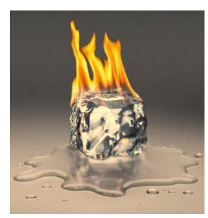
OS NÚMEROS INTEIROS
NO
ENSINO FUNDAMENTAL

Proposta para a V Bienal da SBM

Mini-Curso para Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Básico

 +  = 

Pedro Luiz Malagutti
Yuriko Baldin

UFSCAR

2010

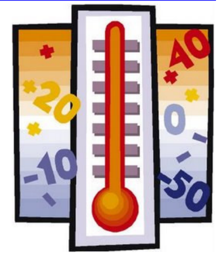
OS NÚMEROS INTEIROS
NO
ENSINO FUNDAMENTAL

Pedro Luiz Malagutti
Yuriko Baldin

SUMÁRIO

OS NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

INTRODUÇÃO



OS NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Este texto apresenta um Curso de Aperfeiçoamento destinado a professores que lecionam do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental. Os temas são abordados pensando na aplicação prática em sala de aula e, por isso, os conteúdos são entremeados com discussões pedagógicas, acompanhados de jogos e atividades sobre os números inteiros.

Objetivos

O *objetivo fundamental* deste curso é fornecer ao professor um *material didático de apoio* ao ensino de números inteiros, a partir do 6º ano do Ensino Fundamental. É muito comum o professor de Matemática desta série encontrar alunos com dificuldades em acompanhar o estudo deste novo conceito de números, por apresentar deficiência no conhecimento de números naturais, que deveria trazer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Também é frequente o professor encontrar alunos nas classes do 8º ano (ou até mesmo do 9º ano) que mostram domínio insuficiente dos significados e das técnicas que envolvem os números inteiros. Este curso foi elaborado para auxiliar o professor a enfrentar estes desafios.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais

[6] A conclusão do Ensino Fundamental ou a progressão para o Ensino Médio dos alunos que carregam dificuldades com os números inteiros não permite atingir os objetivos do ensino

de matemática, como preconizam os PCN’s[1]; em particular, os PCN’s são explícitos quanto aos objetivos do ensino de Matemática para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries/6º. e 7º. anos) sobre o tópico específico de Números, como no trecho destacado:

> “O ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento numérico,... que levem o aluno a ampliar e construir novos significados para os números – naturais, inteiros e racionais - a partir de sua utilização no contexto social... resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação” (p. 64).

A proposta pedagógica

O texto apresentado neste Curso não constitui um livro didático.

> A proposta deste material é fornecer ao professor um material auxiliar que permita detectar a falha na compreensão do aluno sobre diversos tópicos da teoria de números inteiros. A atividade de diagnóstico destas falhas é feita por meio de problemas aplicados, jogos e exercícios, e então um material de apoio é fornecido para recuperar o entendimento. O material inicia com **um capítulo de diagnóstico** e é seguido de **capítulos de conteúdo e métodos**.

Cada um dos capítulos de conteúdos e métodos desenvolve tópicos considerados chaves para o desenvolvimento do conteúdo curricular da Teoria de Números Inteiros, de modo a auxiliar o professor na tarefa de planejar e conduzir atividades pedagógicas nas salas de aula ou em sessões de reforço.

Com as atividades propostas, espera-se que o aluno possa superar as deficiências, com pleno entendimento dos conceitos matemáticos, e que não encare o estudo da Matemática como apenas treinamento de fórmulas e exercícios repetitivos.

As dificuldades na aprendizagem dos números inteiros

---

[1] Brasil, (1998), Parâmetros Curriculares Nacionais, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Matemática, MEC/SEF, Brasília.

A passagem do campo dos números naturais para os números inteiros impõe um salto conceitual significativo, devido às abstrações necessárias para fundamentar as extensões que nem sempre são naturais e que são fruto de um grande trabalho ao longo da história. Toda teoria matemática que estende uma anterior deve generalizá-la, mantendo-a como uma subteoria e conservando na teoria antiga todas as propriedades já válidas. Este princípio de generalização/conservação é mostrado exemplarmente quando construímos os inteiros a partir dos números naturais, constituindo assim uma oportunidade ímpar de exibir ao estudante a força do pensamento lógico-dedutivo e o poder generalizador da Matemática.

Existem várias maneiras de realizar tal façanha, algumas mais adequadas ao formalismo - em geral próprias apenas para o entendimento do professor - outras de cunho pedagógico alicerçadas na intuição - essas mais adequadas para as primeiras experiências dos estudantes com números inteiros. A proposta deste Curso é aproximar e entrelaçar estas duas abordagens. No que segue, vamos detalhar algumas delas:

Construções dos inteiros a partir dos naturais

- **Através de identificação por relação de equivalência**
- **Por métodos axiomáticos**
- **Através da redescoberta investigativa**
- **Pelo entendimento da gênese histórica**

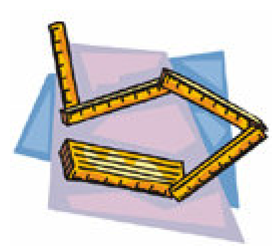
Os números naturais trabalhados nas séries iniciais do Ensino Básico constituem o conjunto numérico

$$\mathbb{N} = \{ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \}$$

munido das operações usuais de soma e produto. A operações de subtração e divisão, embora possam ser levadas a cabo com certos pares de números naturais, não estão bem definidas em $\mathbb{N}$. Isto se deve ao fato do não fechamento da subtração e da divisão de números naturais, posto que neste conjunto numérico é impossível realizar operações tais como: $3 - 4$ e $5 \div 3$, já que o resultado não é um número natural.

