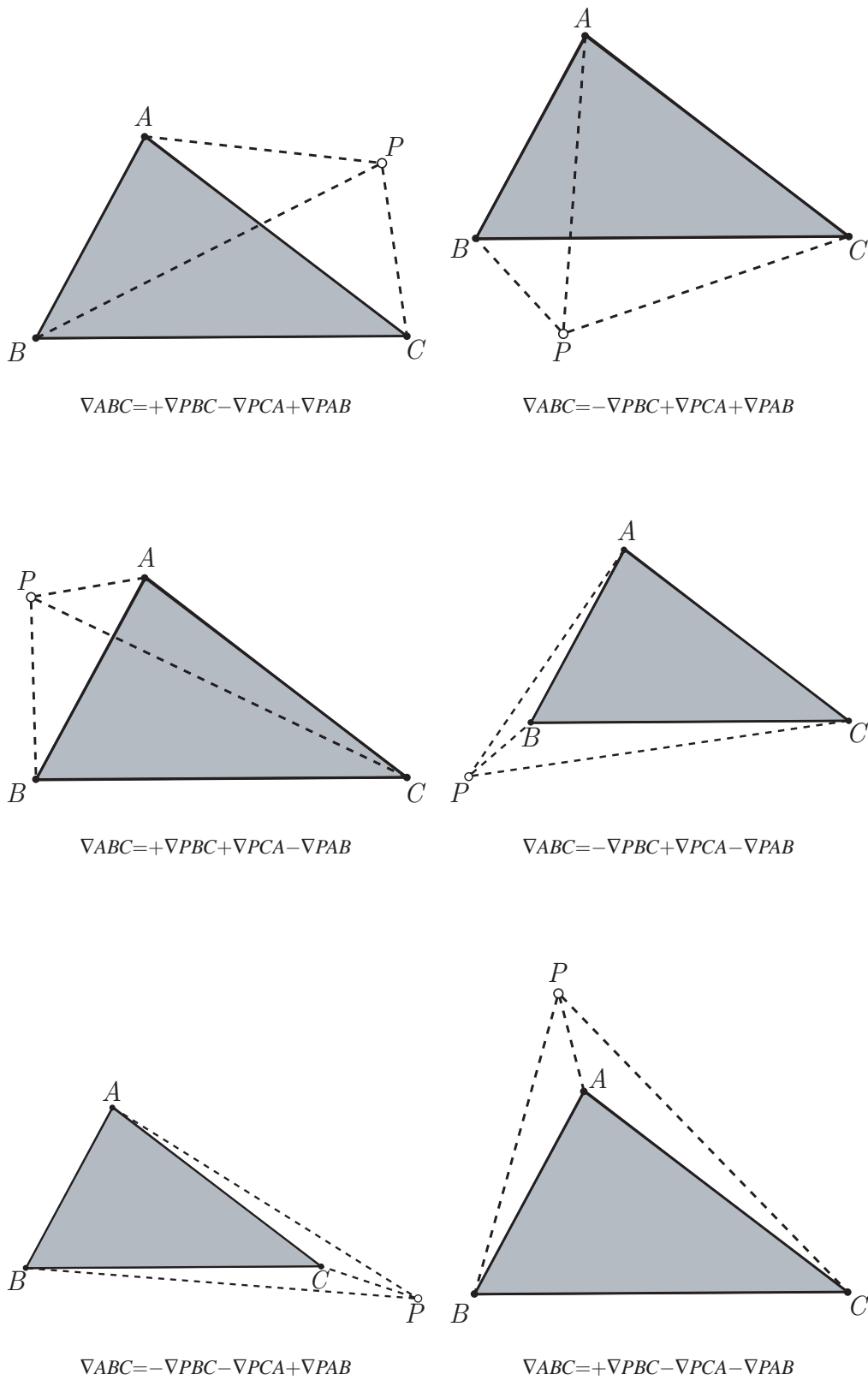


Figura 1.2:  $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ .

Perceba que ao tomar  $P$  no interior do triângulo  $\Delta ABC$ , temos todas as áreas dos sub-triângulos positivas e, assim, chamamos a região interior de  $(+ : + : +)$ . Se considerarmos

os pontos fora do triângulo  $\Delta ABC$ , teremos mais seis regiões para analisar, além dos pontos pertencentes aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ . A combinatória dos sinais é indicada na Figura 1.3.

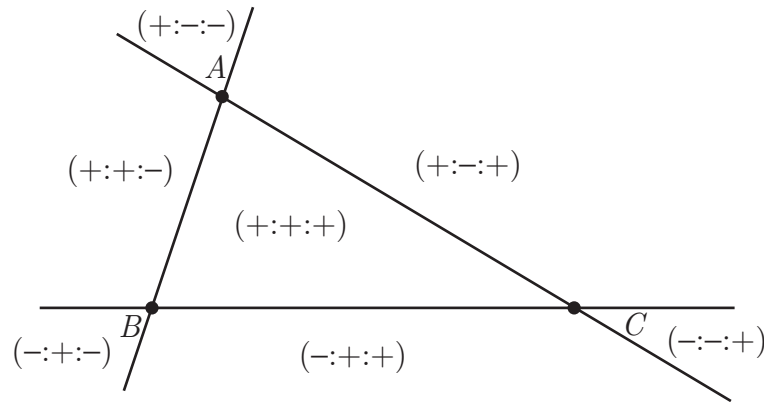


Figura 1.3: As 7 regiões mostrando os sinais de  $S_{PBC}$ ,  $S_{PCA}$  e  $S_{PAB}$ .

Perceba ainda que, conhecidas as áreas dos sub-triângulos formados por um ponto, temos uma condição necessária e suficiente para afirmar que este ponto está no interior de triângulo, caso essas três áreas sejam positivas.

Na seqüência, nosso objetivo é mostrar que se  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  são as coordenadas cartesianas de três pontos do plano, a área com sinal  $S_{ABC}$  é dada por

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D}, \quad \text{onde } \mathcal{D} = \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}.$$

Para isso, antes precisaremos demonstrar o seguinte resultado:

**Lema 1.2** Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  as coordenadas cartesianas dos vértices de um triângulo  $\Delta ABC$  e  $P = (x_P, y_P)$ ,  $Q = (x_Q, y_Q)$  e  $R = (x_R, y_R)$  as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo  $\Delta PQR$  obtido por uma rotação seguida de uma translação dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sejam também

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_f = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}.$$

Então:

- (1)  $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}$ .
- (2)  $|\mathcal{D}| = 2 \cdot \nabla ABC$ .
- (3) Se  $A, B$  e  $C$  são colineares, então  $\mathcal{D} = 0$ .
- (4) Se  $A, B$  e  $C$  estão dispostos no sentido anti-horário, então  $\mathcal{D} > 0$ .
- (5) Se  $A, B$  e  $C$  estão dispostos no sentido horário, então  $\mathcal{D} < 0$ .

*Demonstração:* Determinantes satisfazem as seguintes propriedades ([5]):

$$\begin{vmatrix} x_A + h & y_A + k & 1 \\ x_B + h & y_B + k & 1 \\ x_C + h & y_C + k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \quad (P_1)$$

$$\begin{vmatrix} mx_A - ny_A & nx_A + my_A & 1 \\ mx_B - ny_B & nx_B + my_B & 1 \\ mx_C - ny_C & nx_C + my_C & 1 \end{vmatrix} = (m^2 + n^2) \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \quad (P_2)$$

- (1) Sejam  $m = \cos(\theta)$  e  $n = \sin(\theta)$ .

Aplicando uma rotação  $R_\theta$  ao ponto  $A = (x_A, y_A)$ , obtemos o ponto

$$R_\theta(A) = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = (mx_A - ny_A, nx_A + my_A)$$

e, a partir daí, aplicando uma translação ao ponto  $R_\theta(A)$ , chegamos ao ponto

$$P = (x_P, y_P) = (mx_A - ny_A + h, nx_A + my_A + k).$$

Analogamente, obtemos  $Q = (x_Q, y_Q) = (mx_B - ny_B + h, nx_B + my_B + k)$  e também temos

$R = (x_R, y_R) = (nx_C - ny_C + h, nx_C + my_C + k)$ . Assim,

$$\mathcal{D}_f = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mx_A - ny_A + h & nx_A + my_A + k & 1 \\ mx_B - ny_B + h & nx_B + my_B + k & 1 \\ mx_C - ny_C + h & nx_C + my_C + k & 1 \end{vmatrix}.$$

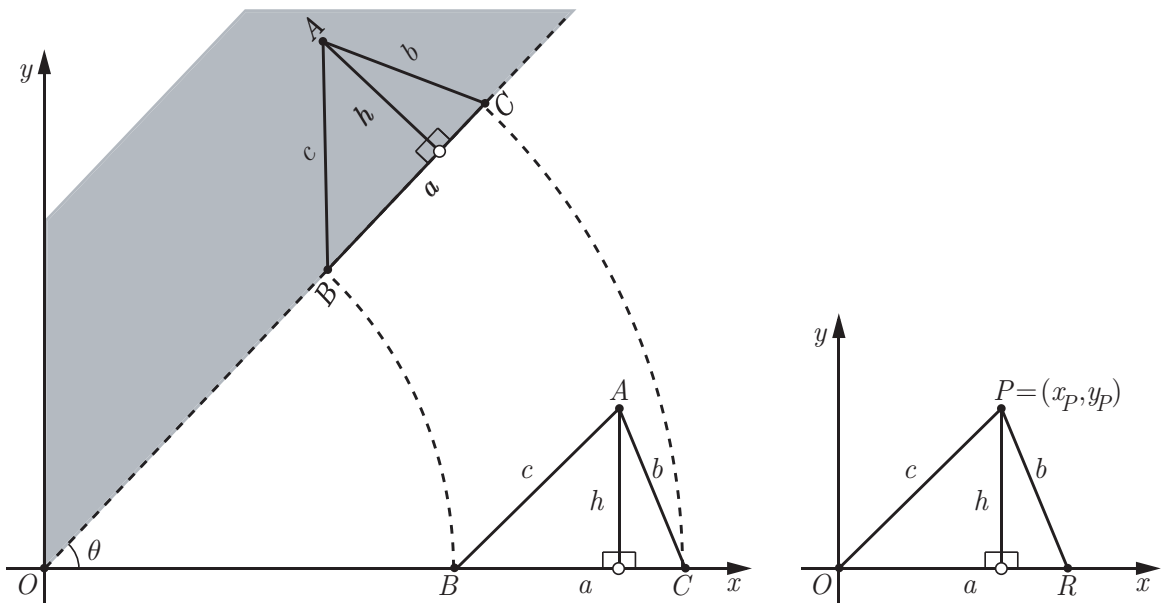
Daí, de  $(P_1)$  e de  $(P_2)$ , temos que



$$\mathcal{D}_f = \begin{vmatrix} mx_A - ny_A & nx_A + my_A & 1 \\ mx_B - ny_B & nx_B + my_B & 1 \\ mx_C - ny_C & nx_C + my_C & 1 \end{vmatrix} = (m^2 + n^2) \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Como  $m^2 + n^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ , segue-se que  $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}$ .

- (2) Na figura seguinte, aplicamos ao triângulo  $\Delta ABC$  uma rotação de ângulo  $-\theta$  (onde  $\theta$  é a inclinação da reta  $\overleftrightarrow{BC}$ ) de forma que  $B$  e  $C$  ficassem sobre o eixo  $X$  e, em seguida, aplicamos uma translação levando  $B$  até  $O = (0,0)$ ,  $C$  até  $R = (a,0)$ , com  $a > 0$  e  $A$  até  $P = (x_P, y_P)$ , com  $y_P = -h$  ou  $y_P = +h$ , dependendo da orientação do triângulo  $\Delta ABC$ .



Do Lema 1.2 (1), temos  $|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}_f| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{pmatrix} \right| = |ah| = 2 \cdot \nabla ABC$ .

- (3) Perceba que, quando  $A, B$  e  $C$  são colineares, temos  $h = 0$  o que acarreta  $\mathcal{D} = 0$ .
- (4) Perceba que, quando  $A$  está no semiplano hachurado,  $A, B$  e  $C$  ficam dispostos no sentido anti-horário e, neste caso, temos  $P = (x_P, h)$  o que acarreta  $\mathcal{D} > 0$ .
- (5) Perceba que, caso tomássemos o vértice  $A$  no semiplano oposto,  $A, B$  e  $C$  ficariam dispostos no sentido horário e, neste caso, teríamos  $P = (x_P, -h)$  o que acarretaria  $\mathcal{D} < 0$ . ■

**Proposição 1.4** Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  as coordenadas cartesianas de três pontos no plano. Então a área com sinal  $S_{ABC}$  é dada por

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D} = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C). \quad (1.2)
\end{aligned}$$

Note que, em particular, a área com sinal do triângulo  $\Delta ABC$  é uma função polinomial das coordenadas dos vértices do triângulo.

*Demonstração:* Para a demonstração, vamos considerar casos.

- (1) Para  $A$ ,  $B$  e  $C$  colineares, temos pela definição de área com sinal que  $S_{ABC} = 0$  e pelo Lema 1.2 (3),  $\mathcal{D} = 0$ . Neste caso, vale que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D}.$$

- (2) Para  $A$ ,  $B$  e  $C$  dispostos no sentido anti-horário, temos pela definição de área com sinal e pelo Lema 1.2 (2) que  $S_{ABC} = +\nabla ABC = |\mathcal{D}|/2$  e pelo Lema 1.2 (4),  $\mathcal{D} > 0$ . Neste caso, como  $|\mathcal{D}| = \mathcal{D}$ , vale que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D}.$$

- (3) Para  $A$ ,  $B$  e  $C$  dispostos no sentido horário, temos pela definição de área com sinal e pelo Lema 1.2 (2) que  $S_{ABC} = -\nabla ABC = -|\mathcal{D}|/2$  e pelo Lema 1.2 (5),  $\mathcal{D} < 0$ . Neste caso, como  $|\mathcal{D}| = -\mathcal{D}$ , vale que

$$S_{ABC} = -\frac{1}{2} \cdot (-\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D}.$$

De (1), (2) e (3), quaisquer que sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$ , temos  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D}$ . ■

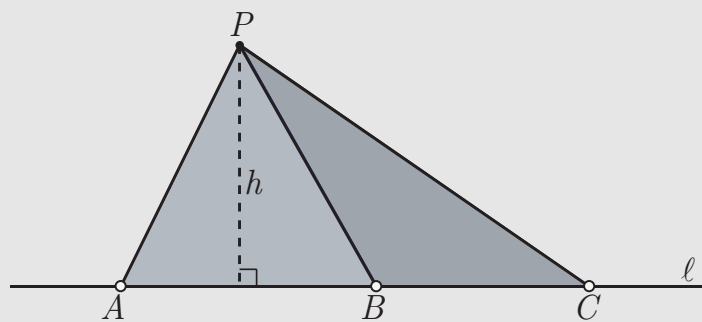
**Observação 1.2** Perceba que definindo-se  $\mathcal{S} = S_{ABC}$ , teremos  $\mathcal{D} = 2\mathcal{S}$ . ■

**Observação 1.3** Note que, com a expressão 1.2, é possível demonstrar a relação 1.1 diretamente, sem a necessidade de considerar separadamente cada um dos sete casos das figuras 1.1 e 1.2. De fato: verificar a validade de 1.1 é verificar se um polinômio nas duas variáveis  $x_P$  e  $y_P$  é identicamente nulo. Se o fizermos para  $x_P$  e  $y_P$  em um aberto, isto é, se demonstrarmos que este polinômio se anula em um conjunto aberto, concluiremos que ele se anula sempre. Dito de outra maneira: se demonstrarmos que a relação 1.1 é verdadeira para apenas um dos

sete casos das figuras 1.1 e 1.2, estaremos demonstrando que ela é verdadeira para todos os casos e esta idéia será usada com muita freqüência. ■

## 1.5 Teorema do co-lado

**Proposição 1.5** Triângulos com alturas iguais têm áreas com sinal proporcionais às medidas com sinal de suas bases.



$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Figura 1.4: Proporção entre áreas com sinal e bases de triângulos de mesma altura .

*Demonstração:* Considere o caso particular da Figura 1.4, com  $B$  entre  $A$  e  $C$  e os triângulos  $\Delta PAB$  e  $\Delta PBC$  orientados no sentido anti-horário. Tomando  $|AB|$  e  $|BC|$  como bases, os triângulos  $\Delta PAB$  e  $\Delta PBC$  têm a mesma altura  $h$ . Logo,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\nabla PAB}{\nabla PBC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Os demais casos ( $A$  entre  $B$  e  $C$ ,  $C$  entre  $A$  e  $B$ , os triângulos orientados no sentido horário ou no sentido anti-horário) são tratados analogamente ou, se preferir, basta usar o argumento da Observação 1.3: um caso prova todos os demais. ■

Outra forma de interpretar essa igualdade é observar na Figura 1.4 que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são três pontos colineares distintos e  $P$  é um ponto que não pertence à reta  $\ell$  que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Assim, a equação

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

nos diz que, em ocorrendo as condições anteriores, podemos substituir uma divisão de áreas com sinal que envolve o ponto  $P$  por uma razão de medidas de segmentos orientados onde  $P$

não aparece, isto é, podemos usar a equação para eliminar o ponto  $P$  daquela expressão. Evidentemente, o resultado continua válido mesmo quando  $P$  não aparece no início da expressão:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

**Teorema 1.1** (O TEOREMA DO CO-LADO) Se o ponto  $X \neq P$  é a interseção das retas  $\overleftrightarrow{AP}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , então

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}.$$

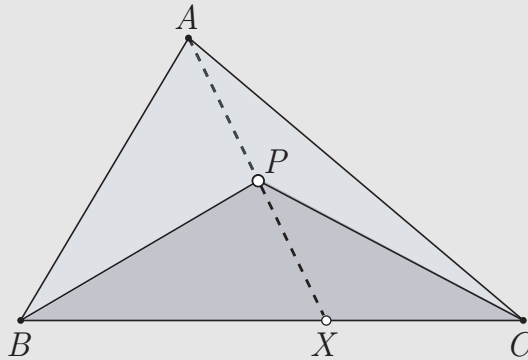


Figura 1.5: O Teorema do co-lado:  $S_{ABC}/S_{PBC} = \overline{AX}/\overline{PX}$ .

*Demonstração:* Pela Proposição 1.5 temos

- (a)  $B, X$  e  $C$  são colineares e  $A$  não pertence à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , logo  $S_{ABC}/S_{ABX} = \overline{BC}/\overline{BX}$ .
- (b)  $A, P$  e  $X$  são colineares e  $B$  não pertence à reta  $\overleftrightarrow{AP}$ , logo  $S_{ABX}/S_{PBX} = \overline{AX}/\overline{PX}$ .
- (c)  $B, X$  e  $C$  são colineares e  $P$  não pertence à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , logo  $S_{PBX}/S_{PBC} = \overline{BX}/\overline{BC}$ . Daí,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABX}} \cdot \frac{S_{ABX}}{S_{PBX}} \cdot \frac{S_{PBX}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}. \quad \blacksquare$$

O Teorema do co-lado (que é aplicado a triângulos com um lado comum) nos fornece uma relação entre a área do triângulo  $\Delta ABC$  e a área do sub-triângulo  $\Delta PBC$ . Observe na Figura 1.5 os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta PBC$  ( $\overline{BC}$  é um lado comum) e o ponto  $X = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{BC}$ . Assim, a equação

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}}$$

nos diz que, em ocorrendo as condições anteriores, podemos substituir uma razão entre medidas de segmentos orientados envolvendo o ponto  $X$  por uma razão entre áreas com sinal onde  $X$  não

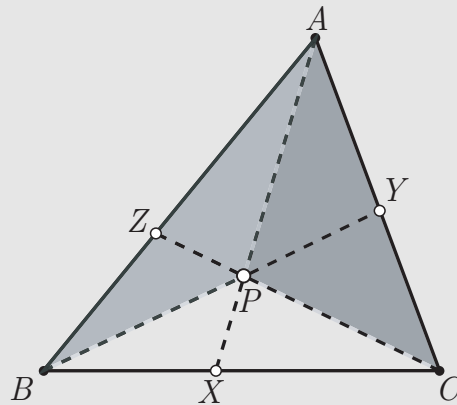
aparece, isto é, podemos usar a equação para eliminar  $X$  daquela expressão (que será substituído por  $BC$ ).