O homem logo percebeu que seria necessário criar novas classes de números para dar conta destas deficiências dos números naturais, quer seja para resolver problemas práticos do dia a dia, quer seja para elaborar sistemas algébricos mais complexos que fossem teoricamente bem fundamentados.

Historicamente os números racionais surgiram antes dos números inteiros, principalmente devido à sua utilidade nas mensurações de comprimentos, de áreas e de volumes. Os números inteiros foram uma invenção tardia da humanidade, e



isto se deveu principalmente ao não entendimento ontológico dos conceitos envolvidos e também às dificuldades em definir de modo coerente suas operações.algébricas. Afinal, o que é, de fato, um número negativo?

Vejamos algumas dificuldades encontradas quando queremos introduzir os números inteiros, conservando as propriedades dos números naturais:

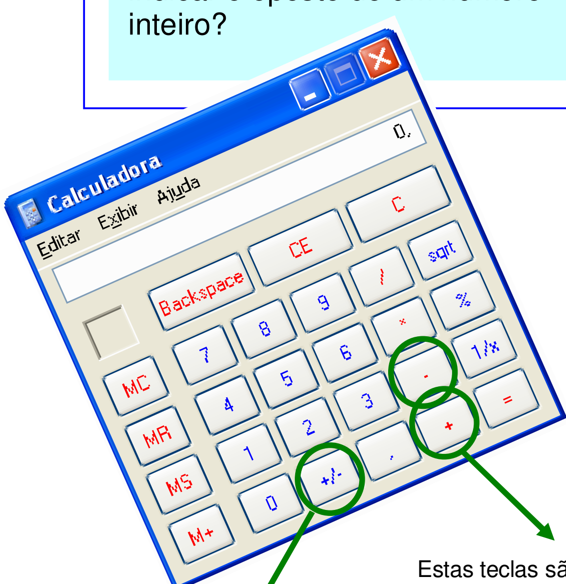
Exemplo 1 Se $3 > 2$, porque $-3 < -2$?

Qual é o significado do sinal "–" que inverte a ordem natural dos números? Os números inteiros, além de medir quantidades, diferenciam algum tipo de "qualidade" (ser positivo ou negativo). Porque esta qualidade interfere na ordem?

Exemplo 2 Porque $-(-5) = +5$?

Como dar significado a esta involução provocada pelo sinal "–"?

Exemplo 3 Qual a diferença entre o sinal "–" na frente de um número natural e o sinal de operação de subtração? Porque se usa o mesmo sinal? Porque o mesmo sinal é usado ainda para se indicar o oposto de um número inteiro?



Esta tecla inverte o sinal do número (operação unária, com um só número)

Estas teclas são usadas para efetuar operações com dois números (operações binárias)

Alguns textos fazem distinção entre o sinal de oposto de um número e o sinal da operação de subtração. Esta diferença é sutil, mas vale a pena ser destacada.

Nestes textos, a qualidade de um número inteiro (ser positivo ou negativo) é indicada pelos sinais "+" e "–" do lado esquerdo do número, um pouco acima do usual, como nos exemplos:

$$^{+}7 \quad \text{e} \quad ^{-}3$$

Estes sinais fazem parte integrante do número inteiro e não devem ser confundidos com os sinais usuais das operações.

Quando se deseja fazer as operações de soma e subtração os sinais ficam nas suas posições normais entre as parcelas. Veja os exemplos:

$$(^{+}7) + (^{+}3)\,,\ (^{+}7) + (^{-}3) \ \text{e} \ (^{-}3) - (^{-}7)$$

Se nada for dito, haverá grande confusão na interpretação dos símbolos.
É por isso que essa diferenciação aparece, por exemplo, nas calculadoras eletrônicas. Veja a figura ao lado.

Cuidado: os mesmos símbolos são usados com diferentes significados! a menos que se estabeleça distinções entre eles, isto pode causar confusão. Observe três usos distintos do sinal "–" : $^{-}2$, $-\,(^{+}7)$ e $3 - 1$.

Apesar disto, é usual escrever +7 ou simplesmente 7 no lugar de $^{+}7$ e -7 no lugar de $^{-}7$

Exemplo 4 Uma "prova" que $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

Partimos do fato que $-1 < 1$ (o que é bastante plausível). Dividimos ambos os membros por 1 e obtemos

$$\frac{-1}{1} < \frac{1}{1} \qquad (*)$$

(isto porque a desigualdade não se altera quando dividimos ambos os membros por um mesmo número positivo). Agora, se os numeradores de duas frações são iguais, a maior fração é aquela que tem o menor denominador. Ora, $-1 < 1$, logo

$$\frac{1}{-1} > \frac{1}{1} \qquad (**)$$

(isto também se justifica pelo fato de que quando um número a é menor do que um número b, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$). Juntando (*) com (**), concluímos que

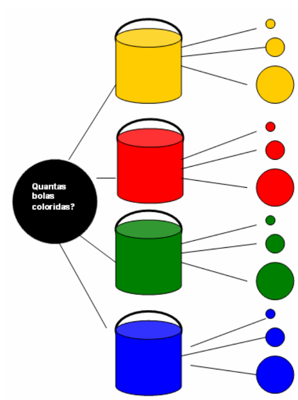
$$\frac{-1}{1} < \frac{1}{-1}$$

Onde está o erro?

Exemplo 5 As operações nos números naturais têm significado claro e condizente com experimentos do mundo real. Como dar significado, por exemplo, a multiplicações do tipo $^{-}3$ x $^{+}7$ e $^{-}3$ x $^{-}7$?

Somar números naturais está associado ao ato de juntar, de reunir. Multiplicar números naturais descreve várias ações concretas:

- soma repetida de parcelas iguais,
- números de arranjos retangulares,
- número de decisões tomadas em sequência (problemas de contagem – veja na figura ao lado a operação 4 x 3).



No conjunto dos números inteiros, operações tais como $^{-}3$ x $^{+}7$ e $^{-}3$ x $^{-}7$ correspondem a ações que efetivamente podem ser realizadas? Se sim, quais são essas ações? Se não, temos liberdade de definir de modo arbitrário o produto de números inteiros com parcelas negativas? Mas, fazendo isto, haverá compatibilidade entre nossa escolha e as propriedades válidas dos números naturais? Como explicar isto a um aluno?

Estes exemplos mostram que, se não formos cuidadosos, encontraremos muitas dificuldades em construir e dar significado aos números inteiros.

Quando falha a intuição, buscamos segurança no formalismo e este é um problema grande aqui, pois o formalismo exigido para a correta compreensão dos números inteiros ultrapassa o nível médio de abstração de um aluno do 6º ano. Para nos prepararmos melhor para discutir e enfrentar este problema, vamos relembrar, de um modo rápido, as possíveis construções dos números inteiros.

Os números inteiros como pares de números naturais identificados

Existe um processo de simetrização dos números naturais que permite construir os números inteiros identificando pares de números naturais. Um número negativo pode ser pensado como "um par de números que o produz". Por exemplo,

o número negativo – 3 pode ser identificado com o par (5, 8) pois 5 – 8 = – 3

Esta identificação nos permite definir números negativos, <u>**sem usar a operação de subtração**</u>, simplesmente dizendo, ou melhor, aceitando que – 3 <u>**é**</u> (5,8). Entretanto, como existem muitos outros pares de números naturais cuja subtração resulta em – 3 (por exemplo, (3,6), (2,5) satisfazem 3 – 6 = –3 e 2 – 5 = – 3), teremos que fazer identificações.

Definição: Dizemos que os pares de números naturais (a,b) e (c,d) estão relacionados se a + d = b + c.

Por trás desta definição há obviamente o desejo de se realizar operações de subtração a – b e c – d , mesmo no caso em que a < b e c < d, e identificar (a,b) com (c,d) para que eles definam o mesmo número inteiro.

Esta relação entre pares de números naturais é uma **relação de equivalência**, isto é, ela é reflexiva, simétrica e transitiva. Toda relação de equivalência define uma partição no conjunto em que está definida, sendo que os elementos desta partição são as classes de equivalência dos elementos do conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

O par (a,b) está relacionado consigo mesmo pois a + b = a + b; disto segue que a relação é reflexiva.
A relação também é simétrica, isto é, se (a,b) está relacionado com (c,d), então (c,d) está relacionado com (a,b). Isto segue diretamente da hipótese que a + d = b + c e portanto c + b = d + a.
A relação é transitiva: se (a,b) está relacionado com (c,d) e (c,d) com (e,f) então
a + d = b + c
c + f = d + e
Somando e cancelando os termos comuns (já que a lei de cancelamento vale nos números naturais), obtemos a + f = b + e, ou seja, (a,b) está relacionado com (e,f).

A classe de equivalência do par (a,b) é o conjunto de todos os pares de números naturais que estão relacionados com (a,b). Esta classe é denotada por [(a,b)]. Podemos identificar esta classe com o número inteiro a – b. Se este número for positivo ou nulo, ele se identifica com um número natural – por exemplo [(a,a)] representa o número inteiro a – a = 0. Se a – b for negativo ela acaba de ser definido como sendo [(a,b)]! É possível definir as operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação nos inteiros, bem como ordená-los, de modo que as propriedades dos números naturais continuem ainda válidas neste novo contexto, isto é vendo $\mathbb{N}$ como um subconjunto dos inteiros. O conjunto dos números inteiros, nesta abordagem, é definido como sendo { [(a,b)] / a, b pertencem a $\mathbb{N}$ }.

Você sabia que esta abordagem foi utilizada no antigo curso ginasial (6º. ao 9º. anos atualmente) para o ensino de números inteiros nas escolas brasileiras, nos anos 60 e 70 do século passado, dentro de um movimento internacional chamado de **Matemática Moderna**?