A ferramenta básica para atacar problemas de geometria é a semelhança (ou congruência) de triângulos. Contudo, nem sempre é óbvio identificar quais triângulos são semelhantes na configuração geométrica descrita pelo problema. Para obter triângulos semelhantes, lança-se mão de retas auxiliares nada intuitivas. Nessas configurações geométricas, é muito mais fácil encontrar triângulos com um lado comum do que triângulos semelhantes.

O próximo resultado é apenas uma outra forma de se escrever o Teorema do co-lado e ele será muito conveniente para os cálculos e demonstrações das próximas seções.

**Corolário 1.1** Se um ponto  $P$  não pertence a qualquer dos lados de um triângulo  $\triangle ABC$  e a reta  $\overleftrightarrow{AP}$  corta a reta  $\overleftrightarrow{BC}$  em  $X$ , então

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}.$$



*Demonstração:* Perceba na figura que os triângulos  $\triangle BPA$  e  $\triangle CPA$  têm o lado  $\overleftrightarrow{PA}$  em comum. Como  $X \neq C$  e  $X = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{PA}$ , temos pelo Teorema do co-lado que

$$\frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}.$$

Daí e do fato que  $S_{BPA} = S_{PAB}$ ,  $S_{CPA} = -S_{PCA}$  e  $\overline{CX} = -\overline{XC}$ , temos que

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{S_{BPA}}{-S_{CPA}} = \frac{\overline{BX}}{-\overline{CX}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}.$$

■

## 1.6 Teorema de Ceva

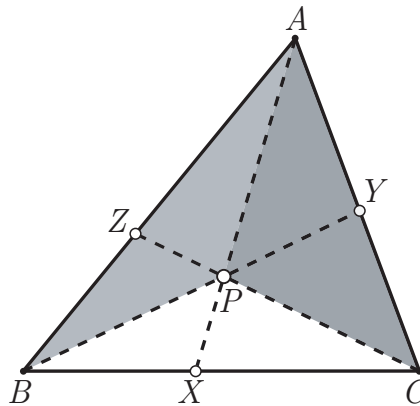
Este teorema foi demonstrado pelo matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734) e com ele é possível unificar vários resultados como a concorrência das medianas, bissetrizes e alturas de um triângulo. Retas em um triângulo que ligam um vértice com um ponto do lado oposto são denominadas *cevianas do triângulo* (assim, medianas, bissetrizes e alturas são cevianas). O Teorema de Ceva estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas de um triângulo sejam concorrentes.

**Teorema 1.2 (CEVA)** Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pontos situados, respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$  de um triângulo  $\triangle ABC$ .

As cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes  
se, e somente se,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1.$$

*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que as retas  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  e  $\overleftrightarrow{CZ}$  sejam concorrentes em  $P$ , conforme a figura abaixo.



Pelo Corolário 1.1, temos que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}, \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}}$$

↓

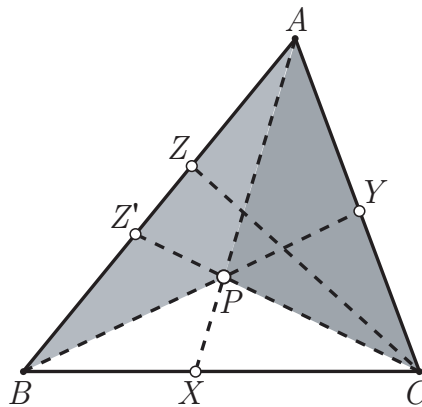
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} \cdot \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}} = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Admita que

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

e suponha, para uma contradição, que  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  não são concorrentes. Tomando  $Z'$  sobre  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $\overleftrightarrow{CZ'}$  passa por  $P = \overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BY}$ , podemos aplicar o resultado que demonstramos em ( $\Rightarrow$ ) para garantir que

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1.$$



Daí e da hipótese, temos

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \Rightarrow \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}},$$

de onde podemos afirmar que  $Z'$  e  $Z$  dividem  $\overline{AB}$  na mesma razão. Daí e da unicidade do ponto divisor, concluímos que  $Z' = Z$  e como  $\overline{CZ'}$  passa pelo ponto  $P$ , então  $\overline{CZ}$  passa por  $P$ , o que caracteriza uma contradição por negar a hipótese, mostrando assim que  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes. ■

Evidentemente, o teorema que acabamos de demonstrar não é válido para qualquer escolha dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$ . Por exemplo, o triângulo  $\Delta ABC$  deve ser não-degenerado ( $S_{ABC} \neq 0$ ) e o ponto  $P$  deve ser tal que as interseções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  sejam todas normais (existe apenas um ponto de interseção entre cada par de retas, de forma que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  estejam bem definidos). Estas condições são denominadas *condições de não-degenerescência* do teorema.

**Exemplo 1.3** Mostraremos que as medianas, as bissetrizes internas e as alturas de um triângulo são concorrentes.

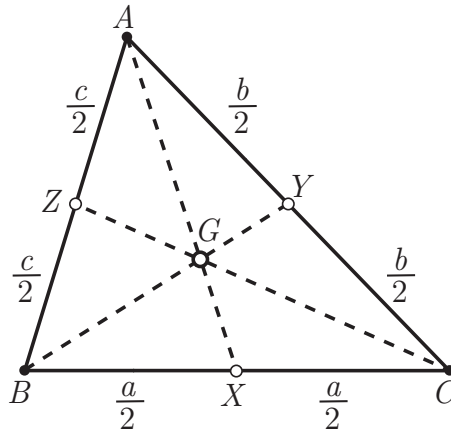
Suponhamos, para os três casos, que

$$|BC| = a, \quad |CA| = b, \quad |AB| = c, \quad h_a, \quad h_b \quad \text{e} \quad h_c$$

são as medidas euclidianas dos lados e das alturas de um triângulo  $\Delta ABC$ .

- (1) Quando as cevianas  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  e  $\overleftrightarrow{CZ}$  são medianas,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são pontos médios dos lados do triângulo  $\Delta ABC$ , valendo os dados abaixo, de onde obtemos

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AB}/2}{\overline{AB}/2} \cdot \frac{\overline{BC}/2}{\overline{BC}/2} \cdot \frac{\overline{CA}/2}{\overline{CA}/2} = 1.$$



o que mostra que as medianas são concorrentes. O *baricentro*, ponto  $G$  de encontro das medianas, é o centro  $X(2)$  em ETC.

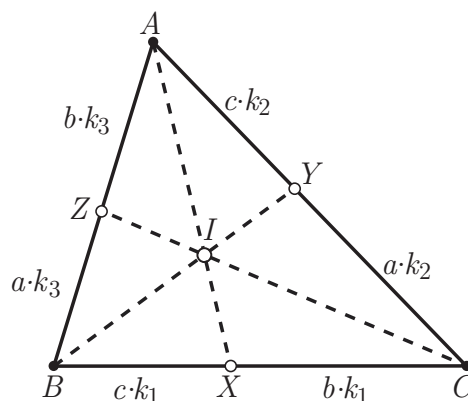
- (2) Usando o teorema da bissetriz interna no triângulo  $\Delta ABC$ , obtemos as igualdades

$$\frac{|BX|}{c} = \frac{|XC|}{b} = k_1, \quad \frac{|CY|}{a} = \frac{|YA|}{c} = k_2 \quad \text{e} \quad \frac{|AZ|}{b} = \frac{|ZB|}{a} = k_3,$$

onde  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são números reais não-nulos, justificando os dados da figura seguinte. Daí,

$$\left| \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \right| = \left| \frac{b \cdot k_3}{a \cdot k_3} \cdot \frac{c \cdot k_1}{b \cdot k_1} \cdot \frac{a \cdot k_2}{c \cdot k_2} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1,$$

pois, como  $\overline{AZ}/\overline{ZB} > 0$ ,  $\overline{BX}/\overline{XC} > 0$  e  $\overline{CY}/\overline{YA} > 0$  (para qualquer orientação dos lados), fica eliminada a hipótese deste produto ser igual a  $-1$ , mostrando assim que as bissetrizes internas também são concorrentes. O *incentro*, ponto  $I$  de encontro das bissetrizes internas, é o centro  $X(1)$  em ETC.

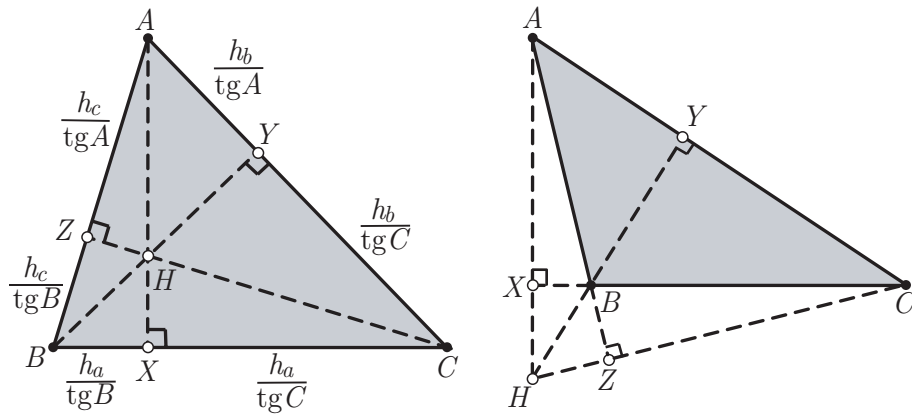




(3) Quando o triângulo é retângulo, as três alturas (a altura relativa à hipotenusa e os dois catetos) encontram-se no ângulo reto. Neste caso, as três alturas são concorrentes. Para triângulos não retângulos, como  $\text{tg} B = h_a/|BX|$ , valem os dados abaixo, de onde obtemos

$$\left| \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \right| = \left| \frac{h_c/\text{tg} A}{h_c/\text{tg} B} \cdot \frac{h_a/\text{tg} B}{h_a/\text{tg} C} \cdot \frac{h_b/\text{tg} C}{h_b/\text{tg} A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1,$$

pois, como os três fatores são positivos (triângulo acutângulo) ou um é positivo e dois são negativos (triângulo obtusângulo), fica eliminada a hipótese desse produto ser igual a  $-1$ , mostrando assim que as alturas são concorrentes. O *ortocentro*, ponto  $H$  de encontro das alturas, é o centro  $X(4)$  em ETC.



■

**Observação 1.4** Em se tratando de mostrar que mediatrizes são concorrentes, não podemos aplicar o teorema de Ceva, pois mediatrizes não são cevianas. Para isso, tomemos na Figura 1.6 o triângulo  $\Delta DEF$ , denominado *triângulo medial*, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

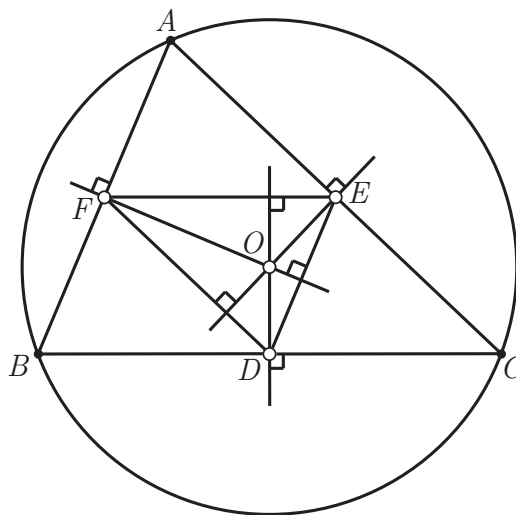
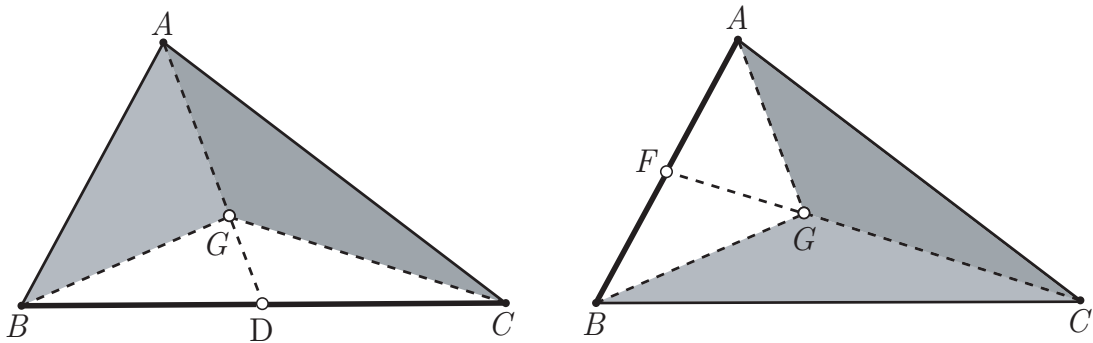


Figura 1.6: Circuncentro  $O$  como ortocentro do triângulo medial.

Como os lados do triângulo medial  $\Delta DEF$  são paralelos aos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$ , as mediatrizes dos lados do triângulo  $\Delta ABC$  são também perpendiculares aos lados do triângulo medial  $\Delta DEF$ . Assim, as mediatrizes dos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$  são também alturas do triângulo medial  $\Delta DEF$  e, portanto, concorrentes. O *circuncentro*, ponto  $O$  de encontro das mediatrizes, é o centro  $X(3)$  em ETC. ■

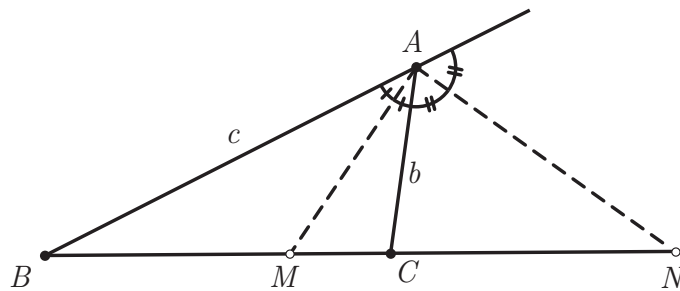
**Exemplo 1.4** Mostraremos que, se  $G$  é o baricentro do triângulo  $\Delta ABC$ , então os sub-triângulos  $\Delta GBC$ ,  $\Delta GCA$  e  $\Delta GAB$  são equivalentes, isto é, eles possuem a mesma área (euclidiana).



Seja  $G$  o baricentro do triângulo  $\Delta ABC$  de área  $\mathcal{S} = S_{ABC}$ . Do Corolário 1.1, temos

$$\frac{S_{GAB}}{S_{GCA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{S_{GCA}}{S_{GBC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \quad \Rightarrow \quad S_{GAB} = S_{GCA} = S_{GBC} = \frac{\mathcal{S}}{3}.$$

**Exemplo 1.5** Mostraremos que os pés das bissetrizes interna e externa traçadas do vértice  $A$  de um triângulo  $\Delta ABC$  dividem harmonicamente o lado oposto  $\overline{BC}$ .



Aplicando-se os teoremas da bissetriz interna e da bissetriz externa à figura anterior, temos que

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{c}{b} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = -\frac{c}{b}$$

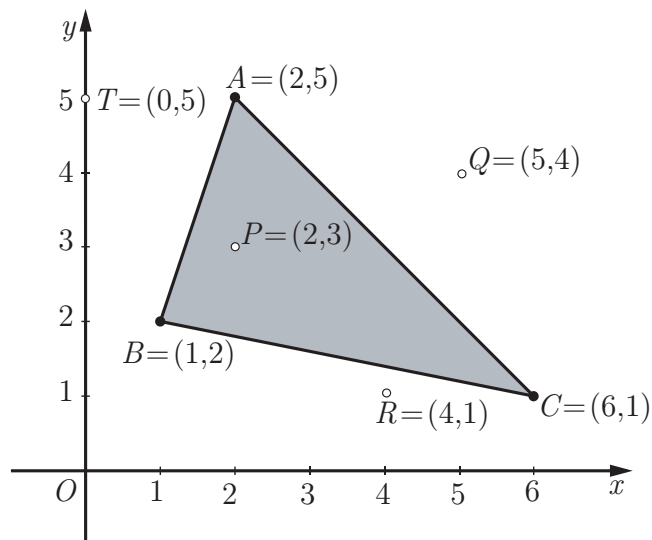
↓

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}},$$

mostrando que  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{BC}$ . ■

## 2 Coordenadas baricêntricas

A figura abaixo mostra as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo  $\Delta ABC$  e dos pontos  $P, R, Q$  e  $T$ .



A média ponderada  $M_P$  dos vértices  $A, B$  e  $C$  com pesos 3, 4 e 1 é

$$M_P = \frac{3A + 4B + 1C}{3 + 4 + 1} = \frac{3(2,5) + 4(1,2) + 1(6,1)}{8} = \frac{(16,24)}{8} = (2,3) = P$$

o que nos permite, tomando o triângulo  $\Delta ABC$  como referência, associar ao ponto  $P$  o terno ordenado de números reais formado por aqueles pesos, escrevendo  $P = (3 : 4 : 1)$ .

Da igualdade

$$R = (4,1) = \frac{-1(2,5) + 4(1,2) + 5(6,1)}{8} = \frac{-1A + 4B + 5C}{-1 + 4 + 5},$$

temos que  $R$  é média ponderada de  $A, B$  e  $C$  com pesos  $-1, 4$  e  $5$  o que nos permite, tomando o triângulo  $\Delta ABC$  como referência, escrever  $R = (-1 : 4 : 5)$ . De forma análoga, verifica-se que

- $Q = (7 : -4 : 5)$ , ou seja,  $Q$  é média ponderada de  $A, B$  e  $C$  com pesos 7,  $-4$  e 5 e
- $T = (7 : 4 : -3)$ , ou seja,  $T$  é média ponderada de  $A, B$  e  $C$  com pesos 7, 4 e  $-3$ .

De forma geral, para pesos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , com  $u + v + w \neq 0$ , o ponto  $P$  obtido pela média ponderada de  $A$ ,  $B$  e  $C$  com estes pesos é dado por

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

## 2.1 Definição de coordenadas baricêntricas

**Definição 2.1** (COORDENADAS BARICÊNTRICAS) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices de um triângulo  $\triangle ABC$  e  $P$  um ponto do plano. Dizemos que  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as *coordenadas baricêntricas* de  $P$  em relação ao triângulo  $\triangle ABC$  se

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w},$$

isto é, se o ponto  $P$  pode ser obtido como média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , respectivamente. Desta maneira, o ponto  $P$  passa a ser identificado por esses pesos e, neste caso, usaremos a notação

$$P = (u : v : w).$$

Um mesmo ponto  $P$  pode ser representado por mais de uma tripla de coordenadas baricêntricas. Por exemplo, se  $P = (2 : 5 : 3)$  e  $Q = (2k : 5k : 3k)$ , com  $k \neq 0$ , então  $P = Q$ . De fato:

$$Q = \frac{2kA + 5kB + 3kC}{2k + 5k + 3k} = \frac{2A + 5B + 3C}{2 + 5 + 3} = P.$$

A próxima proposição mostra que qualquer outra tripla de coordenadas baricêntricas para o ponto  $P$  deve ser obrigatoriamente da forma  $Q = (2k : 5k : 3k)$ , com  $k \neq 0$ .

**Proposição 2.1** Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  as coordenadas baricêntricas dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  em relação a um triângulo de referência  $\triangle ABC$ .

$$P_1 = P_2$$

se, e somente se,

existe um número real não nulo  $k$  tal que  $u_2 = ku_1$ ,  $v_2 = kv_1$  e  $w_2 = kw_1$ .

*Demonstração:* Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  as coordenadas baricêntricas dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  em relação a um triângulo de referência  $\triangle ABC$  de área  $S$  e  $P = (u : v : w)$

as coordenadas baricêntricas de um ponto qualquer do plano. Com essas hipóteses podemos escrever

$$\begin{aligned}(u + v + w) \cdot P &= uA + vB + wC, \\ (u_1 + v_1 + w_1) \cdot P_1 &= u_1A + v_1B + w_1C \text{ e} \\ (u_2 + v_2 + w_2) \cdot P_2 &= u_2A + v_2B + w_2C,\end{aligned}$$

onde

$$u + v + w \neq 0, \quad u_1 + v_1 + w_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad u_2 + v_2 + w_2 \neq 0.$$

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos  $P_1 = P_2$ .