O conjunto dos números inteiros é denotado pela letra $\mathbb{Z}$ e escrito como

$$\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$$

(proveniente de *Zahlen* que significa número em alemão).

Os números inteiros como um modelo de um sistema axiomático

Um outro modo de formalizar a construção dos números inteiros é apresentá-los axiomaticamente. Vejamos como isto pode ser feito:

Admitiremos que existe um conjunto $\mathbb{Z}$ de números que tem dois elementos destacados 0 (zero) e 1 (um), munido de duas operações: a adição (+) e a multiplicação (.), que satisfazem os seguintes axiomas:

Para todos x, y e z em $\mathbb{Z}$, tem-se:

(A1) $x + (y + z) = (x + y) + x$
(a adição é associativa);

(A2) $x + y = y + x$
(a adição é comutativa);

(A3) $x + 0 = 0 + x = x$
(0 é o elemento neutro da adição);

(A4) Para todo inteiro x, existe um elemento - x em $\mathbb{Z}$, chamado oposto de x satisfazendo
$x + (-x) = (-x) + x = 0$;

(M1) $x.(y.z) = (x.y).z$
(a multiplicação é associativa);

(M2) $x.y = y.x$
(a multiplicação é comutativa);

(M3) $x .1 = 1. x = x$
(1 é elemento neutro da multiplicação);

(D) $x.(y + z) = x.y + x.z$
(a multiplicação é distributiva em relação à adição).

Estas propriedades definem uma estrutura algébrica conhecida como *anel abeliano* (devido ao matemático norueguês Niels Abel (1802-1829)). Os estudantes de graduação em Matemática aprendem a trabalhar com estas estruturas nos primeiros anos da faculdade; eles estudam como as propriedades de $\mathbb{Z}$ podem ser usadas para entender outras estruturas, (tal como o anel dos polinômios), mas muitas vezes não fazem conexões destes estudos com seus conhecimentos do Ensino Médio e Fundamental. No caso dos licenciandos, estas conexões são extremamente importantes para o pleno exercício da profissão.

A subtração entre os elementos x e y de $\mathbb{Z}$ é definida como sendo x + (-y), ou seja, subtrair é somar com o oposto.

Em $\mathbb{Z}$ existe uma relação de ordem entre seus elementos (<), que satisfaz os seguintes axiomas:

Para todos x, y e z em $\mathbb{Z}$,

(O1) Lei da tricotomia: vale uma e somente uma das afirmações:

$$x < y;\ x = y;\ y < x$$

(O2) Se x < y e y < z então x < z (a relação < é transitiva);

(O3) Se x < y então x + z < y + z (a relação < é compatível com a adição);

(O4) Se x > 0 e y > 0 então x.y > 0 (a relação < é compatível com a multiplicação);

Resta somente apresentar um importante axioma satisfeito por $\mathbb{Z}$, ainda relacionado com a ordem <. Escrevemos $x \leq y$ para indicar que $x < y$ ou $x = y$. Um conjunto não vazio $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente por um inteiro m se $m \leq a$ para todo a em ***A***.

O último axioma de $\mathbb{Z}$ é conhecido como o Princípio do Menor Inteiro.

PRINCÍPIO DO MENOR INTEIRO

Todo subconjunto não vazio limitado inferiormente $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{Z}$ possui um menor elemento, isto é, existe a_0 pertencente a ***A*** tal que $a_0 \leq a$ para todo a em ***A***.

Com estes axiomas é possível construir a teoria dos números inteiros. Sem dúvida há aqui severas restrições pedagógicas em se adotar este procedimento para ensinar esta teoria para alunos que estão cursando o 6º. ou 7º. anos do Ensino Fundamental. O formalismo envolvido já pressupõe maturidade e conhecimentos prévios de fatos intuitivos subjacentes aos axiomas. Por exemplo, o Princípio do Menor Inteiro é equivalente ao Princípio de Indução Finita, que é uma poderosíssima técnica de demonstração para se demonstrar resultados em conjuntos infinitos enumeráveis.

Princípio da Indução Finita

Seja A um subconjunto de números naturais e suponha que:

a) $n = 0$ é um elemento do conjunto A

b) Sempre que um elemento n pertencer ao conjunto A, é possível provar que seu sucessor $n + 1$ também pertence ao conjunto A.

Então A coincide com o conjunto de todos os números naturais, isto é $A = \mathbb{N}$

O que será trabalhado neste texto?

As duas abordagens anteriores - construção por relação de equivalência e sistematização axiomática de $\mathbb{Z}$ - não têm se mostrado adequadas para o trabalho na Escola Básica. Como então trabalhar conceitualmente os números inteiros com alunos do Ensino Fundamental? Vamos, no decorrer deste texto, buscar alternativas didáticas para o ensino dos números inteiros, destacando, sempre que possível, a gênese histórica dos conceitos e apresentando atividades que permitam a redescoberta, por parte do aluno, das principais ideias acerca dos números inteiros. Estas atividades serão desenvolvidas utilizando-se as seguintes metodologias:

- **Resolução de Problemas** – diagnóstico (com problemas do cotidiano) e desafios (inspirados em problemas de olimpíadas de matemática);
- **Manipulações de materiais concretos** – construção e montagem de experimentos didáticos que, de fato, promovam a aprendizagem;
- **Jogos** – introdutórios, exploratórios e para expansão de conceitos.