Dessa hipótese temos que  $S_{PP_1P_2} = 0$  ou seja

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{ux_A + vx_B + wx_C}{u + v + w} & \frac{uy_A + vy_B + wy_C}{u + v + w} & 1 \\ \frac{u_1x_A + v_1x_B + w_1x_C}{u_1 + v_1 + w_1} & \frac{u_1y_A + v_1y_B + w_1y_C}{u_1 + v_1 + w_1} & 1 \\ \frac{u_2x_A + v_2x_B + w_2x_C}{u_2 + v_2 + w_2} & \frac{u_2y_A + v_2y_B + w_2y_C}{u_2 + v_2 + w_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicando-se as linhas por  $u + v + w$ ,  $u_1 + v_1 + w_1$  e  $u_2 + v_2 + w_2$ , temos

$$\begin{vmatrix} ux_A + vx_B + wx_C & uy_A + vy_B + wy_C & u + v + w \\ u_1x_A + v_1x_B + w_1x_C & u_1y_A + v_1y_B + w_1y_C & u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2x_A + v_2x_B + w_2x_C & u_2y_A + v_2y_B + w_2y_C & u_2 + v_2 + w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos permite escrever

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot S_{ABC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Como o determinante acima se anula para quaisquer valores de  $u$ ,  $v$  e  $w$  (primeira linha), temos que a terceira linha é múltipla da segunda, ou seja, existe um número real não-nulo  $k$  tal que  $u_2 = ku_1$ ,  $v_2 = kv_1$  e  $w_2 = kw_1$  ([5]).

( $\Leftarrow$ ) Suponha que existe um número real não nulo  $k$  tal que  $u_2 = ku_1$ ,  $v_2 = kv_1$  e  $w_2 = kw_1$ .

Dessa hipótese e da definição de coordenadas baricêntricas, temos que

$$P_2 = \frac{u_2A + v_2B + w_2C}{u_2 + v_2 + w_2} = \frac{ku_1A + kv_1B + kw_1C}{ku_1 + kv_1 + kw_1} = \frac{u_1A + v_1B + w_1C}{u_1 + v_1 + w_1} = P_1.$$

■

## 2.2 Coordenadas baricêntricas dos vértices, dos pontos médios dos lados e do baricentro do triângulo de referência

Usaremos a Definição 2.1 para calcular as coordenadas baricêntricas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , dos pontos médios  $D$ ,  $E$  e  $F$  dos lados e do baricentro  $G$  do triângulo de referência  $\triangle ABC$ .

- (1) Coordenadas baricêntricas dos vértices do triângulo de referência.

Como para o vértice  $A$  vale a igualdade

$$A = \frac{1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C}{1 + 0 + 0},$$

concluimos que  $A$  é média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos 1, 0 e 0. Assim, as coordenadas baricêntricas do vértice  $A$  são dadas por

$$A = (1 : 0 : 0).$$

Analogamente, temos  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ .

- (2) Coordenadas baricêntricas dos pontos médios dos lados do triângulo de referência.

Como para o ponto  $D$  (médio do lado  $\overline{BC}$ ) vale a igualdade

$$D = \frac{B + C}{2} = \frac{0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C}{0 + 1 + 1},$$

concluimos que  $D$  é média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos 0, 1 e 1. Assim, as coordenadas baricêntricas do ponto médio do lado  $\overline{BC}$  são dadas por

$$D = (0 : 1 : 1).$$

Analogamente, temos  $E = (1 : 0 : 1)$  e  $F = (1 : 1 : 0)$ .

- (3) Coordenadas baricêntricas do baricentro  $G$ . Como, para o baricentro  $G$  vale a igualdade

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \frac{1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C}{1 + 1 + 1},$$

concluimos que o baricentro  $G$  é média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos 1, 1 e 1. Assim, as coordenadas baricêntricas do baricentro  $G$  são dadas por  $G = (1 : 1 : 1)$ .

**Observação 2.1** Perceba que as coordenadas baricêntricas desses sete pontos não sofreriam alteração caso mudássemos as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo de referência  $\triangle ABC$ , pois elas não foram usadas no cálculo das coordenadas baricêntricas desses pontos. ■

## 2.3 Relação entre coordenadas baricêntricas e área com sinal

**Proposição 2.2** (COORDENADAS BARICÊNTRICAS E ÁREA COM SINAL) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices de um triângulo de referência  $\Delta ABC$  e  $P$  um ponto qualquer do plano. As coordenadas baricêntricas do ponto  $P$  podem ser dadas por

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}),$$

isto é, as coordenadas baricêntricas de um ponto são proporcionais às áreas com sinal dos sub-triângulos que esse ponto  $P$  forma com os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo de referência  $\Delta ABC$  ou ainda, sendo  $P = (u : v : w)$ , então  $u : v : w = S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}$ .

*Demonstração:* Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo  $\Delta ABC$  e  $P = (x_P, y_P)$  as coordenadas cartesianas de um ponto do plano. Sabemos que a igualdade

$$\begin{vmatrix} x_P & x_P & y_P & 1 \\ x_A & x_A & y_A & 1 \\ x_B & x_B & y_B & 1 \\ x_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

é verdadeira, pois a primeira coluna é igual à segunda.

Desenvolvendo o determinante pela primeira coluna, temos:

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_C \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_B \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} - x_C \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$x_P \cdot (2 \cdot S_{ABC}) - x_A \cdot (2 \cdot S_{PBC}) - x_B \cdot (2 \cdot S_{PCA}) - x_C \cdot (2 \cdot S_{PAB}) = 0$$

↓

$$S_{ABC} \cdot x_P = S_{PBC} \cdot x_A + S_{PCA} \cdot x_B + S_{PAB} \cdot x_C. \quad (*)$$

Analogamente,

$$\begin{vmatrix} y_P & x_P & y_P & 1 \\ y_A & x_A & y_A & 1 \\ y_B & x_B & y_B & 1 \\ y_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos leva a

$$S_{ABC} \cdot y_P = S_{PBC} \cdot y_A + S_{PCA} \cdot y_B + S_{PAB} \cdot y_C.$$

Daí e de (\*) temos

$$S_{ABC} \cdot P = S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C.$$

Daí e pela propriedade da decomposição da área com sinal ( $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ ) vem que

$$P = \frac{S_{PBC} \cdot A + S_{PCA} \cdot B + S_{PAB} \cdot C}{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}. \quad (2.1)$$

A relação (2.1) nos diz que  $P$  é média ponderada dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  com pesos  $S_{PBC}$ ,  $S_{PCA}$  e  $S_{PAB}$ , mostrando que  $P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$ . ■

**Observação 2.2** Da relação (2.1) e do fato que a área de um triângulo é única e independente da origem adotada para as coordenadas cartesianas dos vértices, concluímos que:

- Qualquer ponto  $P$  do plano pode ser escrito como média ponderada dos vértices do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .
- As coordenadas baricêntricas são invariantes por qualquer transformação rígida (como rotações, translações e reflexões), já que essas preservam a área. ■

Na seqüência, usaremos a Proposição 2.2 para calcular as coordenadas baricêntricas dos vértices, dos pontos médios dos lados e do baricentro do triângulo de referência, já obtidas usando-se apenas a definição.

(1) Coordenadas baricêntricas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

Substituindo-se na Proposição 2.2 o ponto  $P$  pelo ponto  $A$ , temos  $A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB})$ .

Entretanto, como  $S_{ABC} = S$  e  $S_{ACA} = S_{AAB} = 0$ , podemos escrever

$$A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB}) = (S : 0 : 0) = (1 : 0 : 0).$$

Analogamente,  $B = (0 : 1 : 0)$  e  $C = (0 : 0 : 1)$ .



- (2) Coordenadas baricêntricas dos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , médios dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ .

Substituindo-se na Proposição 2.2 o ponto  $P$  pelo ponto  $D$ , temos  $D = (S_{DBC} : S_{DCA} : S_{DAB})$ .

Entretanto, como  $S_{DBC} = 0$  e  $S_{DCA} = S_{DAB} = \mathcal{S}/2$ , podemos escrever

$$D = (S_{DBC} : S_{DCA} : S_{DAB}) = (0 : \mathcal{S}/2 : \mathcal{S}/2) = (0 : 1 : 1).$$

Analogamente,  $E = (1 : 0 : 1)$  e  $F = (1 : 1 : 0)$ .

- (3) Coordenadas baricêntricas do baricentro  $G$ .

Substituindo-se na Proposição 2.2 o ponto  $P$  pelo ponto  $G$ , temos  $G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB})$ .

Entretanto, como  $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = \mathcal{S}/3$  (Exemplo 1.4 na página 25), podemos escrever que

$$G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB}) = (\mathcal{S}/3 : \mathcal{S}/3 : \mathcal{S}/3) = (1 : 1 : 1).$$

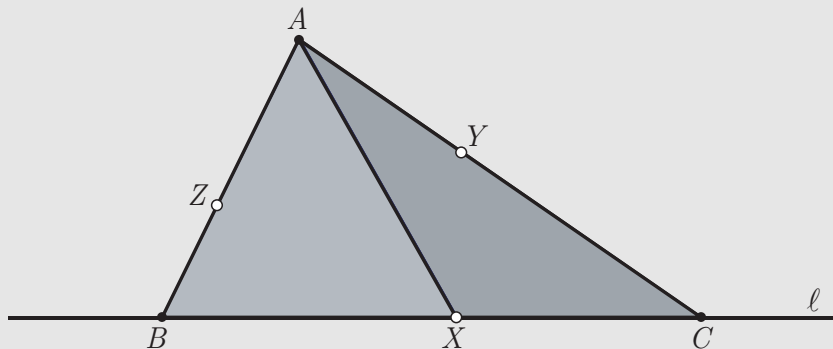
## 2.4 Coordenadas baricêntricas de pontos sobre os lados do triângulo de referência

**Proposição 2.3** (COORDENADAS BARICÊNTRICAS DE PONTOS SOBRE OS LADOS DO TRIÂNGULO DE REFERÊNCIA) Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pontos do plano. Temos que:

(1) O ponto  $X$  pertence ao lado  $\overleftrightarrow{BC}$  do  $\Delta ABC$  se, e somente se,  $X = (0 : \overline{XC} : \overline{BX})$ .

(2) O ponto  $Y$  pertence ao lado  $\overleftrightarrow{CA}$  do  $\Delta ABC$  se, e somente se,  $Y = (\overline{CY} : 0 : \overline{YA})$ .

(3) O ponto  $Z$  pertence ao lado  $\overleftrightarrow{AB}$  do  $\Delta ABC$  se, e somente se,  $Z = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : 0)$ .



*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $X$  um ponto pertencente ao lado  $\overleftrightarrow{BC}$  do triângulo  $\Delta ABC$ . Dessa hipótese, pela Proposição 1.5, vale que

$$X = (S_{XBC} : S_{XCA} : S_{XAB}) = (0 : S_{XCA} : S_{XAB}) = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}).$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $X = (0 : \overline{XC} : \overline{BX})$ .

Neste caso,  $S_{XBC} = 0$  (primeira componente nula) o que garante que  $X$ ,  $B$  e  $C$  são colineares. Daí,  $X$  pertence ao lado  $\overleftrightarrow{BC}$ .

Deixamos a cargo do leitor as demonstrações das Proposições 2.3 (2) e 2.3 (3) que são análogas à demonstração apresentada para o cálculo do ponto  $X$ . ■

Em particular, quando  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são, respectivamente, os pontos médios  $D$ ,  $E$  e  $F$  dos lados do triângulo de referência  $\triangle ABC$ , temos que

$$\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{2}, \quad \overline{CE} = \overline{EA} = \frac{\overline{CA}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AF} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

Daí e da Proposição 2.3, concluímos que

$$D = \left( 0 : \frac{\overline{BC}}{2} : \frac{\overline{BC}}{2} \right), \quad E = \left( \frac{\overline{CA}}{2} : 0 : \frac{\overline{CA}}{2} \right) \quad \text{e} \quad F = \left( \frac{\overline{AB}}{2} : \frac{\overline{AB}}{2} : 0 \right)$$

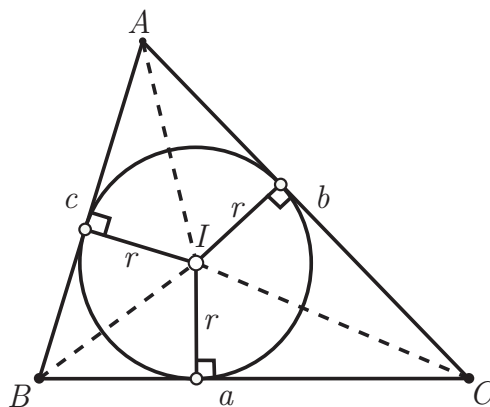
↓

$$D = (0 : 1 : 1), \quad E = (1 : 0 : 1) \quad \text{e} \quad F = (1 : 1 : 0).$$

## 2.5 Coordenadas baricêntricas do incentro

Observe na figura seguinte, onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas euclidianas dos lados e  $r$  é o raio do círculo inscrito no triângulo  $\triangle ABC$ , que

$$S_{IBC} = +\frac{a \cdot r}{2}, \quad S_{ICA} = +\frac{b \cdot r}{2} \quad \text{e} \quad S_{IAB} = +\frac{c \cdot r}{2}.$$



Daí e da Proposição 2.2, concluímos que

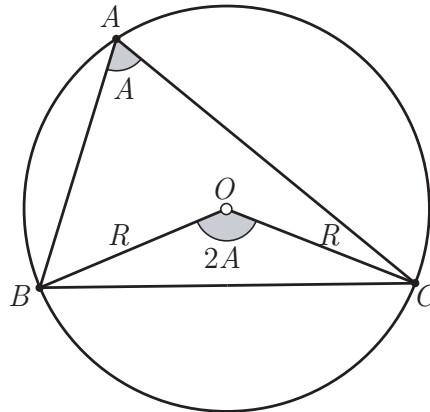
$$I = (S_{IBC} : S_{ICA} : S_{IAB}) = \left( \frac{a \cdot r}{2} : \frac{b \cdot r}{2} : \frac{c \cdot r}{2} \right) = (a : b : c).$$

## 2.6 Coordenadas baricêntricas do circuncentro

Observe na figura seguinte, onde  $R$  é o raio do círculo circunscrito ao triângulo  $\Delta ABC$ , que

$$S_{OBC} = + \frac{R^2 \cdot \text{sen}(2A)}{2} = \frac{R^2 \cdot 2 \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A}{2} = R^2 \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A$$

e, analogamente,  $S_{OCA} = R^2 \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B$  e  $S_{OAB} = R^2 \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C$ .



Daí concluímos que

$$\begin{aligned} O &= (S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}) \\ &= (R^2 \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A : R^2 \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B : R^2 \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C) \\ &= (R \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A : R \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B : R \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C). \end{aligned}$$

O teorema dos senos ( $a/\text{sen}A = 2R$ ) e o teorema dos cossenos ( $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos}A$ ) nos permitem escrever que

$$2R \cdot \text{sen}A = a \quad \text{e} \quad \text{cos}A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc},$$

com equações análogas para os ângulos  $B$  e  $C$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} O &= (2R \cdot \text{sen}A \cdot \text{cos}A : 2R \cdot \text{sen}B \cdot \text{cos}B : 2R \cdot \text{sen}C \cdot \text{cos}C) \\ &= \left( a \cdot \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right) : b \cdot \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \right) : c \cdot \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \right) \\ &= \left( \frac{a^2 \cdot (-a^2 + b^2 + c^2)}{2abc} : \frac{b^2 \cdot (a^2 - b^2 + c^2)}{2abc} : \frac{c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} \right). \end{aligned}$$

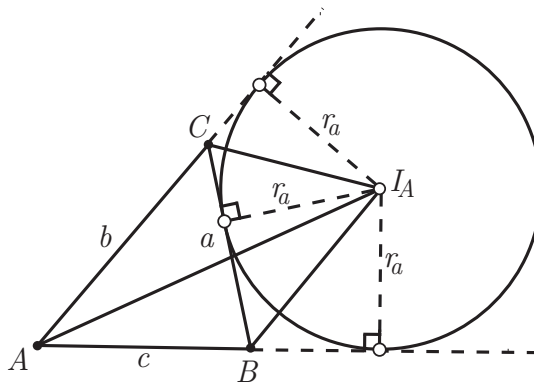
Multiplicando-se esta última equação por  $2abc$ , temos que

$$O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)).$$

## 2.7 Coordenadas baricêntricas dos ex-incentros

A figura seguinte mostra um círculo tangente ao lado  $\overline{BC}$  ( $|BC| = a$ ) e aos prolongamentos dos outros dois lados ( $|CA| = b$  e  $|AB| = c$ ) do triângulo de referência  $\Delta ABC$ . Este círculo e seu centro  $I_A$  são denominados, respectivamente, *círculo ex-inscrito* ao triângulo  $\Delta ABC$  e *ex-incentro*, relativos ao lado  $\overline{BC}$ . Sendo  $r_a$  o seu raio, temos que

$$S_{I_A BC} = -\frac{a \cdot r_a}{2}, \quad S_{I_A CA} = +\frac{b \cdot r_a}{2} \quad \text{e} \quad S_{I_A AB} = +\frac{c \cdot r_a}{2}.$$



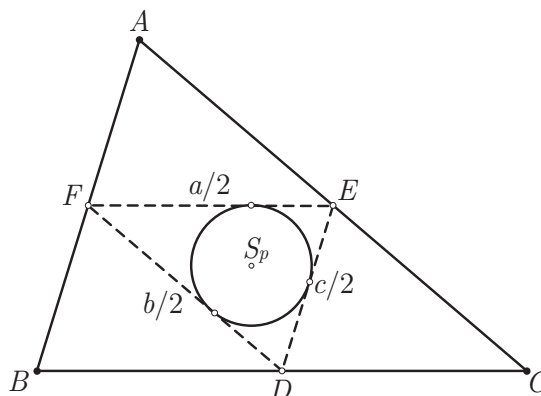
Daí concluímos que

$$I_A = (S_{I_A BC} : S_{I_A CA} : S_{I_A AB}) = \left( -\frac{a \cdot r_a}{2} : \frac{b \cdot r_a}{2} : \frac{c \cdot r_a}{2} \right) = (-a : b : c).$$

Analogamente,  $I_B = (a : -b : c)$  e  $I_C = (a : b : -c)$ .

## 2.8 Coordenadas baricêntricas do centro de Spieker

O *círculo de Spieker* de um triângulo de referência  $\Delta ABC$  é o círculo inscrito no seu triângulo medial  $\Delta DEF$ . O *centro de Spieker*, classificado como X(10) em ETC, nada mais é do que o centro deste círculo.



As coordenadas baricêntricas do incentro  $I$  de um triângulo  $\Delta ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dadas por  $I = (a : b : c)$ . Daí e da definição de coordenadas baricêntricas podemos afirmar que

$$(a + b + c) \cdot I = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C.$$

Pelo fato de  $S_p$  ser o incentro do triângulo medial  $\Delta DEF$  de lados  $a/2$ ,  $b/2$  e  $c/2$ , podemos então afirmar que

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) \cdot S_p &= \frac{a}{2} \cdot D + \frac{b}{2} \cdot E + \frac{c}{2} \cdot F \\ &\Downarrow \\ (a + b + c) \cdot S_p &= a \cdot D + b \cdot E + c \cdot F. \\ &\Downarrow \\ 2p \cdot S_p &= a \cdot \left(\frac{B+C}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{C+A}{2}\right) + c \cdot \left(\frac{A+B}{2}\right) \\ &\Downarrow \\ 4p \cdot S_p &= (b+c) \cdot A + (c+a) \cdot B + (a+b) \cdot C. \end{aligned}$$

Como  $(b+c) + (c+a) + (a+b) = 2a + 2b + 2c = 4p$ , temos que

$$S_p = \frac{(b+c) \cdot A + (c+a) \cdot B + (a+b) \cdot C}{(b+c) + (c+a) + (a+b)}$$

ou seja,  $S_p$  é média ponderada dos vértices do triângulo de referência  $\Delta ABC$  com pesos  $b+c$ ,  $c+a$  e  $a+b$ . Daí e da Definição 2.1, as coordenadas baricêntricas do centro de Spieker  $S_p$  são dadas por

$$S_p = (b+c : c+a : a+b) = (2p-a : 2p-b : 2p-c).$$

Para os cálculos das coordenadas baricêntricas do incentro, do circuncentro, dos ex-incentros e do centro de Spieker feitos anteriormente, mais uma vez consideramos casos particulares de figuras, tomando o triângulo  $\Delta ABC$  orientado no sentido anti-horário. Eles bastam para demonstrar o caso geral, pois pela Observação 1.3 na página 17, se uma relação (polinomial) é verdadeira para apenas um dos sete casos, ela é verdadeira para todos os casos. No resto do texto, usaremos esta técnica sem avisar explicitamente ao leitor.

Perceba também que, caso mudássemos a orientação do triângulo de referência  $\Delta ABC$ , as coordenadas baricêntricas de todos os pontos calculados teriam o sinal invertido. Multiplicando-as por  $k = -1$ , obteríamos as mesmas expressões encontradas acima e isto não altera as coordenadas baricêntricas em virtude da Proposição 2.1 na página 27.

**Proposição 2.4** A soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro

$$O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

é dada por  $4\mathcal{D}^2$ , onde  $\mathcal{D}$  é o dobro da área com sinal  $\mathcal{S}$  do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

*Demonstração:* Representando-se por  $t$  a soma das coordenadas do circuncentro, temos

$$\begin{aligned} t &= a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= (a + b + c) \cdot (-a + b + c) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b - c) \\ &= 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \\ &= 16 \cdot \mathcal{S}^2 \\ &= 4(2\mathcal{S})^2 \\ &= 4\mathcal{D}^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

**Observação 2.3** Da Proposição 2.4 e da relação 2.2, destacamos a igualdade

$$4\mathcal{D}^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

que será usada no cálculo das coordenadas baricêntricas de vários centros do triângulo. ■

## 2.9 Coordenadas baricêntricas homogêneas e exatas

Seja  $P$  um ponto tal que  $S_{PBC} = 5$ ,  $S_{PCA} = 3$  e  $S_{PAB} = 1$ . Neste caso, pela propriedade da decomposição da área com sinal, a área do triângulo de referência é

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = 5 + 3 + 1 = 9$$

e podemos ainda escrever que

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}) = (5 : 3 : 1) = (-5 : -3 : -1) = (5\pi : 3\pi : \pi) = \left(\frac{5}{9} : \frac{3}{9} : \frac{1}{9}\right) = \dots$$

e observar que, entre todas as possibilidades de representação das coordenadas baricêntricas deste ponto  $P$ , o terno ordenado  $(5 : 3 : 1)$  é o único que possui as três componentes iguais às áreas com sinal dos sub-triângulos e o terno ordenado  $(5/9 : 3/9 : 1/9)$  é o único cuja soma das componentes é igual a 1.

**Definição 2.2** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices do triângulo de referência  $\Delta ABC$ . Se  $P$  é um ponto de coordenadas baricêntricas  $P = (u : v : w)$ , suas coordenadas baricêntricas serão denominadas

- (1) *Exatas ou areais*, quando  $u = S_{PBC}$ ,  $v = S_{PCA}$  e  $w = S_{PAB}$ . Neste caso, pela propriedade da decomposição da área com sinal, teremos que  $u + v + w = S_{ABC}$ .
- (2) *Homogêneas*, quando  $u + v + w = 1$ .

Na seqüência, usaremos a Definição 2.2 para obter as coordenadas baricêntricas exatas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , dos pontos médios dos lados  $D$ ,  $E$  e  $F$ , do baricentro  $G$ , do incentro  $I$  e do circuncentro  $O$  do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

- (1) Coordenadas baricêntricas exatas dos vértices.

Como  $S_{ABC} = S$  e  $S_{ACA} = S_{AAB} = 0$ , temos que  $A = (S_{ABC} : S_{ACA} : S_{AAB}) = (S : 0 : 0)$ .

Analogamente,  $B = (0 : S : 0)$  e  $C = (0 : 0 : S)$ .

- (2) Coordenadas baricêntricas exatas dos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , médios dos lados.

Como  $S_{DBC} = 0$  e  $S_{DCA} = S_{DAB} = S/2$ , temos que

$$D = (S_{DBC} : S_{DCA} : S_{DAB}) = \left(0 : \frac{S}{2} : \frac{S}{2}\right).$$

Analogamente,  $E = (S/2 : 0 : S/2)$  e  $F = (S/2 : S/2 : 0)$ .

- (3) Coordenadas baricêntricas exatas do baricentro.

Como  $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = S/3$ , temos que

$$G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB}) = \left(\frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3}\right).$$

- (4) Coordenadas baricêntricas exatas do incentro.

Como  $S_{IBC} = a \cdot r/2$ ,  $S_{ICA} = b \cdot r/2$  e  $S_{IAB} = c \cdot r/2$ , temos que

$$I = (S_{IBC} : S_{ICA} : S_{IAB}) = \left(\frac{a \cdot r}{2} : \frac{b \cdot r}{2} : \frac{c \cdot r}{2}\right).$$

- (5) Coordenadas baricêntricas exatas do circuncentro.

Como  $S_{OBC} = (R^2 \cdot \text{sen} 2A)/2$ ,  $S_{OCA} = (R^2 \cdot \text{sen} 2B)/2$  e  $S_{OAB} = (R^2 \cdot \text{sen} 2C)/2$ , temos que

$$O = (S_{OBC} : S_{OCA} : S_{OAB}) = \left(\frac{R^2 \cdot \text{sen} 2A}{2} : \frac{R^2 \cdot \text{sen} 2B}{2} : \frac{R^2 \cdot \text{sen} 2C}{2}\right).$$

**Proposição 2.5** Seja  $P$  um ponto do plano de coordenadas baricêntricas  $P = (u : v : w)$ . Se  $u + v + w \neq 0$ , então as coordenadas baricêntricas homogêneas de  $P$  são dadas por

$$P = \left( \frac{u}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w} \right).$$

*Demonstração:* Somando-se as coordenadas baricêntricas do ponto  $P$ , temos

$$\frac{u}{u+v+w} + \frac{v}{u+v+w} + \frac{w}{u+v+w} = \frac{u+v+w}{u+v+w} = 1,$$

mostrando que essas coordenadas baricêntricas do ponto  $P$  estão na forma homogênea. ■

**Observação 2.4** A Proposição 2.5 mostra que se a soma das coordenadas baricêntricas de um ponto não é nula, é sempre possível obter as coordenadas baricêntricas homogêneas deste ponto, bastando para isso dividir cada componente pela soma das três. ■

Na seqüência, usaremos a Proposição 2.5 e a Definição 2.2 para obter as coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos médios dos lados  $D$ ,  $E$  e  $F$ , do baricentro  $G$ , do incentro  $I$ , do circuncentro  $O$  e dos ex-incentros  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$  do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

(1) Coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos médios dos lados.

Como  $D = (0 : 1 : 1)$  e a soma de suas coordenadas baricêntricas é 2, as coordenadas baricêntricas homogêneas do ponto médio da lado  $\overline{BC}$  são

$$D = \left( 0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \right).$$

Analogamente,  $E = (1/2 : 0 : 1/2)$  e  $F = (1/2 : 1/2 : 0)$ .

(2) Coordenadas baricêntricas homogêneas do baricentro.

Como  $G = (1 : 1 : 1)$  e a soma de suas coordenadas baricêntricas é 3, as coordenadas baricêntricas homogêneas do baricentro são

$$G = \left( \frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \right).$$

(3) Coordenadas baricêntricas homogêneas do incentro.

Como  $I = (a : b : c)$  e a soma de suas coordenadas homogêneas é  $2p$ , temos que

$$I = \left( \frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p} \right).$$



(4) Coordenadas baricêntricas homogêneas do circuncentro.

Como  $O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$  e a soma de suas coordenadas é  $4\mathcal{D}^2$ , temos que

$$O = \left( \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{4\mathcal{D}^2} : \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{4\mathcal{D}^2} : \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{4\mathcal{D}^2} \right).$$

(5) Coordenadas baricêntricas homogêneas dos ex-incentro.

Como  $I_A = (-a : b : c)$  e a soma de suas coordenadas baricêntricas é  $2(p - a)$ , temos que

$$I_A = \left( \frac{-a}{2(p-a)} : \frac{b}{2(p-a)} : \frac{c}{2(p-a)} \right),$$

$$\text{com } I_B = \left( \frac{a}{2(p-b)} : \frac{-b}{2(p-b)} : \frac{c}{2(p-b)} \right) \quad \text{e} \quad I_C = \left( \frac{a}{2(p-c)} : \frac{b}{2(p-c)} : \frac{-c}{2(p-c)} \right).$$

**Observação 2.5** Note que as coordenadas baricêntricas do baricentro, incentro e circuncentro possuem uma particularidade: as duas últimas componentes são obtidas a partir da primeira fazendo-se permutações. Mais precisamente, se a primeira componente é dada por  $f(a, b, c)$ , então as outras duas são dadas por  $f(b, c, a)$  e  $f(c, a, b)$ . Isto acontece porque o baricentro, incentro e ortocentro não dependem da maneira como os vértices do triângulo de referência são nomeados. Esta propriedade valerá para qualquer ponto com esta característica e será usada com frequência nos cálculos que faremos de outros centros do triângulo. Observe também que os ex-incentros e os pontos médios dos lados do triângulo de referência não possuem esta propriedade e este é um dos motivos deles não estarem catalogados em ETC. Para mais detalhes sobre as propriedades da função  $f$ , veja [10].

## 2.10 Ponto no infinito

A Definição 2.1 (página 27) pressupõe que a soma das coordenadas baricêntricas seja diferente de zero. Contudo, será útil considerarmos o caso em que esta soma seja igual a zero, o que nos leva à definição seguinte.

**Definição 2.3** (PONTO NO INFINITO) Seja  $P$  um ponto com coordenadas baricêntricas  $P = (u : v : w)$ . Dizemos que  $P$  é um *ponto no infinito* se  $u + v + w = 0$ .

No Apêndice A apresentamos uma interpretação geométrica para pontos no infinito usando, para isto, *coordenadas homogêneas*. É importante observar que pontos no infinito não são

pontos do plano euclidiano mas, sim, abstrações que dão consistência às operações sobre pontos que serão definidas a seguir.

## 2.11 Operações com coordenadas baricêntricas

**Definição 2.4** Sejam  $P_1$  e  $P_2$  pontos com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ . Ao ponto  $P$  de coordenadas baricêntricas

$$P = P_1 + P_2 = (u_1 + u_2 : v_1 + v_2 : w_1 + w_2)$$

denominamos *soma de  $P_1$  e  $P_2$* .

**Observação 2.6** A soma de dois pontos que não estão no infinito pode ser um ponto no infinito. De fato. Se  $P_1 = (2 : 3 : 5)$  e  $P_2 = (-6 : -1 : -3)$ , então  $P = P_1 + P_2 = (-4 : 2 : 2)$ , que é um ponto cuja soma das coordenadas baricêntricas é nula. É por este motivo que se faz necessário introduzir o conceito de pontos no infinito. Sem eles, a operação de adição não seria fechada. Note também que a soma de dois pontos no infinito é um ponto no infinito e que a soma de um ponto que não está no infinito com um ponto que está no infinito é um ponto que não está no infinito. ■

**Definição 2.5** Sejam  $k$  um número real e  $P_1$  um ponto com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ . Ao ponto  $P$  de coordenadas baricêntricas

$$P = k \cdot P_1 = (k \cdot u_1 : k \cdot v_1 : k \cdot w_1)$$

denominamos *multiplicação de  $P_1$  pelo escalar  $k$* .

Perceba que quando  $k \neq 0$ , então  $P = k \cdot P_1 = (k \cdot u_1 : k \cdot v_1 : k \cdot w_1) = (u_1 : v_1 : w_1) = P_1$  e quando  $k = 0$ , temos, naturalmente, que  $P = k \cdot P_1 = (0 : 0 : 0)$ .

**Definição 2.6** Sejam  $P_1$  e  $P_2$  pontos com coordenadas baricêntricas  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ . Ao ponto  $P$  de coordenadas baricêntricas

$$P = P_1 - P_2 = P_1 + (-1) \cdot P_2 = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2)$$

denominamos de *diferença de  $P_1$  e  $P_2$* .

**Observação 2.7** Quando as somas das coordenadas baricêntricas de dois pontos são iguais, dizemos que esses pontos estão com as coordenadas baricêntricas *balanceadas*. Assim, a diferença de dois pontos com coordenadas baricêntricas balanceadas é um ponto no infinito.

De fato, pois

$$u_1 + v_1 + w_1 = u_2 + v_2 + w_2 = s \quad \Rightarrow \quad (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) = s - s = 0. \quad \blacksquare$$

## 2.12 Ponto divisor de um segmento em uma dada razão

A proposição seguinte tem por objetivo determinar as coordenadas baricêntricas do ponto que divide um segmento orientado em uma dada razão. Assim, conhecidas as coordenadas baricêntricas das extremidades  $P$  e  $Q$  de um segmento orientado  $\overrightarrow{PQ}$  e a razão  $k$  em que um ponto  $X$  da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  divide este segmento orientado, teremos um método algébrico muito importante com o qual poderemos calcular as coordenadas baricêntricas do ponto  $X$ .

**Proposição 2.6** Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos distintos com coordenadas baricêntricas balanceadas e que não estão no infinito,  $X$  um ponto da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  com  $X$  distinto de  $Q$  e  $k$  um número real. Então

$$X \text{ divide } \overrightarrow{PQ} \text{ na razão } k \text{ se, e somente se, } X = P + k \cdot Q.$$

*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Considere  $k$  um número real diferente de  $-1$ . Supondo  $P$  e  $Q$  pontos distintos com somas das coordenadas baricêntricas  $r$ ,  $r \neq 0$  e  $X$  um ponto da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ ,  $X$  distinto de  $Q$  com soma das coordenadas baricêntricas  $s$ ,  $s \neq 0$ , podemos concluir que

$$P = \left( r \cdot \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} : r \cdot \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} : r \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} \right), \quad Q = \left( r \cdot \frac{S_{QBC}}{S_{ABC}} : r \cdot \frac{S_{QCA}}{S_{ABC}} : r \cdot \frac{S_{QAB}}{S_{ABC}} \right) \text{ e}$$

$$X = \left( s \cdot \frac{S_{XBC}}{S_{ABC}} : s \cdot \frac{S_{XCA}}{S_{ABC}} : s \cdot \frac{S_{XAB}}{S_{ABC}} \right).$$

Como os cálculos se repetem, vamos trabalhar somente com as primeiras componentes  $u_P$ ,  $u_Q$  e  $u_X$  das coordenadas baricêntricas de  $P$ ,  $Q$  e  $X$ , onde teremos

$$u_P = r \cdot \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}, \quad u_Q = r \cdot \frac{S_{QBC}}{S_{ABC}} \quad \text{e} \quad u_X = s \cdot \frac{S_{XBC}}{S_{ABC}}$$

$\Downarrow$

$$S_{PBC} = S_{ABC} \cdot \frac{u_P}{r}, \quad S_{QBC} = S_{ABC} \cdot \frac{u_Q}{r} \quad \text{e} \quad S_{XBC} = S_{ABC} \cdot \frac{u_X}{s}. \quad (*)$$

Agora, denotando-se  $\overrightarrow{XQ}$  por  $t$ , segue-se da hipótese que  $\overrightarrow{PX} = k \cdot \overrightarrow{XQ} = k \cdot t$ . Como  $P$ ,  $X$  e  $Q$



Portanto,

$$\frac{r}{s} \cdot (1+k) \cdot u_X = u_P + k \cdot u_Q.$$

Analogamente, temos

$$\frac{r}{s} \cdot (1+k) \cdot v_X = v_P + k \cdot v_Q \quad \text{e} \quad \frac{r}{s} \cdot (1+k) \cdot w_X = w_P + k \cdot w_Q,$$

acarretando que

$$\begin{aligned} X &= (u_X : v_X : w_X) \\ &= \left( \frac{r}{s} \cdot (1+k) \cdot u_X : \frac{r}{s} \cdot (1+k) \cdot v_X : \frac{r}{s} \cdot (1+k) \cdot w_X \right) \\ &= (u_P + k \cdot u_Q : v_P + k \cdot v_Q : w_P + k \cdot w_Q) \\ &= (u_P : v_P : w_P) + (k \cdot u_Q : k \cdot v_Q : k \cdot w_Q) \\ &= P + k \cdot Q. \end{aligned}$$

Isto encerra o caso  $k \neq -1$ . Considere agora  $k = -1$ . Para esta hipótese, a fórmula  $X = P + k \cdot Q$  também é verdadeira, pois para  $k = -1$ , temos  $X = P + (-1) \cdot Q = P - Q$  e, como as coordenadas baricêntricas de  $P$  e  $Q$  estão balanceadas,  $X$  é um ponto no infinito.

( $\Leftrightarrow$ ) Suponhamos  $X = P + k \cdot Q$  e seja  $X'$  o ponto que divide  $\overline{PQ}$  na razão  $k$ . Temos de ( $\Rightarrow$ ) que  $X' = P + k \cdot Q$ . Da unicidade do ponto divisor, segue-se que  $X' = X$ . Assim,  $X$  divide  $\overline{PQ}$  na razão  $k$ , o que demonstra o resultado. ■

**Corolário 2.1** Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos distintos com coordenadas baricêntricas balanceadas e  $X$  um ponto da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  com  $X$  distinto de  $Q$  e  $k$  um número real.

$X$  é ponto médio de  $\overline{PQ}$  se, e somente se,  $X = P + Q$ .

*Demonstração:*  $X$  é ponto médio de  $\overline{PQ} \Leftrightarrow \frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} = 1 \Leftrightarrow X = P + Q$ . ■

## 2.13 Coordenadas baricêntricas de $T = X(55)$

Seja  $T$  o ponto que divide internamente o segmento  $\overline{OI}$  na razão  $k = R/r$ . Na sequência, calcularemos as coordenadas baricêntricas deste ponto que é classificado em ETC como  $X(55)$ . Primeiramente, precisamos balancear as coordenadas baricêntricas dos pontos  $I = (a : b : c)$  e  $O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$ . Como as somas das coordena-

das baricêntricas de  $O$  e de  $I$  são, respectivamente,  $4\mathcal{D}^2$  e  $2p$ , tomemos

$$O = \left( \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{4\mathcal{D}^2} : \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{4\mathcal{D}^2} : \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{4\mathcal{D}^2} \right) \quad \text{e} \quad I = \left( \frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p} \right),$$

ambos com a soma das coordenadas baricêntricas igual a 1 (forma homogênea).