A estrutura do Curso é composta por 8 capítulos a serem trabalhados em sessões sucessivas. Em cada sessão, os professores estudarão o desenvolvimento da teoria que embasa cada um dos capítulos com o intuito da aplicação das atividades descritas em suas aulas. O Curso é de caráter presencial, com a possibilidade das seções que se referem à confecção de jogos, serem de caráter semi-presencial, com assistência à distância.

Os conteúdos serão apresentados de acordo com a seguinte organização:

Introdução

Capítulo 1: *Diagnóstico* sobre "Números Inteiros". Neste capítulo o professor tem contato com uma sequência organizada de atividades para diagnóstico da compreensão de tópicos sobre os números inteiros. A sequência é apresentada sob forma de problemas e atividades/jogos que permitirão detectar a falha conceitual sobre os números inteiros e sobre habilidades em efetuar as operações com os mesmos. Entende-se que este capítulo permitirá ao professor selecionar o conteúdo que o aluno deverá trabalhar para reforçar seu entendimento.

Capítulo 2: Este capítulo desenvolve a característica que distingue os números inteiros dos números naturais, a representação de números inteiros na reta numérica orientada, o conceito de oposto e de valor absoluto. Nesta seção são também apresentados os jogos que acompanham o desenvolvimento dos conceitos e são estudadas as simulações na sala de aula: Jogo do Robô, Jogo de cara/coroa, e Jogo do Labirinto Crescente.

Capítulo 3: Este capítulo trabalha com as operações de Adição e Subtração de Números Inteiros, desenvolvendo os conceitos teóricos e as atividades/problemas que ajudam a compreensão dessas operações. Apresenta o uso de alguns jogos como estratégia para fixação de propriedades das operações e do treinamento de habilidades operatórias.

Capítulo 4: Neste capítulo trabalha-se a confecção de jogos que acompanham o Capítulo 3 e propõe-se simular a utilização dos mesmos na sala de aula. Os jogos trabalhados neste capítulo são: Jogo das Cartas Inteiras, Atividades com Fichas Positivas/Negativas, Jogo Financeiro, Jogo do Dinossauro, Jogo do Perde/Ganha e Jogo Matix.

Capítulo 5: Este capítulo trabalha as operações de multiplicação e divisão de números inteiros. São desenvolvidas atividades/problemas que ajudam a compreensão destas operações. Propõe-se o uso de alguns jogos como estratégia para fixação de propriedades das operações e para o desenvolvimento de habilidades operatórias.

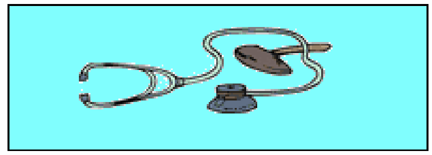
Capítulo 6: Este capítulo é continuação do anterior. Trabalha-se ainda as operações de multiplicação, divisão e as potências de base inteira e introduz-se a potenciação com expoente não negativo. O capítulo contém atividades/problemas que ajudam a compreensão dessas operações e jogos como estratégia para fixação de propriedades e familiaridade com técnicas operatórias.

Capítulo 7: Este capítulo desenvolve os conceitos de divisibilidade, Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum, incluindo o Algoritmo da Divisão, múltiplos e divisores. Inclui-se experimentos com a "Atividade com ampulheta".

Capítulo 8: Aprofunda-se o estudo de múltiplos e divisores, números primos e terminando com o Teorema Fundamental da Aritmética. Continuam-se as atividades com resolução de problemas. e inicia-se o uso de atividades da Revista do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática.

Referências bibliográficas

1. DIAGNÓSTICO



COMO DETECTAR DIFICULDADES COM NÚMEROS INTEIROS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Este capítulo contém uma sequência de atividades para serem aplicadas com alunos, a fim de diagnosticar o grau de compreensão dos conceitos fundamentais de Números Inteiros. O grau de complexidade das atividades permite detectar o nível de dificuldade do aluno em relação a um determinado tópico do conceito ligado aos números inteiros. As questões/atividades estão agrupadas de acordo com os estágios de compreensão do conceito e da técnica operatória cuja deficiência se deseja detectar.

1.1 Questões sobre a identificação e o registro do número inteiro, sem operações.

QUESTÃO 1.1.1:

Represente as situações a seguir com números inteiros:

a) **Antônio recebeu 8 reais.** _____________

b) **Contraí uma dívida de 12 reais.** ____________

c) **Hoje está frio, a temperatura é de 2º (graus) abaixo de zero.** _____________

d) **No Rio de Janeiro está quente, 42º (graus) acima de zero.** _____________

e) **Um lucro de 30 reais.** _____________

f) **Um prejuízo de 50 reais.** _____________

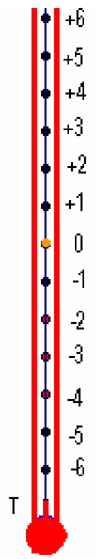
g) **Uma temperatura de 5 graus abaixo de zero. Que frio!** _____________

h) **Um tesouro foi encontrado no fundo do mar. O pesquisador disse que estava a 30 metros abaixo do nível do mar.** _____________

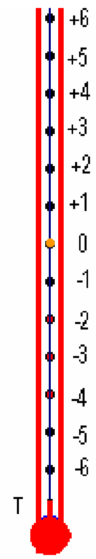
QUESTÃO 1.1.2:

Registre no termômetro, com os números inteiros, as seguintes leituras:

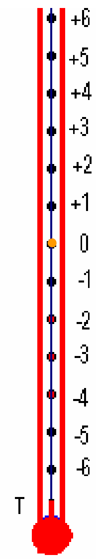
a) 3 graus acima de zero



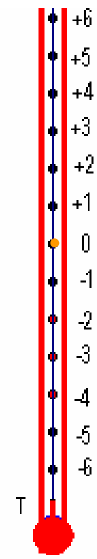
b) 5 graus abaixo de zero



c) 4 graus acima de zero

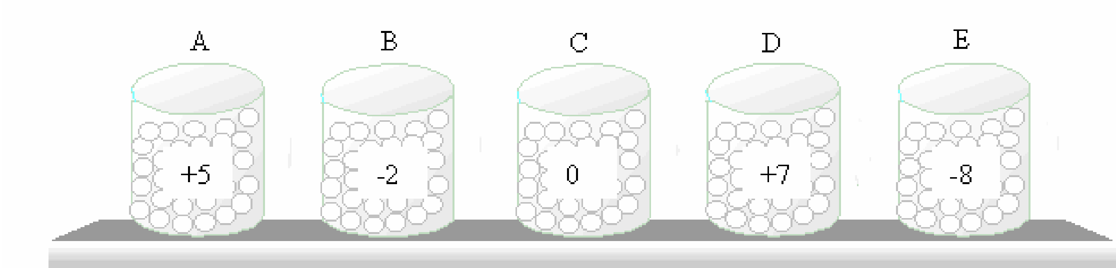


d) 2 graus abaixo de zero



QUESTÃO 1.1.3:

Um comerciante adquiriu recipientes de vidro com bolinhas de pingue-pongue que deveriam conter 30 bolinhas cada um. Antes de colocá-los na loja ele os conferiu e fez as seguintes anotações:



a) **Quais recipientes contêm bolinhas a mais?**_________________

b) **Quais recipientes contêm bolinhas a menos?**________________

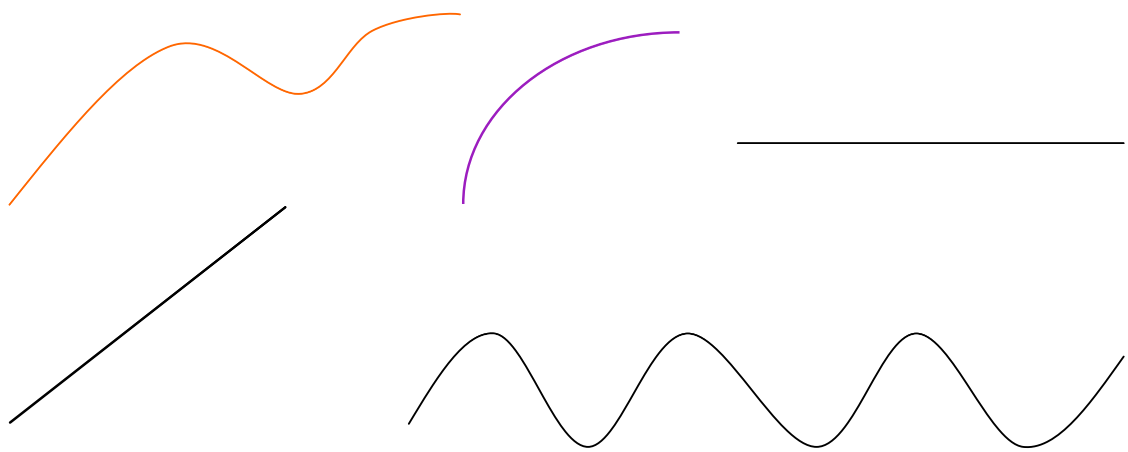
c) **Quais recipientes contêm exatamente as 30 bolinhas?**_________

1.2. Questões sobre representações geométricas dos números inteiros – a reta numérica orientada

QUESTÃO 1.2.1:

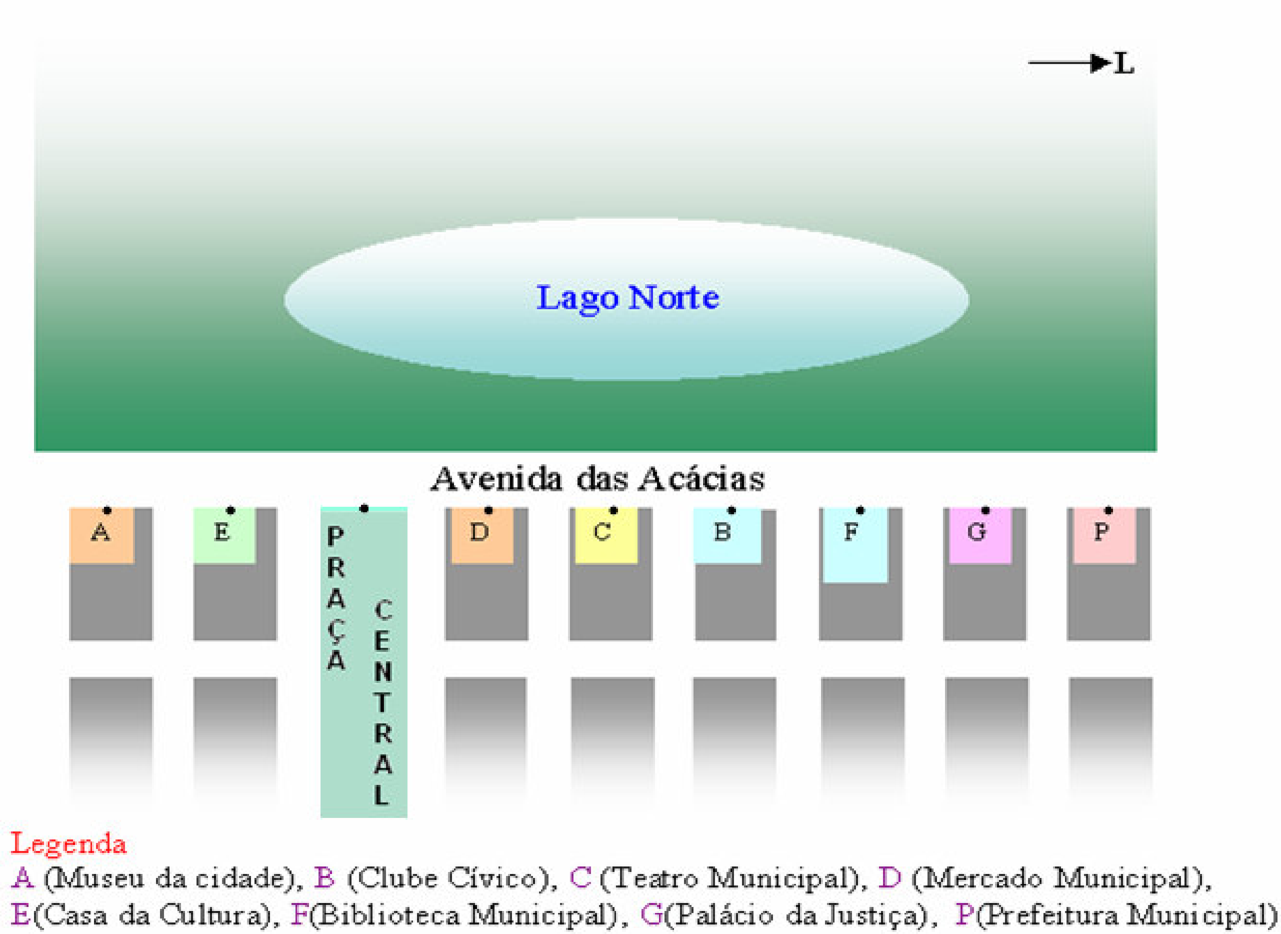
Imaginando que as linhas abaixo representem traçados de estradas, oriente-as utilizando o conjunto $\mathbb{Z}$ de números inteiros para representar as distâncias em quilômetros (km). Para fazer a orientação lembre-se que é necessário:

- ► **localizar um ponto e colocar nele o "marco zero";**
- ► **indicar com uma flecha o sentido "crescente";**
- ► **marcar, a partir do marco zero, os números inteiros positivos e negativos, utilizando uma "unidade" pré-fixada.**



QUESTÃO 1.2.2:

Um mapa da região central de uma cidade está representado na figura. Para orientar um turista que visita a cidade, a praça central é tomada como ponto de partida. A Avenida das Acácias é uma via principal em que muitas atrações estão localizadas. Se uma reta numérica representa a localização das quadras na Avenida das Acácias, quais são os números inteiros que correspondem a cada atração apresentada no mapa?



A =___ , B =___, C =___,

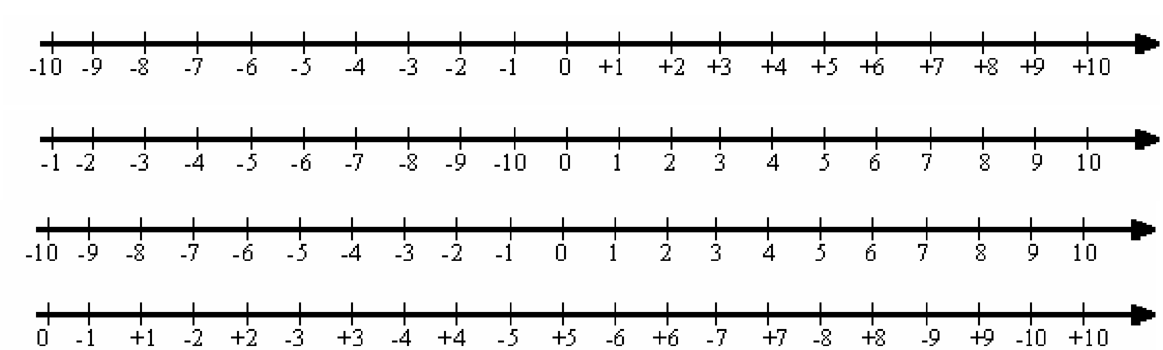
D =___ , E =___ , F =___ ,

G=___ e P=___.