Em segundo lugar, como a área  $S$  de um triângulo de perímetro  $2p$  e lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  é

$$S = \frac{abc}{4R} \quad \text{ou} \quad S = p \cdot r \quad \text{ou} \quad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

onde  $R$  e  $r$  são os raios dos círculos circunscrito e inscrito nesse triângulo e  $2 \cdot S = |\mathcal{D}|$ , vem que

$$k = \frac{R}{r} = \frac{(abc)/(4S)}{S/p} = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{p}{S} = \frac{abc p}{(2S)^2} = \frac{abc p}{|\mathcal{D}|^2} = \frac{abc p}{\mathcal{D}^2}$$

e, finalmente, com as coordenadas baricêntricas de  $O$  e  $I$  balanceadas e sendo  $\overline{OT}/\overline{TI} = k$ , temos, pela Proposição 2.6, que  $T = O + k \cdot I$ , acarretando  $u_T = u_O + k \cdot u_I$ . Daí,

$$\begin{aligned} u_T &= \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{4\mathcal{D}^2} + \frac{abc p}{\mathcal{D}^2} \cdot \frac{a}{2p} = \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + 2a^2 bc}{4\mathcal{D}^2} \\ &= \frac{a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot (-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc) = \frac{a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot [(b+c)^2 - a^2] \\ &= \frac{a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot (b+c+a) \cdot (b+c-a) = \frac{a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot 2p \cdot 2(p-a) = \frac{p}{\mathcal{D}^2} \cdot a^2(p-a) \\ T &= (u_T : v_T : w_T) = (a^2(p-a) : b^2(p-b) : c^2(p-c)). \end{aligned}$$

Como  $p-a = (-a+b+c)/2$ , também podemos escrever que

$$T = (a^2(-a+b+c) : b^2(a-b+c) : c^2(a+b-c)).$$

## 2.14 Coordenadas baricêntricas de $T' = X(56)$

Seja  $T'$  o ponto que divide externamente o segmento  $\overline{OI}$  na razão  $k = -R/r$ . Na sequência, calcularemos as coordenadas baricêntricas deste ponto que é classificado em ETC como  $X(56)$ . Como já balanceamos as coordenadas de  $O$  e  $I$  e  $\overline{OT'}/\overline{T'I} = k'$ , com  $k' = -abc p/\mathcal{D}^2$ , temos, pela Proposição 2.6, que  $T' = O + k' \cdot I$ , acarretando  $u_{T'} = u_O + k' \cdot u_I$ . Daí,

$$\begin{aligned} u_{T'} &= \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2) - 2a^2 bc}{4\mathcal{D}^2} = \frac{-a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot [a^2 - (b-c)^2] \\ &= \frac{-a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c) = \frac{-a^2}{4\mathcal{D}^2} \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b) \\ &= \frac{-a^2}{\mathcal{D}^2} \left( \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \right) = \frac{-a^2}{\mathcal{D}^2} \left( \frac{S^2}{p(p-a)} \right) = \frac{-S^2}{p\mathcal{D}^2} \cdot \frac{a^2}{p-a}. \end{aligned}$$

Como no caso anterior,  $T' = (u_{T'} : v_{T'} : w_{T'})$ , acarretando que

$$T' = \left( \frac{a^2}{p-a} : \frac{b^2}{p-b} : \frac{c^2}{p-c} \right) \quad \text{ou} \quad T' = \left( \frac{a^2}{-a+b+c} : \frac{b^2}{a-b+c} : \frac{c^2}{a+b-c} \right).$$

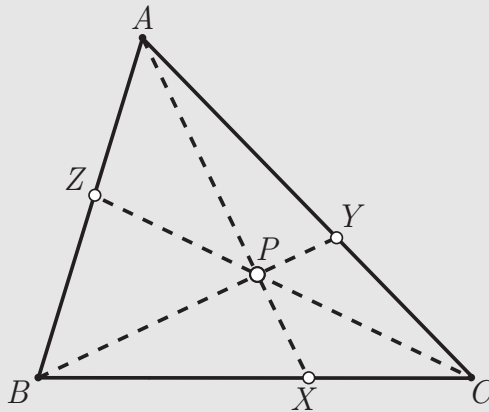
## 2.15 Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas

**Definição 2.7** (CEVIANAS E TRAÇOS DE UM PONTO) As retas que ligam os vértices do triângulo de referência  $\Delta ABC$  a um ponto  $P$  são denominadas *cevianas do ponto  $P$*  e os pontos onde essas cevianas do ponto  $P$  cortam os lados opostos do triângulo de referência são denominados *traços do ponto  $P$* .

Diferentemente de um triângulo que tem infinitas cevianas, um ponto possui no máximo três. Assim, a definição de ceviana de triângulo vista na página 21 não está se repetindo aqui. Ao triângulo  $\Delta XYZ$  cujos vértices são os traços de um ponto  $P$  denominamos de *triângulo ceviano do ponto  $P$* . Perceba que o triângulo medial é o triângulo ceviano do baricentro.

**Lema 2.1** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  os traços de um ponto  $P$ , respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

- (1) Se  $P$  divide  $\overline{XA}$  na razão  $k$ , então  $P = (k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX})$ .
- (2) Se  $P$  divide  $\overline{YB}$  na razão  $k$ , então  $P = (\overline{CY} : k \cdot \overline{CA} : \overline{YA})$ .
- (3) Se  $P$  divide  $\overline{ZC}$  na razão  $k$ , então  $P = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : k \cdot \overline{AB})$ .



*Demonstração:* Suponha que o ponto  $P$  divide a ceviana  $\overline{XA}$  na razão  $k$ , ou seja,  $\overline{XP}/\overline{PA} = k$ . Para demonstrar o Lema 2.1 (1), basta provar que  $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX} = S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB}$  e, para

tal, basta mostrar que  $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} = S_{PBC} : S_{PCA}$ , pois pelo Corolário 1.1 (página 20) já temos  $\overline{XC} : \overline{BX} = S_{PCA} : S_{PAB}$ . Do Corolário 1.1 e da Proposição 1.5 (página 18), temos que

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}, \quad \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} = \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}}.$$

Daí e também do fato que

$$\frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = k \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{(\overline{BX} + \overline{XC})}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XP} \cdot \overline{BX} + \overline{XP} \cdot \overline{XC}}{\overline{PA} \cdot \overline{XC}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} + \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}},$$

podemos afirmar que

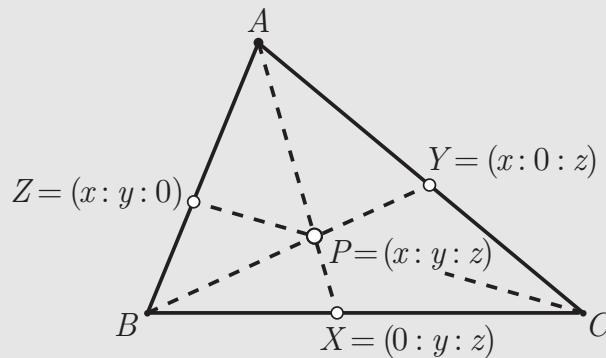
$$\frac{k \cdot \overline{BC}}{\overline{XC}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBX} + S_{PXC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}},$$

ou seja,  $k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} = S_{PBC} : S_{PCA}$ , o que mostra o resultado. As demonstrações dos Lemas 2.1 (2) e 2.1 (3) são análogas à anterior. ■

**Teorema 2.1** (TEOREMA DE CEVA PARA COORDENADAS BARICÊNTRICAS) Três pontos  $X, Y$  e  $Z$  são os traços do ponto  $P = (x : y : z)$

se, e somente se,

$$X, Y \text{ e } Z \text{ são da forma } \begin{cases} X = (0 : y : z) \\ Y = (x : 0 : z) \\ Z = (x : y : 0) \end{cases}, \text{ para algum } x, y, z.$$



*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $X, Y$  e  $Z$  são os traços de  $P = (x : y : z)$ .

Fazendo-se  $k = \overline{XP}/\overline{PA}$ , temos do Lema 2.1 (1) que  $P = (x : y : z) = (k \cdot \overline{BC} : \overline{XC} : \overline{BX})$  e, então,  $\overline{XC} : \overline{BX} = y : z$ . Daí e como  $X$  está sobre o lado  $\overline{BC}$ , temos  $X = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}) = (0 : y : z)$ . Analogamente, temos que  $Y = (x : 0 : z)$  e  $Z = (x : y : 0)$ .



( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $X, Y$  e  $Z$  são da forma

$$X = (0 : y : z), \quad Y = (x : 0 : z) \quad \text{e} \quad Z = (x : y : 0),$$

para algum  $x, y, z$ . Dessas hipóteses e do fato dos traços  $X, Y$  e  $Z$  pertencerem aos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$ , temos pela Proposição 2.3 (página 32) que

$$X = (0 : y : z) = (0 : \overline{XC} : \overline{BX}) \Rightarrow \overline{BX}/\overline{XC} = z/y.$$

$$Y = (x : 0 : z) = (\overline{CY} : 0 : \overline{YA}) \Rightarrow \overline{CY}/\overline{YA} = x/z.$$

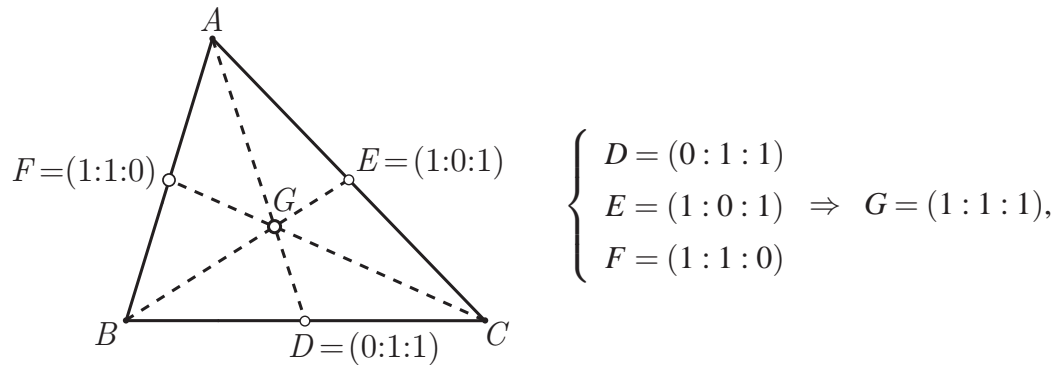
$$Z = (x : y : 0) = (\overline{ZB} : \overline{AZ} : 0) \Rightarrow \overline{AZ}/\overline{ZB} = y/x.$$

Aplicando o teorema de Ceva ao triângulo  $\Delta ABC$ , temos que

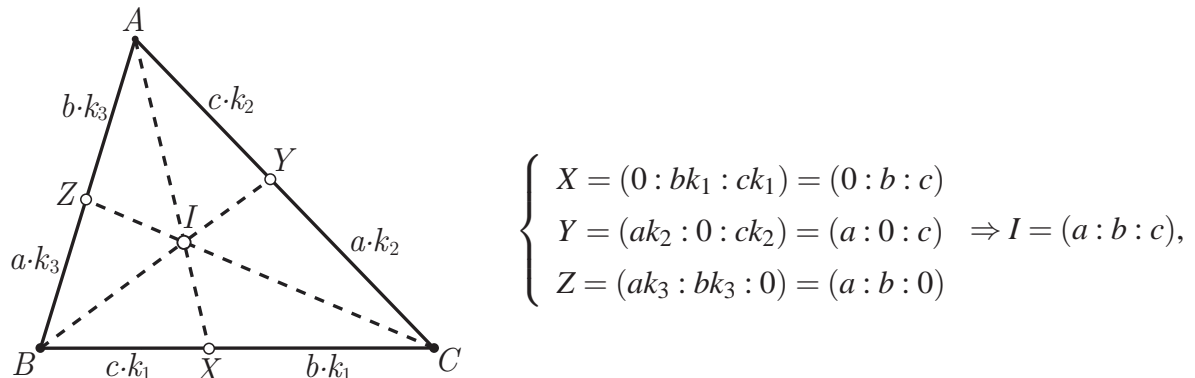
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1,$$

garantindo  $\overline{AX}, \overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  concorrentes. Logo,  $X, Y$  e  $Z$  são os traços do ponto  $P = (x : y : z)$ . ■

Quando  $X, Y$  e  $Z$  são, respectivamente, os pontos  $D, E$  e  $F$ , médios dos lados, o ponto  $P$  é o baricentro, acarretando que



e quando  $X, Y$  e  $Z$  são os pés das bissetrizes internas, o ponto  $P$  é o incentro, acarretando que



o que ratifica as coordenadas baricêntricas do baricentro  $G$  e do incentro  $I$ .

## 2.16 Coordenadas baricêntricas do ortocentro

Para o cálculo das coordenadas baricêntricas do ortocentro  $H$ , consideraremos dois casos: os triângulos retângulos e os não-retângulos. Em se tratando de triângulos não retângulos, calcularemos as coordenadas baricêntricas primeiro em função das tangentes dos ângulos internos e, em seguida, em função dos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$ .

(1) Coordenadas baricêntricas do ortocentro de um triângulo retângulo.

Quando o triângulo de referência  $\Delta ABC$  é retângulo, as três alturas (a altura relativa à hipotenusa e os dois catetos) encontram-se no ângulo reto. Neste caso,

- se o triângulo é retângulo em  $A$ , temos  $H = A = (1 : 0 : 0)$ ,
- se o triângulo é retângulo em  $B$ , temos  $H = B = (0 : 1 : 0)$ ,
- se o triângulo é retângulo em  $C$ , temos  $H = C = (0 : 0 : 1)$ .

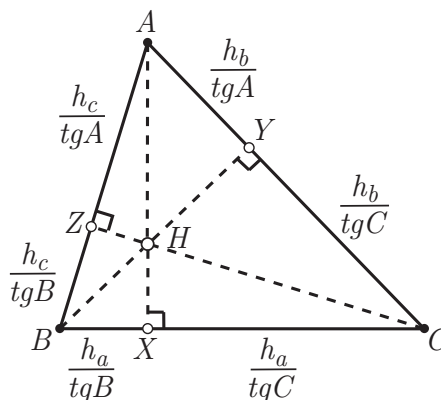
(2) Coordenadas baricêntricas do ortocentro de um triângulo não retângulo.

(a) Coordenadas baricêntricas do ortocentro em função das tangentes dos ângulos internos.

Aplicando a definição de  $\text{tg}(x)$  ao ângulo  $B$  do triângulo retângulo  $\Delta XAB$ , obtemos

$$\text{tg} B = \frac{h_a}{|BX|} \Rightarrow |BX| = \frac{h_a}{\text{tg} B}$$

e, de modo análogo, obtemos os demais dados da figura seguinte.



$$\text{Como } \begin{cases} X = \left( 0 : \frac{h_a}{\text{tg} C} : \frac{h_a}{\text{tg} B} \right) = (0 : \text{tg} B : \text{tg} C) \\ Y = \left( \frac{h_b}{\text{tg} C} : 0 : \frac{h_b}{\text{tg} A} \right) = (\text{tg} A : 0 : \text{tg} C) \\ Z = \left( \frac{h_c}{\text{tg} B} : \frac{h_c}{\text{tg} A} : 0 \right) = (\text{tg} A : \text{tg} B : 0) \end{cases}, \text{ temos que } H = (\text{tg} A : \text{tg} B : \text{tg} C).$$

(b) Coordenadas baricêntricas do ortocentro em função dos lados.

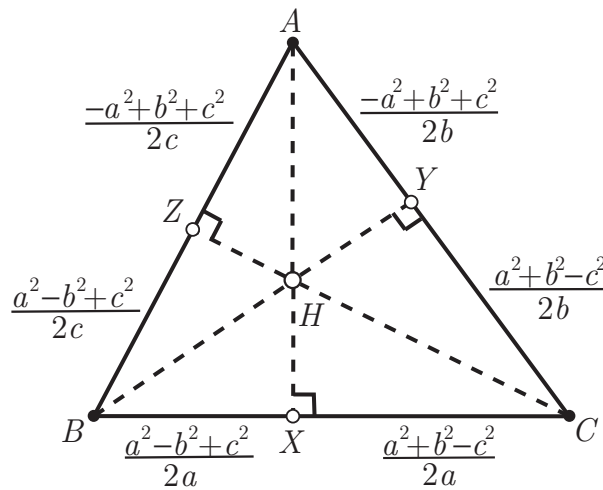
Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos  $\Delta XCA$  e  $\Delta XAB$ , obtemos

$$\begin{cases} b^2 = (h_a)^2 + |XC|^2 \\ c^2 = (h_a)^2 + (a - |XC|)^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 - 2a|XC| \Rightarrow |XC| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Daí e como  $|BX| + |XC| = a$ , temos que

$$|BX| = a - |XC| = a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

e, de modo análogo, obtemos os demais dados da figura seguinte.



Com esses dados, podemos então concluir que

$$\begin{cases} X = \left( 0 : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right) \\ Y = \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} : 0 : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b} \right) \\ Z = \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} : \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} : 0 \right) \end{cases}$$

↓

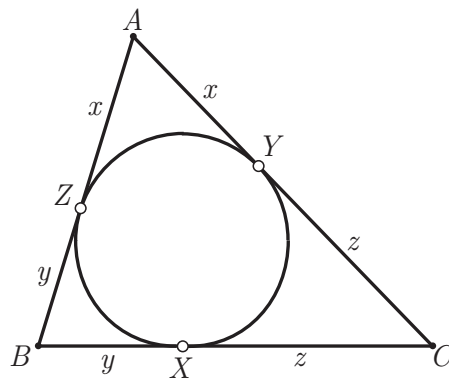
$$\begin{cases} X = \left( 0 : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \\ Y = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : 0 : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \\ Z = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : 0 \right) \end{cases}$$

↓

$$H = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

## 2.17 Coordenadas baricêntricas do Ponto de Gergonne

Sabemos da geometria euclidiana que as duas tangentes traçadas de um ponto exterior a um círculo têm medidas iguais. Considerando-se os dados da figura seguinte, onde  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os pontos de tangência do círculo inscrito em um triângulo  $\Delta ABC$  cujos lados têm medidas euclidianas  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$  e  $|AB| = c$ , temos que  $a = y + z$ ,  $b = z + x$  e  $c = x + y$  (onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são distâncias euclidianas), acarretando que  $2x + 2y + 2z = 2p$ . Assim,  $x + y + z = p$  e, portanto,  $x + a = p$ , isto é,  $|AZ| = |YA| = p - a$ . Analogamente,  $|ZB| = |BX| = p - b$  e  $|XC| = |CY| = p - c$ .



Observe agora que, com os dados da Figura 2.1, podemos escrever que

$$\left| \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \right| = \left| \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p-a} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1,$$

pois, como os três fatores são positivos, fica eliminada a hipótese desse produto ser igual a  $-1$ , permitindo-nos afirmar, pelo Teorema de Ceva, que as retas  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  e  $\overleftrightarrow{CZ}$  são concorrentes. Este ponto de concorrência  $G_e$  é denominado *ponto de Gergonne* do triângulo  $\Delta ABC$ . Em ETC, ele é o centro  $X(7)$ .

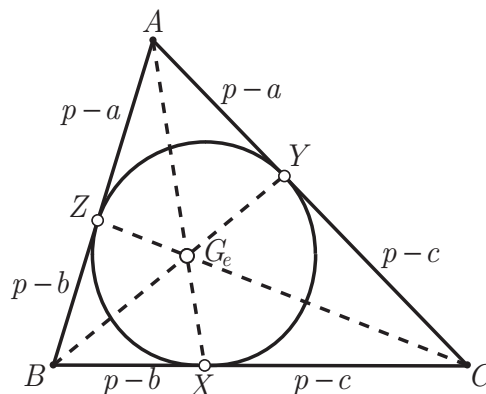


Figura 2.1: Ponto de Gergonne  $G_e$ .

Como

$$\begin{cases} X = (0 : p - c : p - b) = \left( 0 : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c} \right) \\ Y = (p - c : 0 : p - a) = \left( \frac{1}{p - a} : 0 : \frac{1}{p - c} \right) \\ Z = (p - b : p - a : 0) = \left( \frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : 0 \right) \end{cases},$$

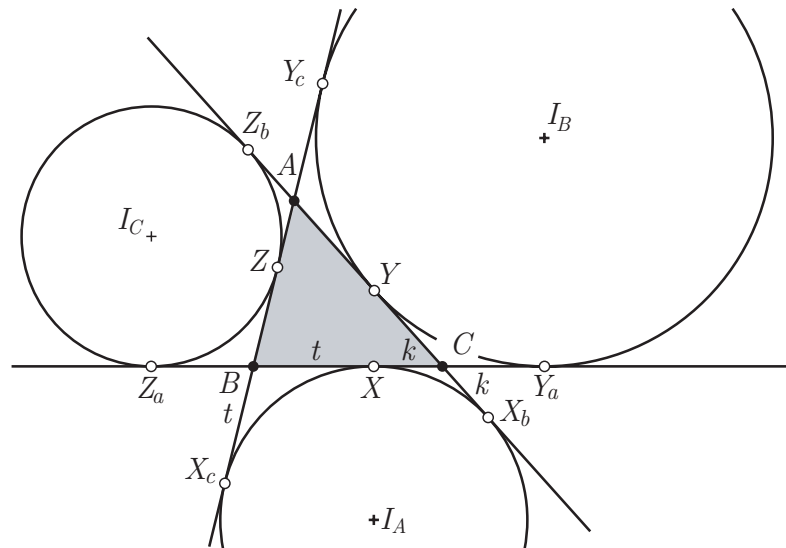
segue-se que

$$G_e = \left( \frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c} \right).$$

$$\text{Mas, } p - a = (-a + b + c)/2, \text{ logo } G_e = \left( \frac{1}{-a + b + c} : \frac{1}{a - b + c} : \frac{1}{a + b - c} \right).$$

## 2.18 Coordenadas baricêntricas do Ponto de Nagel

Sejam  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$  e  $|AB| = c$ , respectivamente, as medidas euclidianas dos lados do triângulo de referência  $\Delta ABC$  e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com esses lados. Sejam também  $X_b$ ,  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $Y_a$ ,  $Z_a$  e  $Z_b$  os pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com os prolongamentos desses lados, como ilustra a figura abaixo.



Mostraremos que (1)  $|AX_b| = |AX_c| = |BY_c| = |BY_a| = |CZ_a| = |CZ_b| = p$  e também que (2)  $|BX| = p - c$  e  $|XC| = p - b$ . De fato:

(1) Fazendo-se  $|BX| = |BX_c| = t$  e  $|CX| = |CX_b| = k$ , temos que

$$2p = a + b + c = (t + k) + b + c = (b + k) + (c + t) = |AX_b| + |AX_c|.$$

Como  $|AX_b| = |AX_c|$ , temos que  $|AX_b| = |AX_c| = p$  e  $|BY_c| = |BY_a| = |CZ_a| = |CZ_b| = p$ .

- (2) Como  $|AX_b| = p$  e  $|AX_c| = p$ , temos que  $c + t = p$  e  $b + k = p$ . Logo  $t = p - c$  e  $k = p - b$ . Analogamente,  $|CY| = |ZB| = p - a$ ,  $|YA| = p - c$  e  $|AZ| = p - b$ .

Observe agora que, com os dados da Figura 2.2, podemos escrever que

$$\left| \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \right| = \left| \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1,$$

pois, como os três fatores são positivos, fica eliminada a hipótese desse produto ser igual a  $-1$ , permitindo-nos afirmar, pelo Teorema de Ceva, que as retas  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  e  $\overleftrightarrow{CZ}$  são concorrentes. Este ponto de concorrência  $N_a$  é denominado *ponto de Nagel* do triângulo  $\Delta ABC$ . Em ETC, ele é o centro  $X(8)$ .

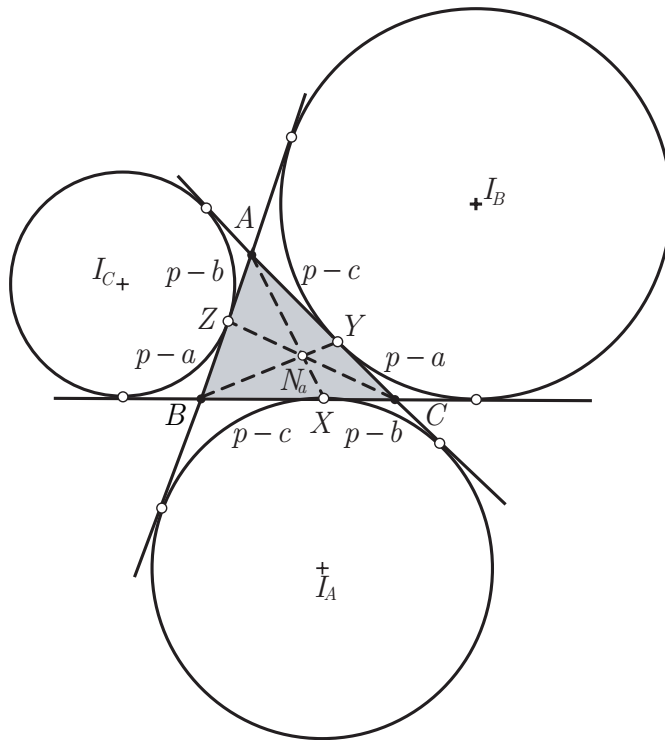


Figura 2.2: Ponto de Nagel  $N_a$ .

Como

$$\begin{cases} X = (0 : p-b : p-c) \\ Y = (p-a : 0 : p-c) \\ Z = (p-a : p-b : 0) \end{cases},$$

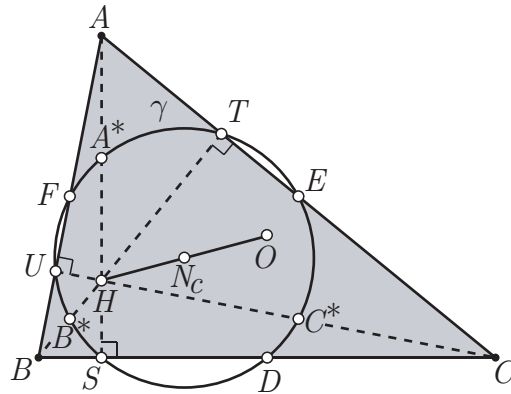
segue-se que

$$N_a = (p-a : p-b : p-c).$$

Mas,  $p-a = (-a+b+c)/2$ , logo  $N_a = (-a+b+c : a-b+c : a+b-c)$ .

## 2.19 Coordenadas baricêntricas do centro do círculo de nove pontos

A figura seguinte mostra um triângulo  $\Delta ABC$  de circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ , onde  $D, E$  e  $F$  são os pontos médios dos lados,  $S, T$  e  $U$  são os pés das alturas e  $A^*, B^*$  e  $C^*$  são os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro  $H$  aos vértices  $A, B$  e  $C$ .



No Apêndice B, mostramos um resultado devido ao matemático Karl Wilhelm Feuerbach que nos garante: os nove pontos  $D, E, F, S, T, U, A^*, B^*$  e  $C^*$  estão em um círculo  $\gamma$ , denominado *círculo de nove pontos*, cujo centro  $N_c$  é o ponto médio de  $\overline{OH}$  e cujo raio é a metade do raio  $R$  do círculo circunscrito ao triângulo  $\Delta ABC$ .

Para calcular as coordenadas baricêntricas do centro do círculo de nove pontos  $N_c$ , será necessário balancear as coordenadas do circuncentro  $O$  e do ortocentro  $H$ . Para isso, como as coordenadas baricêntricas do ortocentro  $H$  de um triângulo não retângulo  $\Delta ABC$  são dadas por

$$H = \left( \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right),$$

fazendo-se  $-a^2 + b^2 + c^2 = k_1$ ,  $a^2 - b^2 + c^2 = k_2$  e  $a^2 + b^2 - c^2 = k_3$ , teremos certamente, que  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$  e  $k_3 \neq 0$ , pois, por hipótese, o triângulo não é retângulo.

Daí, podemos escrever que

$$\begin{aligned} H &= \left( \frac{1}{k_1} : \frac{1}{k_2} : \frac{1}{k_3} \right) \\ &= \left( \frac{k_2 k_3}{k_1 k_2 k_3} : \frac{k_1 k_3}{k_1 k_2 k_3} : \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 k_3} \right) \\ &= (k_2 k_3 : k_1 k_3 : k_1 k_2) \\ &= (a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2 : b^4 - a^4 - c^4 + 2a^2 c^2 : c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2 b^2) \\ &= (a^4 - (b^2 - c^2)^2 : b^4 - (c^2 - a^2)^2 : c^4 - (a^2 - b^2)^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Perceba que, quando escrito da forma (2.3), a soma  $s$  das coordenadas baricêntricas de  $H$  é

$$\begin{aligned} s &= (\mathcal{A}^{\mathcal{A}} - \mathcal{B}^{\mathcal{A}} - \mathcal{C}^{\mathcal{A}} + 2b^2c^2) + (\mathcal{B}^{\mathcal{A}} - a^4 - c^4 + 2a^2c^2) + (\mathcal{C}^{\mathcal{A}} - \mathcal{A}^{\mathcal{A}} - b^4 + 2a^2b^2) \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \stackrel{(*)}{=} 4\mathcal{D}^2 \end{aligned}$$

onde, em (\*), usamos a Observação 2.3 (página 37). Assim, o ortocentro escrito da forma (2.3) e o circuncentro possuem as coordenadas baricêntricas balanceadas, pois pela Proposição 2.4 (página 37) a soma das coordenadas baricêntricas de  $O$  também é  $4\mathcal{D}^2$ . Daí e do fato de  $N_c$  ser ponto médio de  $\overline{OH}$  temos, pelo Corolário 2.1, que  $N_c = H + O$ , garantindo que a primeira componente de  $N_c$  é dada por  $u_{N_c} = u_H + u_O$ , acarretando que

$$\begin{aligned} u_{N_c} &= a^4 - (b^2 - c^2)^2 + a^2(-a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \mathcal{A}^{\mathcal{A}} - (b^2 - c^2)^2 - \mathcal{A}^{\mathcal{A}} + a^2(b^2 + c^2) = a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 \end{aligned}$$

$$N_c = (a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 : b^2(c^2 + a^2) - (c^2 - a^2)^2 : c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2).$$

**Exemplo 2.1** Com base no resultado anterior, mostraremos que as coordenadas baricêntricas do centro do círculo de nove pontos  $N_c$  também podem ser dadas por

$$N_c = (a \cdot \cos(B - C) : b \cdot \cos(C - A) : c \cdot \cos(A - B)).$$

$$\begin{aligned} 2abca \cdot \cos(B - C) &= 2abca \cdot (\cos B \cdot \cos C + \sen B \cdot \sen C) \\ &= 2abca \cdot \left[ \left( \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \right) \cdot \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) + \left( \frac{2\mathcal{D}}{2ac} \right) \cdot \left( \frac{2\mathcal{D}}{2ab} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 4\mathcal{D}^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(a^2 - [b^2 - c^2])(a^2 + [b^2 - c^2]) + 4\mathcal{D}^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(a^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 + 4\mathcal{D}^2] \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot [\mathcal{A}^{\mathcal{A}} - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - \mathcal{A}^{\mathcal{A}} - b^4 - c^4] \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 \\ &= a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2, \end{aligned}$$

onde em (\*) usamos a Observação 2.3 (página 37). Daí e do resultado anterior, temos que

$$\begin{aligned} N_c &= (2abca \cdot \cos(B - C) : 2abcb \cdot \cos(C - A) : 2abcc \cdot \cos(A - B)) \\ &= (a \cdot \cos(B - C) : b \cdot \cos(C - A) : c \cdot \cos(A - B)), \end{aligned}$$

o que mostra o resultado. ■



### 3 Divisores harmônicos

**Lema 3.1** Três pontos são colineares se, e somente se, é nulo o determinante da matriz formada por suas coordenadas baricêntricas.

*Demonstração:* Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ ,  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  e  $P_3 = (u_3 : v_3 : w_3)$  pontos que não estão no infinito, tais que  $u_1 + v_1 + w_1 = s_1$ ,  $u_2 + v_2 + w_2 = s_2$  e  $u_3 + v_3 + w_3 = s_3$ .

Dessas hipóteses, além de  $s_1 \neq 0$ ,  $s_2 \neq 0$  e  $s_3 \neq 0$ , temos que  $s_1 \cdot P_1 = u_1 \cdot A + v_1 \cdot B + w_1 \cdot C$ ,  $s_2 \cdot P_2 = u_2 \cdot A + v_2 \cdot B + w_2 \cdot C$  e  $s_3 \cdot P_3 = u_3 \cdot A + v_3 \cdot B + w_3 \cdot C$ . Daí,

$$\begin{aligned}
 S_{P_1 P_2 P_3} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{u_1 x_A + v_1 x_B + w_1 x_C}{s_1} & \frac{u_1 y_A + v_1 y_B + w_1 y_C}{s_1} & 1 \\ \frac{u_2 x_A + v_2 x_B + w_2 x_C}{s_2} & \frac{u_2 y_A + v_2 y_B + w_2 y_C}{s_2} & 1 \\ \frac{u_3 x_A + v_3 x_B + w_3 x_C}{s_3} & \frac{u_3 y_A + v_3 y_B + w_3 y_C}{s_3} & 1 \end{vmatrix} \\
 &\quad \downarrow \\
 S_{P_1 P_2 P_3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s_1 s_2 s_3} \cdot \begin{vmatrix} u_1 x_A + v_1 x_B + w_1 x_C & u_1 y_A + v_1 y_B + w_1 y_C & u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 x_A + v_2 x_B + w_2 x_C & u_2 y_A + v_2 y_B + w_2 y_C & u_2 + v_2 + w_2 \\ u_3 x_A + v_3 x_B + w_3 x_C & u_3 y_A + v_3 y_B + w_3 y_C & u_3 + v_3 + w_3 \end{vmatrix} \\
 &\quad \downarrow \\
 S_{P_1 P_2 P_3} &= \frac{1}{2 \cdot s_1 s_2 s_3} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \cdot s_1 s_2 s_3} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot 2S_{ABC} \\
 &\quad \downarrow \\
 S_{P_1 P_2 P_3} &= \frac{S_{ABC}}{s_1 s_2 s_3} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. ■

**Proposição 3.1** Sejam  $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$  e  $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$  pontos distintos que não estão no infinito e que possuem coordenadas baricêntricas balanceadas e  $P = (u : v : w)$  um ponto do plano.

Se existe um número real não nulo  $k$  tal que  $P = P_1 + k \cdot P_2$ ,

então

$P$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são colineares e  $P$  divide  $\overline{P_1P_2}$  na razão  $k$ .

*Demonstração:* Suponhamos que existe um número real não nulo  $k$  tal que  $P = P_1 + k \cdot P_2$ . Dessa hipótese, temos que  $u = u_1 + k \cdot u_2$ ,  $v = v_1 + k \cdot v_2$  e  $w = w_1 + k \cdot w_2$ . Do Lema 3.1, os pontos  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$  serão colineares ( $S_{PP_1P_2} = 0$ ) se

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0,$$

o que é o nosso caso, pois a primeira linha dessa matriz é uma combinação linear das outras duas ( $L_1 = L_2 + k \cdot L_3$ ). Como as coordenadas baricêntricas de  $P_1$  e  $P_2$  estão balanceadas, a afirmação “ $P$  divide  $\overline{P_1P_2}$  na razão  $k$ ” é garantida pela Proposição 2.6 (página 42). ■

### 3.1 Divisão harmônica de $\overline{HG}$ por $N_c$ e $O$

Mostraremos agora que  $H$ ,  $N_c$ ,  $G$  e  $O$  são colineares e que  $N_c$  e  $O$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{HG}$ . Para isso, analisaremos os pontos  $H$ ,  $G$  e  $O$  mostrando que são colineares (*reta de Euler*) e analisaremos a razão em que  $G$  divide os outros dois e, em seguida, faremos a mesma coisa com os pontos  $N_c$ ,  $G$  e  $O$ . Entretanto, consideraremos o triângulo de referência  $\Delta ABC$  não equilátero, pois usando coordenadas baricêntricas, podemos facilmente verificar que quando o triângulo de referência  $\Delta ABC$  é equilátero,  $H$ ,  $G$  e  $O$  coincidem e, neste caso, a reta de Euler não está definida.

(1) Suponhamos  $\Delta ABC$  um triângulo retângulo.

Neste caso, se  $\Delta ABC$  é retângulo em

- $A$ , temos  $H = (1 : 0 : 0)$  e  $O = (0 : 1/2 : 1/2) \Rightarrow G = H + 2 \cdot O$ .
- $B$ , temos  $H = (0 : 1 : 0)$  e  $O = (1/2 : 0 : 1/2) \Rightarrow G = H + 2 \cdot O$ .
- $C$ , temos  $H = (0 : 0 : 1)$  e  $O = (1/2 : 1/2 : 0) \Rightarrow G = H + 2 \cdot O$ .

(2) Suponhamos  $\triangle ABC$  um triângulo não retângulo.

Neste caso, o ortocentro  $H = (a^4 - (b^2 - c^2)^2 : b^4 - (c^2 - a^2)^2 : c^4 - (a^2 - b^2)^2)$  e o circuncentro  $O = (a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$  possuem as coordenadas baricêntricas balanceadas e, além disso, vale

$$\begin{aligned} x_H + 2 \cdot x_O &= a^4 - (b^2 - c^2)^2 + 2 \cdot [a^2(-a^2 + b^2 + c^2)] \\ &= a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 - 2a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &\stackrel{(*)}{=} 4\mathcal{D}^2 \end{aligned}$$

$$H + 2 \cdot O = (4\mathcal{D}^2 : 4\mathcal{D}^2 : 4\mathcal{D}^2) = G,$$

onde em (\*) usamos a Observação 2.3 (página 37).

De (1) e (2) concluímos que  $G = H + 2 \cdot O$  para qualquer triângulo. Daí e da Proposição 3.1,  $H$ ,  $G$  e  $O$  são colineares e o baricentro  $G$  divide internamente  $\overline{HO}$  na razão  $k = 2$ , ou seja,  $\overline{HG}/\overline{GO} = 2$ .

Fazendo-se  $\overline{GO} = 2x$ , teremos  $\overline{HG} = 4x$ , justificando a razão entre segmentos orientados apresentada na Figura 3.1.

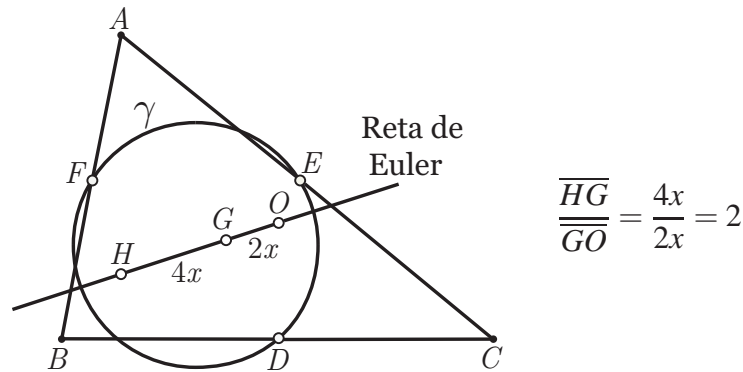


Figura 3.1: A reta de Euler passando por  $H$ ,  $G$  e  $O$ , com  $HG = 2 \cdot GO$ .

Mostraremos agora que o centro do círculo de 9 pontos  $N_c$ , o baricentro  $G$  e o circuncentro  $O$  de um triângulo são colineares e  $\overline{OG} = 2 \cdot \overline{GN}_c$  e, para isso, precisamos antes saber que o baricentro  $G'$  do triângulo medial  $\triangle DEF$  coincide com o baricentro  $G$  do triângulo de referência  $\triangle ABC$ . De fato, pois

$$G' = \frac{D+E+F}{3} = \frac{\frac{B+C}{2} + \frac{C+A}{2} + \frac{A+B}{2}}{3} = \frac{A+B+C}{3} = G.$$

Vimos que o circuncentro  $O$ , o ortocentro  $H$  e o baricentro  $G$  de um triângulo, são colineares e vale a relação  $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$ . Como  $N_c$  é o circuncentro,  $O$  é o ortocentro (Figura 1.6 na página 24) e  $G$  é o baricentro do triângulo medial  $\Delta DEF$ , podemos concluir que esses pontos são colineares e vale a relação  $\overline{OG} = 2 \cdot \overline{GN_c}$ . Fazendo  $\overline{OG} = 2x$ , teremos  $\overline{GN_c} = x$ , justificando a razão entre segmentos orientados apresentada na Figura 3.2.

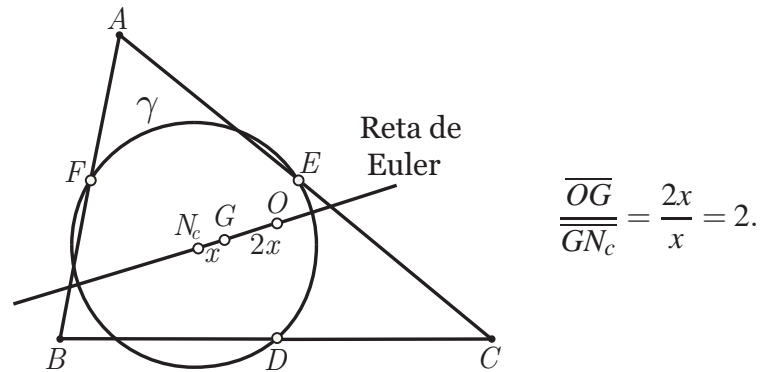


Figura 3.2: Reta de Euler passando por  $N_c$ ,  $G$  e  $O$  com  $\overline{OG} = 2 : \overline{GN_c}$ .