Observação: A letra "L" representada no mapa significa "Leste" e aponta para o sentido positivo da reta numérica.

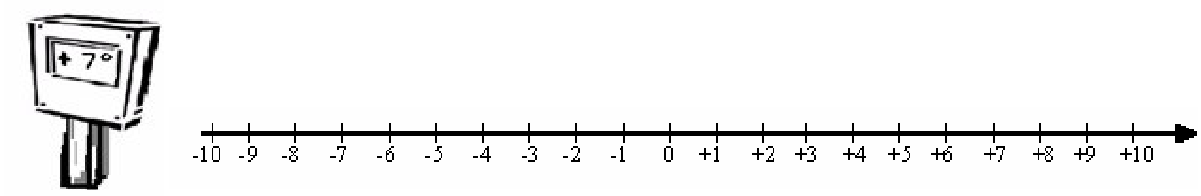
QUESTÃO 1.2.3:

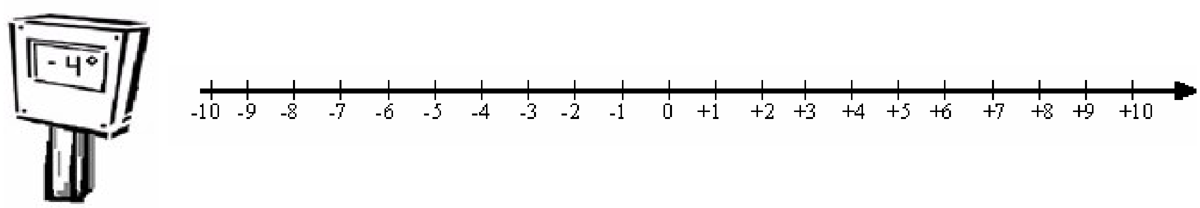
Observe as retas numéricas abaixo e indique aquelas que foram construídas de forma errada:



QUESTÃO 1.2.4:

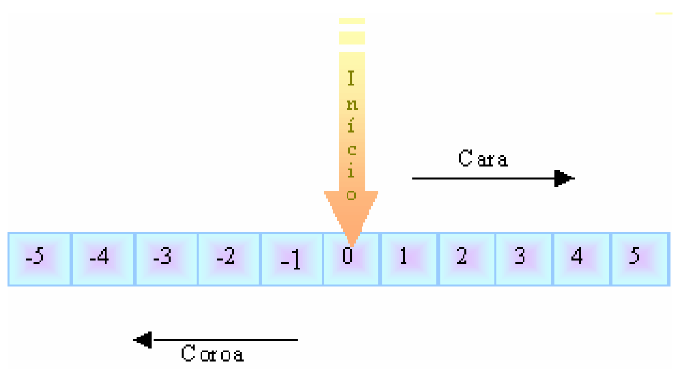
O mostrador do painel digital na avenida principal da cidade de Caxias apresentou as seguintes leituras em dois momentos de um dia do mês de julho, conforme as figuras abaixo. Utilizando a reta numérica dos números inteiros para representar a leitura da temperatura, marque as temperaturas observadas:





QUESTÃO 1.2.5:

João e Pedro estão brincando com um jogo, em que o tabuleiro representa uma reta numérica e as casas do tabuleiro representam os números inteiros. O jogo consiste em avançar ou voltar uma casa, conforme o resultado ao se jogar uma moeda.



Inicia-se colocando as fichas de cada jogador na casa do zero; tira-se "par ou ímpar" para decidir quem joga primeiro a moeda. Reveza-se a jogada cada vez.

As regras do jogo são:

(I) se sair cara, avance uma casa;
(II) se sair coroa, volte uma casa;
(III) ganha quem avançar mais casas, após 5 jogadas de cada jogador.

Marque no tabuleiro a posição dos jogadores após 5 jogadas, e faça a leitura do número inteiro correspondente, quando o resultado das jogadas foi assim:

Pedro tirou: cara, cara, coroa, coroa, cara.
João tirou: cara,coroa, cara, cara, cara.

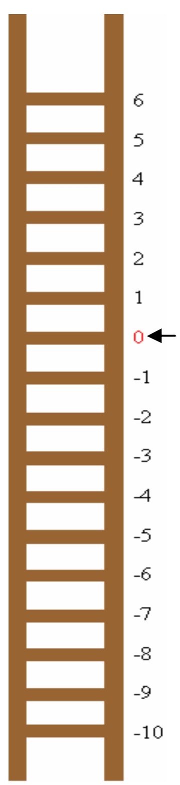
a) **Pedro chegou na casa de qual número? ___________**
b) **João está na casa de qual número? _______________**
c) **Quem ganhou o jogo? ____________**

QUESTÃO 1.2.6:

Considere uma escada