Reunindo-se os dados das Figuras 3.1 e 3.2, temos justificados os dados da Figura 3.3,

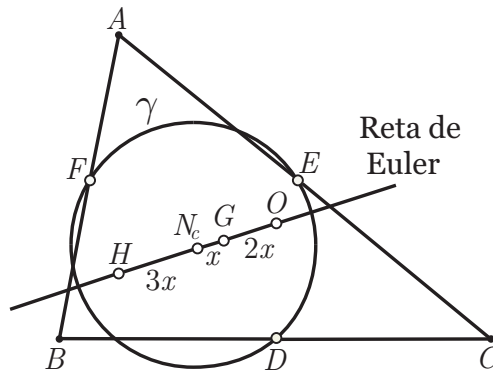


Figura 3.3:  $H$ ,  $N_c$ ,  $G$  e  $O$  são colineares com  $\overline{N_cG} : \overline{GO} : \overline{HN_c} = 1 : 2 : 3$ .

permitindo-nos escrever

$$\frac{\overline{HN_c}}{\overline{N_cG}} = \frac{3x}{x} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{HO}}{\overline{OG}} = \frac{6x}{-2x} = -3$$

\Downarrow

$$\frac{\overline{HN_c}}{\overline{N_cG}} = -\frac{\overline{HO}}{\overline{OG}},$$

mostrando que  $N_c$  e  $O$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{HG}$ .

### 3.2 Divisão harmônica de $\overline{GN_a}$ por $I$ e $S_p$

Analogamente ao que fizemos com  $H$ ,  $N_c$ ,  $G$  e  $O$ , mostraremos que  $I$ ,  $G$ ,  $S_p$  e  $N_a$  são colineares e que  $I$  e  $S_p$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{GN_a}$ . Para isso, usaremos o mesmo método anterior onde os pontos serão divididos em dois grupos com três pontos e também consideraremos o triângulo de referência  $\Delta ABC$  não equilátero, pois usando coordenadas baricêntricas, podemos facilmente verificar que quando o triângulo de referência  $\Delta ABC$  é equilátero,  $N_a$ ,  $G$  e  $I$  coincidem e, neste caso, a reta que os contém não está definida.

O incentro  $I = (a : b : c)$  e o ponto de Nagel  $N_a = (2(p - a) : 2(p - b) : 2(p - c))$  têm as somas das coordenadas iguais a  $2p$  (coordenadas balanceadas) e, além disso, vale que

$$\begin{aligned} N_a + 2 \cdot I &= (2(p - a) : 2(p - b) : 2(p - c)) + 2 \cdot (a : b : c) \\ &= (2p - 2a + 2a : 2p - 2b + 2b : 2p - 2c + 2c) \\ &= (2p : 2p : 2p) = G. \end{aligned}$$

Daí e da Proposição 3.1,  $I$ ,  $G$  e  $N_a$  são colineares e  $G$  divide internamente  $\overline{N_a I}$  na razão  $k = 2$ , ou seja,  $\overline{N_a G} / \overline{GI} = 2$ . Fazendo-se  $\overline{GI} = 2x$ , teremos  $\overline{N_a G} = 4x$ , justificando a razão entre segmentos orientados apresentada na Figura 3.4.

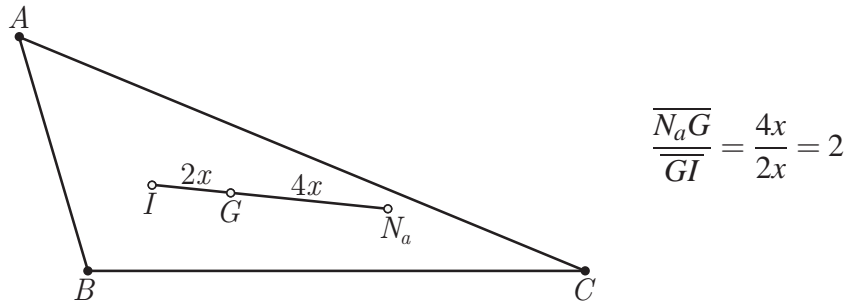


Figura 3.4:  $I$ ,  $G$  e  $N_a$  são colineares com  $\overline{N_a G} = 2 \cdot \overline{GI}$ .

Mostraremos agora que  $I$ ,  $G$  e  $S_p$  são colineares e que  $\overline{IG} = 2 \cdot \overline{GS_p}$ . Temos que o incentro  $I = (2a : 2b : 2c)$  e o centro de Spieker  $S_p = (b + c : c + a : a + b)$  têm as somas das coordenadas iguais a  $4p$  (coordenadas balanceadas) e, além disso, vale que

$$\begin{aligned} I + 2 \cdot S_p &= (2a : 2b : 2c) + 2 \cdot (b + c : c + a : a + b) \\ &= (2a + 2b + 2c : 2a + 2b + 2c : 2a + 2b + 2c) \\ &= (4p : 4p : 4p) = G. \end{aligned}$$

Daí e da Proposição 3.1,  $I$ ,  $G$  e  $S_p$  são colineares e  $G$  divide internamente  $\overline{IS_p}$  na razão  $k = 2$ , isto é,  $\overline{IG}/\overline{GS_p} = 2$ . Fazendo-se  $\overline{IG} = 2x$ , teremos  $\overline{GS_p} = x$ , justificando a razão entre segmentos orientados apresentada na Figura 3.5.

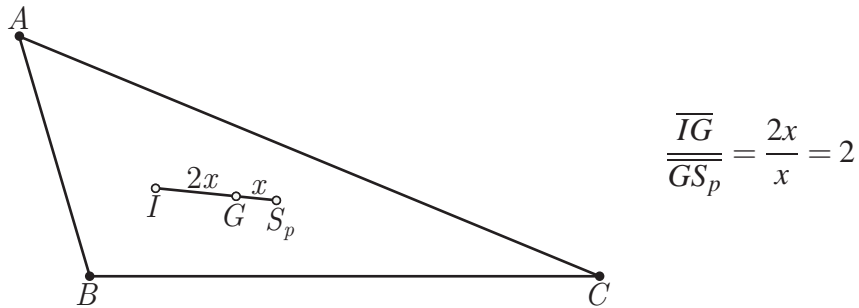


Figura 3.5:  $I$ ,  $G$  e  $S_p$  são colineares com  $\overline{IG} = 2 \cdot \overline{GS_p}$ .

A partir das relações dadas nas Figuras 3.4 e 3.5, temos que  $\overline{GS_p} : \overline{IG} : \overline{S_pN_a} = 1 : 2 : 3$ , permitindo-nos escrever

$$\frac{\overline{GS_p}}{\overline{S_pN_a}} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{GI}}{\overline{IN_a}} = -\frac{2x}{6x} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{GS_p}}{\overline{S_pN_a}} = -\frac{\overline{GI}}{\overline{IN_a}}.$$

Sendo assim,  $S_p$  e  $I$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{GN_a}$ .

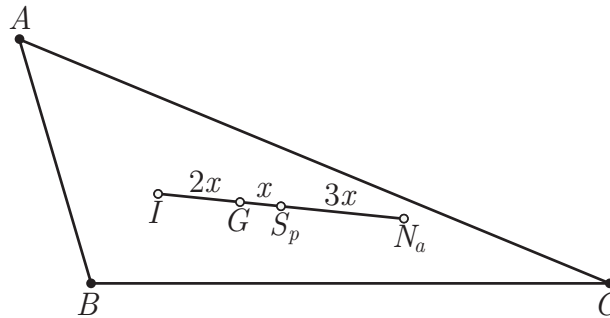
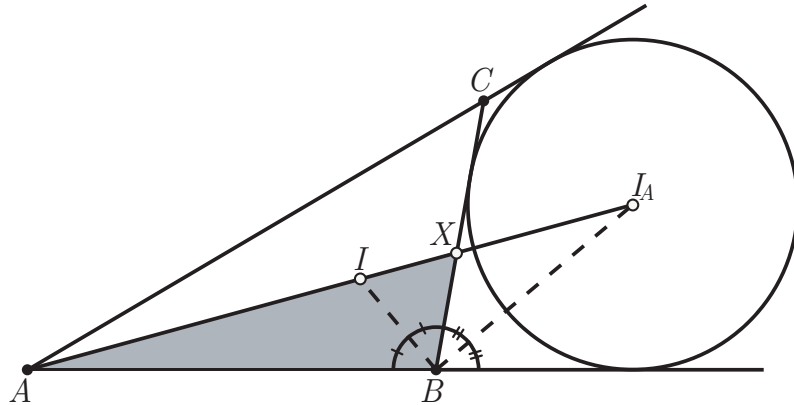


Figura 3.6:  $I$ ,  $G$ ,  $S_p$  e  $N_a$  são colineares com  $\overline{GS_p} : \overline{IG} : \overline{S_pN_a} = 1 : 2 : 3$ .

### 3.3 Divisão harmônica da bissetriz interna por $I$ e $I_A$

Como sabemos do Exemplo 1.5 (página 25), os pés das bissetrizes interna e externa traçadas do mesmo vértice de um triângulo dividem harmonicamente o lado oposto. Assim, usando os dados da figura abaixo, fica muito fácil verificar geometricamente que  $I$  e  $I_A$  dividem harmonicamente o segmento  $\overline{AX}$  (bissetriz interna do triângulo  $\Delta ABC$ ) pois  $I$  e  $I_A$  são os pés das

bissetrizes  $\overline{BI}$  (interna) e  $\overline{BI_A}$  (externa) do triângulo  $\Delta XAB$ .



Para demonstrar este resultado usando coordenadas baricêntricas de um ponto, procedemos da maneira seguinte. Como  $I = (a : b : c)$ ,  $I_A = (-a : b : c)$  e  $X$  é traço de  $I$  e de  $I_A$ , temos que  $X = (0 : b : c)$ . Tomando  $A = (b + c : 0 : 0)$  ( $A$  e  $X$  com coordenadas baricêntricas balanceadas) e fazendo  $k = (b + c)/a$ , facilmente constatamos que

$$I = A + k \cdot X \quad \text{e} \quad I_A = A + (-k) \cdot X$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \frac{\overline{AI}}{\overline{IX}} = k &\quad \text{e} \quad \frac{\overline{AI_A}}{\overline{I_A X}} = -k \\ &\Downarrow \\ \frac{\overline{AI}}{\overline{IX}} &= -\frac{\overline{AI_A}}{\overline{I_A X}}, \end{aligned}$$

mostrando que  $A, I, X$  e  $I_A$  são colineares e  $I$  e  $I_A$  são divisores harmônicos do segmento orientado  $\overline{AX}$ . Deixamos a cargo do leitor pesquisar o por que de

$$k = \frac{b + c}{a}.$$

**Observação 3.1** Como  $T = X(55)$  e  $T' = X(56)$  dividem o segmento orientado  $\overline{OI}$ , respectivamente, nas razões  $R/r$  e  $-R/r$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OT}}{\overline{TI}} = \frac{R}{r} &\quad \text{e} \quad \frac{\overline{OT'}}{\overline{T'I}} = -\frac{R}{r} \\ &\Downarrow \\ \frac{\overline{OT}}{\overline{TI}} &= -\frac{\overline{OT'}}{\overline{T'I}}. \end{aligned}$$

Assim,  $T$  e  $T'$  são conjugados harmônicos em relação ao segmento orientado  $\overline{OI}$ . ■

## 4 *Resumo dos centros estudados*

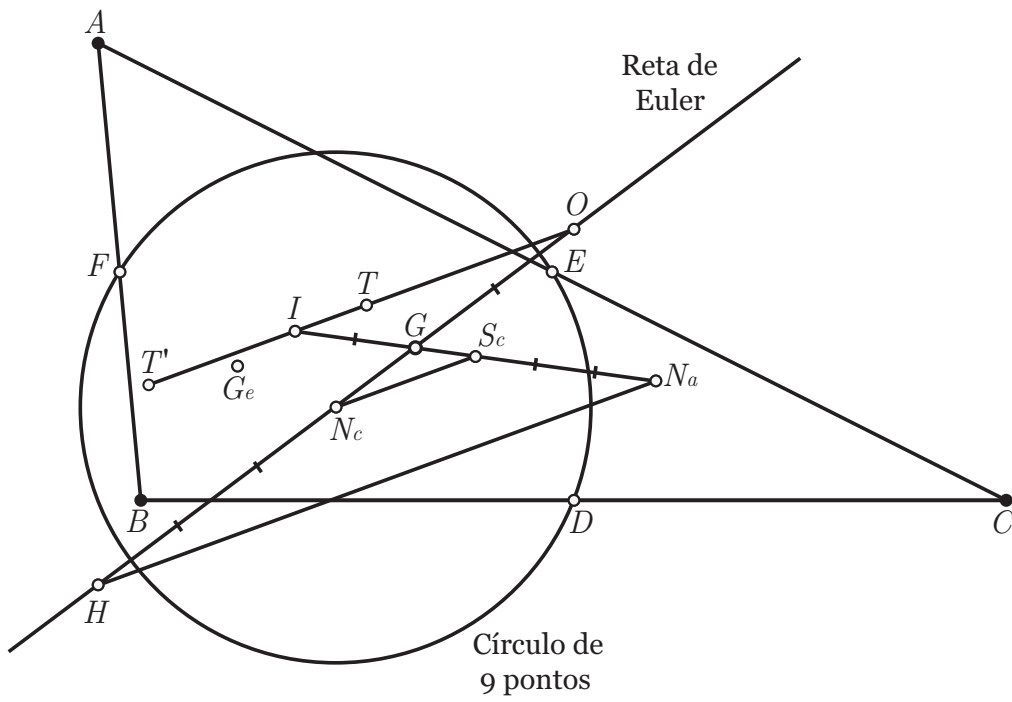


Figura 4.1: Resumo dos centros estudados.



ETC	Centro Geométrico	Coordenadas baricêntricas
...	Vértices do $\triangle ABC$ exata homogênea	$A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 0 : 1)$ $A = (S : 0 : 0), B = (0 : S : 0), C = (0 : 0 : S)$ $A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 0 : 1)$
...	Pontos médios dos lados exata homogênea	$D = (0 : 1 : 1), E = (1 : 0 : 1), F = (1 : 1 : 0)$ $D = (0 : \frac{S}{2} : \frac{S}{2}), E = (\frac{S}{2} : 0 : \frac{S}{2}), F = (\frac{S}{2} : \frac{S}{2} : 0)$ $D = (0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}), E = (\frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2}), F = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0)$
...	Pontos sobre os lados	$X = (0 : y : z), Y = (x : 0 : z), Z = (x : y : 0)$
...	Ex-incentros exata homogênea	$I_A = (-a : b : c)$ $I_A = \left(-\frac{a \cdot r_a}{2} : \frac{b \cdot r_b}{2} : \frac{c \cdot r_c}{2}\right)$ $I_A = \left(\frac{-a}{2(p-a)} : \frac{b}{2(p-a)} : \frac{c}{2(p-a)}\right)$
X(1)	Incentro exata homogênea	$I = (a : b : c)$ $I = \left(\frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2}\right)$ $I = \left(\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p}\right)$
X(2)	Baricentro exata homogênea	$G = (1 : 1 : 1)$ $G = \left(\frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3}\right)$ $G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$
X(3)	Circuncentro exata homogênea	$O = (a^2(-a^2+b^2+c^2) : b^2(a^2-b^2+c^2) : c^2(a^2+b^2-c^2))$ $O = \left(\frac{R^2 \text{sen} 2A}{2} : \frac{R^2 \text{sen} 2B}{2} : \frac{R^2 \text{sen} 2C}{2}\right)$ $O = \left(\frac{a^2(-a^2+b^2+c^2)}{4D^2} : \frac{b^2(a^2-b^2+c^2)}{4D^2} : \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{4D^2}\right)$
X(4)	Ortocentro	$H = \left(\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} : \frac{1}{a^2-b^2+c^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$ $H = (\text{tg} A : \text{tg} B : \text{tg} C)$ $H = (a^4 - (b^2 - c^2)^2 : b^4 - (c^2 - a^2)^2 : c^4 - (a^2 - b^2)^2)$
X(5)	Centro do círculo de 9 pontos	$N_c = (a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 : \dots : \dots)$ $N_c = (a \cos(B - C) : b \cos(C - A) : c \cos(A - B))$
X(7)	Ponto de Gergonne	$G_e = \left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right)$
X(8)	Ponto de Nagel	$N_a = (p-a : p-b : p-c)$
X(10)	Centro de Spieker	$S_p = (2p-a : 2p-b : 2p-c)$
X(55)	Divisor de $\overline{OI}$ na razão $R/r$	$T = (a^2(p-a) : b^2(p-b) : c^2(p-c))$
X(56)	na razão $-R/r$	$T' = \left(\frac{a^2}{p-a} : \frac{b^2}{p-b} : \frac{c^2}{p-c}\right)$

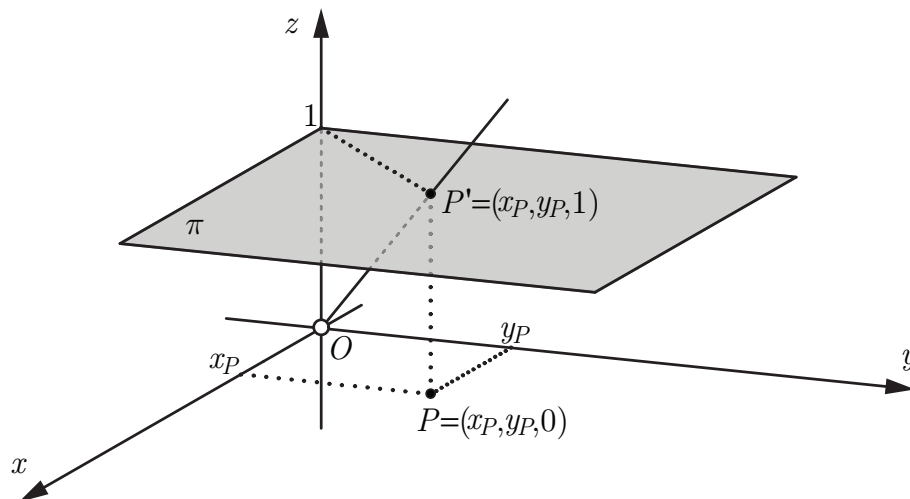
## *APÊNDICE A – Um modelo para pontos no infinito usando coordenadas homogêneas*

Desenvolveremos aqui uma interpretação geométrica para pontos no infinito usando as coordenadas homogêneas de um ponto definidas a seguir e, por conveniência, vamos considerar nosso plano como sendo o plano  $xy$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Dado então um ponto  $P = (x_P, y_P, 0)$  do plano  $xy$ , definimos as coordenadas homogêneas deste ponto como a tripla:

$$P' = (x_P, y_P, 1).$$

Esta tripla, por sua vez, pode ser identificada com o conjunto formado pela reta que passa por este ponto  $P'$  e pela origem  $O = (0, 0, 0)$  excluindo-se a própria origem  $O$ .



Com efeito: dado qualquer ponto  $(\hat{x}_P, \hat{y}_P, \hat{z}_P)$  desta reta, existe um número real  $\lambda \neq 0$  tal que  $(\hat{x}_P, \hat{y}_P, \hat{z}_P) = \lambda \cdot (x_P, y_P, 1)$ . Sendo assim, a partir do ponto  $(\hat{x}_P, \hat{y}_P, \hat{z}_P)$  desta reta, podemos recuperar as coordenadas homogêneas associadas dividindo-se o ponto por  $\hat{z}_P$ :

$$\left( \frac{\hat{x}_P}{\hat{z}_P}, \frac{\hat{y}_P}{\hat{z}_P}, \frac{\hat{z}_P}{\hat{z}_P} \right) = (x_P, y_P, 1).$$

Observe então que cada ponto  $(x_P, y_P, 0)$  do plano  $xy$  é representado por uma reta no espaço que

passa pela origem (menos a origem). Por conseguinte, retas no plano  $xy$  podem ser identificadas como planos passando pela origem menos a origem, como mostram as Figuras A.1 e A.2.

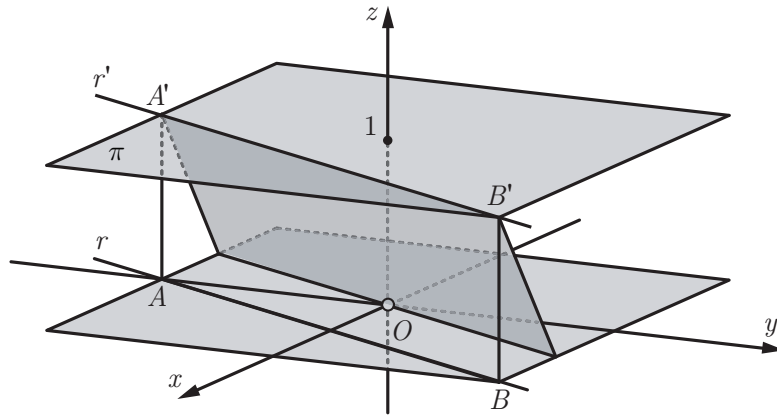


Figura A.1: A reta  $r$  do plano  $xy$  é identificada pelo plano que contém  $r'$  e passa pela origem.

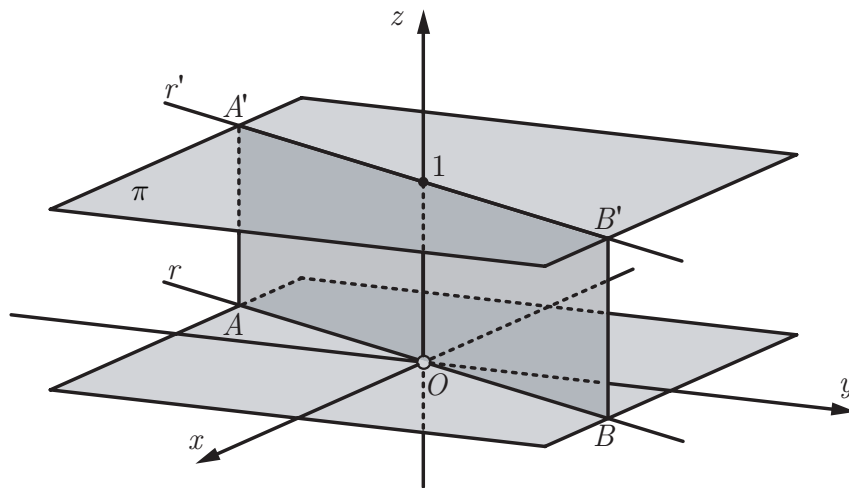


Figura A.2: A reta  $r$  do plano  $xy$  é identificada pelo plano que contém  $r'$  e passa pela origem.

Contudo, existem retas no espaço que passam pela origem (menos a origem) que não estão em associação com nenhum ponto do plano  $xy$ . Estas retas são justamente as retas contidas no plano  $xy$  e elas representarão os pontos no infinito. Esta representação pode ser motivada pelo argumento que se segue. Seja  $P_\lambda = \lambda \cdot (a, b, 0)$  um ponto sobre a reta  $r_\infty$  de equação  $bx = ay, z = 0$ . Considere também a reta  $r_\lambda = \overleftrightarrow{OP'_\lambda}$  no espaço que representam os pontos  $P_\lambda$ . Quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , a distância do ponto  $P_\lambda$  à origem tende a  $\infty$  (“o ponto  $P_\lambda$  está tendendo ao infinito”). Note que o ângulo entre a reta  $r_\lambda = \overleftrightarrow{OP'_\lambda}$  e o eixo  $z$  tende a  $\pi/2$ . Desta maneira, a reta  $r_\lambda = \overleftrightarrow{OP'_\lambda}$  está “tendendo” à reta  $r_\infty$ , o que sugere considerar-se  $r_\infty$  como a representação do ponto no infinito  $P_\infty$  associado à direção  $(a, b, 0)$  no plano  $xy$ . Assim, pontos no infinito são pontos que, em coordenadas homogêneas, têm a terceira componente nula.

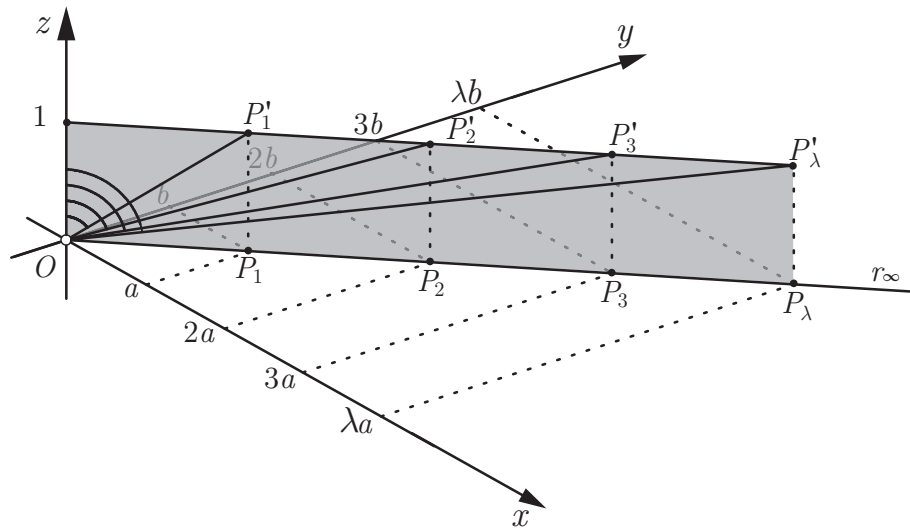


Figura A.3: A terceira coordenada homogênea nula caracteriza o ponto no infinito.

Esta representação permite dar sentido à frase “retas paralelas se encontram no infinito”. De fato, sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas paralelas no plano  $xy$ , como na Figura A.4.

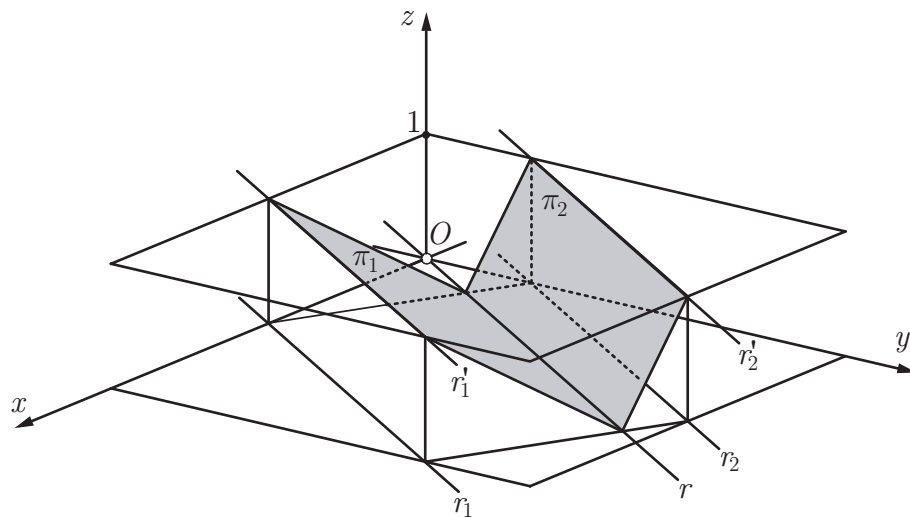


Figura A.4: Não existem retas paralelas quando as coordenadas são homogêneas.

Em coordenadas homogêneas, cada reta  $r_i$  é representada por um plano  $\pi_i$  que contém  $r'_i$  e passa pela origem, para  $i = 1, 2$ . Sendo assim, elas intersectam-se em uma reta  $r$  no plano  $xy$ , isto é, no ponto no infinito na direção desta reta.

Qual é a relação entre coordenadas baricêntricas e coordenadas homogêneas?

Sejam  $(u : v : w)$  as coordenadas baricêntricas do ponto  $P = (x_P, y_P)$  com relação ao triângulo

de referência  $\Delta ABC$  com vértices  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$ . Segue-se então que

$$\begin{cases} ux_A + vx_B + wx_C = \lambda \cdot x_P \\ uy_A + vy_B + wy_C = \lambda \cdot y_P \\ u + v + w = \lambda \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_P & \lambda \cdot y_P & \lambda \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Como  $\lambda \neq 0$ , o ponto  $(\lambda \cdot x_P, \lambda \cdot y_P, \lambda)$  identifica o ponto  $(x_P, y_P, 1)$  que, por sua vez, é a representação em coordenadas homogêneas do ponto  $P = (x_P, y_P)$  do plano. Assim, a relação entre os dois tipos de coordenadas é dada justamente pela Relação A.1.

Como pontos no infinito em coordenadas homogêneas têm a terceira componente nula, podemos nos perguntar quais são as triplas  $(u : v : w)$  de coordenadas baricêntricas que, pela Relação A.1, são levadas neste tipo de ponto. Como

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P & y_P & 0 \end{bmatrix} \text{ se, e somente se, } u + v + w = 0,$$

concluimos que o ponto de coordenadas baricêntricas  $P = (u : v : w)$  é levado em um ponto no infinito se, e somente se,  $u + v + w = 0$ .

Neste apêndice, usamos coordenadas homogêneas apenas para justificar o nome “ponto no infinito” para pontos em coordenadas baricêntricas cuja soma das coordenadas é nula. Contudo, este tipo de coordenadas tem outras aplicações. O leitor interessado pode consultar [3].

## APÊNDICE B – O círculo de nove pontos

A Figura B.1 mostra um triângulo  $\Delta ABC$  de circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ , onde  $D, E$  e  $F$  são os pontos médios dos lados,  $S, T$  e  $U$  são os pés das alturas e  $A^*, B^*$  e  $C^*$  são os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro  $H$  aos vértices  $A, B$  e  $C$ .

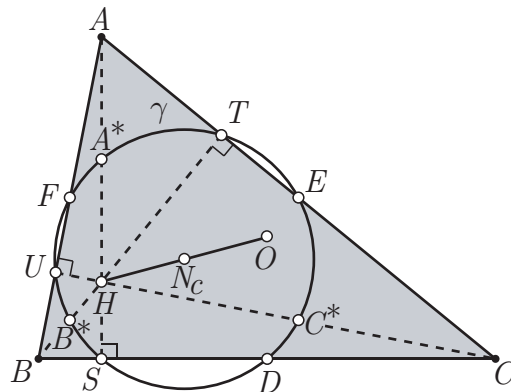
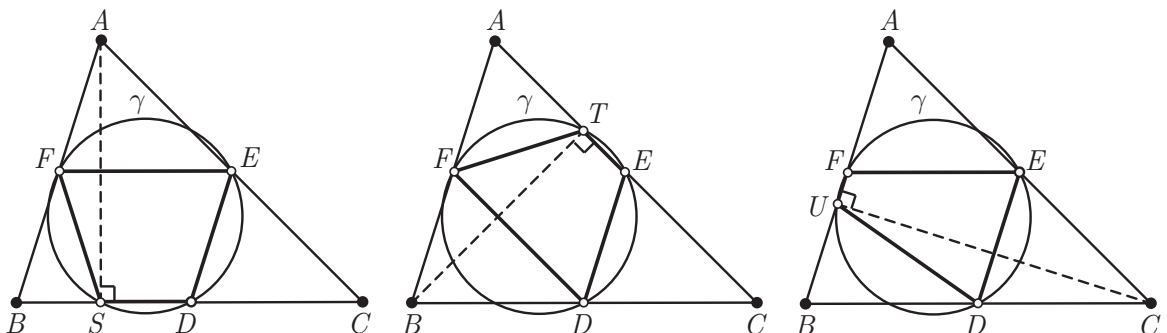


Figura B.1: O círculo de nove pontos e seu centro  $N_c = X(5)$  em ETC.

Na seqüência mostraremos um belíssimo resultado devido ao matemático alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800 – 1834) que nos garante: os 9 pontos  $D, E, F, S, T, U, A^*, B^*$  e  $C^*$  estão em um círculo  $\gamma$  cujo centro  $N_c$  é o ponto médio de  $\overline{OH}$  e cujo raio  $r_9$  é a metade do raio  $R$  do círculo circunscrito ao triângulo  $\Delta ABC$ .

(a) Por  $D, E, F, S, T$  e  $U$  passa um único círculo  $\gamma$ .



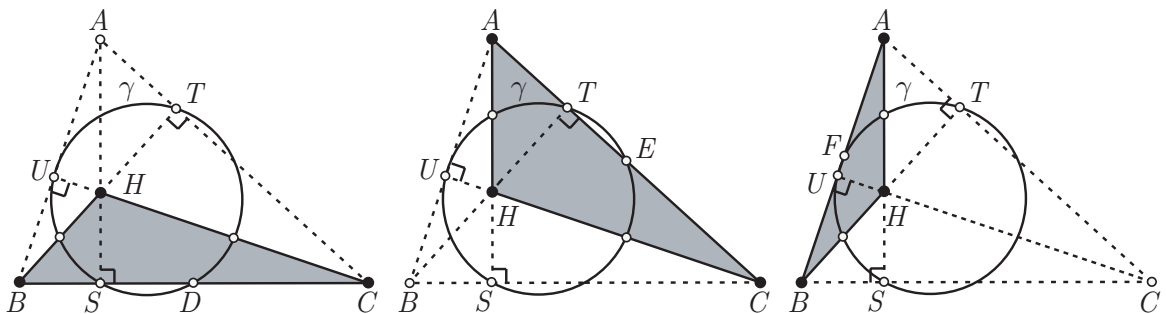
Como  $DE = AB/2$  (base média do triângulo  $\triangle ABC$ ) e  $SF = AB/2$  (mediana traçada do ângulo reto do triângulo  $\triangle SAB$ ), vale que  $DE = SF$ . Daí e do fato de  $EF$  (base média do triângulo  $\triangle ABC$ ) ser paralelo a  $SD$ , temos que o quadrilátero  $\square DEFS$  é um trapézio isósceles e, portanto, inscritível.

Procedendo de modo análogo, os quadriláteros  $\square DETF$  e  $\square DEFU$  são também trapézios isósceles e, portanto, inscritíveis. Daí e da unicidade do círculo passando por três pontos não-colineares, podemos concluir que :

*Um círculo passa pelos pontos médios dos lados de um triângulo  
se, e somente se,  
este círculo passa pelos pés das alturas desse triângulo.*

- (b) O círculo  $\gamma$  passa pelos pontos médios dos segmentos  $AH$ ,  $BH$  e  $CH$ .

Esta afirmação é consequência imediata do resultado anterior. Perceba na figura abaixo que, em relação ao triângulo  $\triangle HBC$ ,  $S$  é o pé da altura  $HS$  (relativa ao lado  $BC$ ),  $U$  é o pé da altura  $BU$  (relativa ao lado  $CH$ ) e  $T$  é o pé da altura  $CT$  (relativa ao lado  $HB$ ). Daí, por ser o ponto de encontro das três alturas  $HS$ ,  $BU$  e  $CT$ ,  $A$  é o ortocentro do triângulo  $\triangle HBC$ .

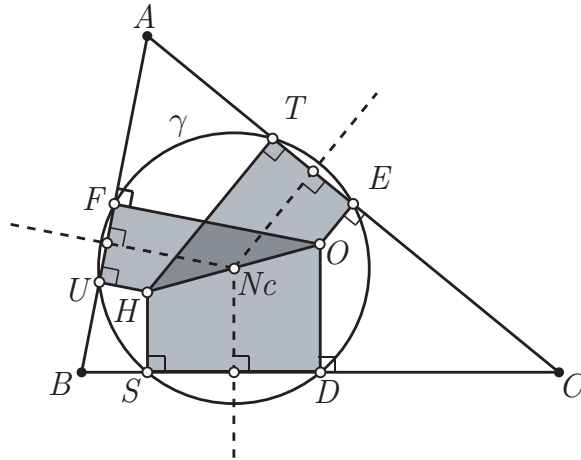


De (a), como o círculo  $\gamma$  passa pelos pés das alturas  $S$ ,  $T$  e  $U$ , então o círculo  $\gamma$  passa pelos pontos médios dos lados  $BC$ ,  $CH$  e de  $HB$  do triângulo  $\triangle HBC$ . Com raciocínio semelhante, concluímos que os pontos  $B$  e  $C$  são, respectivamente, ortocentros dos triângulos  $\triangle HCA$  e  $\triangle HAB$  e o círculo  $\gamma$  passa pelo ponto médio do segmento  $AH$ . Perceba também que o círculo  $\gamma$  é comum aos triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle HBC$ ,  $\triangle HCA$  e  $\triangle HAB$ .

- (c) O centro do círculo  $\gamma$  é ponto médio de  $\overline{HO}$ .

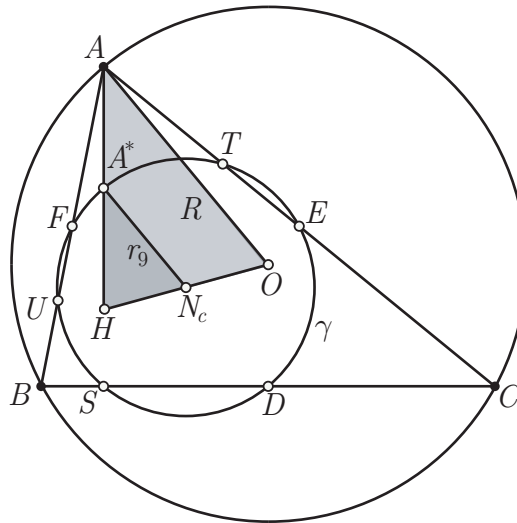
Observemos agora que o trapézio  $\square OFUH$  é retângulo em  $F$  e  $U$ . Logo, a mediatriz de  $FU$  passa pelo ponto médio de  $OH$  e o mesmo acontece com as mediatrizes de  $SD$  e  $ET$  como mostra a figura seguinte. Concluímos então que o centro do círculo de nove pontos

$N_c$  é ponto médio de  $OH$ .



(d) O raio  $r_9$  do círculo  $\gamma$  é a metade do raio  $R$  do círculo circunscrito.

Como  $N_c$  é ponto médio de  $HO$  e  $A^*$  é ponto médio de  $AH$ , temos que  $N_cA^* = r_9$  (base média do triângulo  $\Delta OAH$ ) vale a metade de  $OA = R$  ou seja,  $r_9 = R/2$ .



Perceba que o centro do círculo de nove pontos  $N_c$  também pertence à reta de Euler.

Ao círculo  $\gamma$  que passa pelos pontos médios dos lados  $D, E, F$  (e formam o triângulo medial ou *triângulo pedal do circuncentro*  $O$ ), pelos pés das alturas  $S, T, U$  (e formam o *triângulo órtico* ou *triângulo pedal do ortocentro*  $H$ ) e pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro do triângulo  $A^*, B^*, C^*$  (e formam o *triângulo de Euler*), denominamos *círculo de nove pontos* e seu centro  $N_c$  (*Nine point center*) é o centro  $X(5)$  em ETC.

De outro modo, podemos dizer que

*Os triângulos medial, órtico e de Euler possuem o mesmo círculo circunscrito.*



## *Referências Bibliográficas*

- [1] BORTOLOSSI, H. J., *Demonstrações Legíveis Geradas por Computador em Geometria Euclidiana Plana*. O Método da Área - II Bienal da SBM - Universidade Federal da Bahia, 2004.
- [2] BORTOLOSSI, H. J., CUSTÓDIO, L. I. R. L., DIAS, S. M. M., *Triangle Centers with C.a.R.*, Universidade Federal Fluminense, 2009.  
<http://www.uff.br/trianglecenters/etcwc.html>
- [3] GOMES, J., VELHO, L., *Fundamentos da Computação Gráfica*. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [4] Kimberling, K., *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers – ETC*. University of Evansville, 2009.  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [5] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 3. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [6] MENDES, M., THIAGO, C., (GRUPO TEOREMA DE MATEMÁTICA), *Áreas Para Achar Razão de Segmentos*. Rio de Janeiro, S.B.M - EUREKA! 25, Maio, 2007.
- [7] MORGADO, J. M., WAGNER, A. C., *Geometria - I, Uma Métrica Plana*. Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves, 1973.
- [8] MORGADO, J. M., WAGNER, A. C., *Geometria - II, Uma Métrica Plana*. Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves, 1973.
- [9] SIGUR, S., *Where are the conjugates?*. Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University, Forum Geometricorum. Volume 5, 2005.  
<http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200501.pdf>
- [10] WEISSTEIN, E. W., *Triangle Center Function*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/TriangleCenterFunction.html>
- [11] YIU, P., *Introduction to the Geometry of the Triangle*. Department of Mathematics Florida Atlantic University, Version 2.0402, 2002.  
<http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps>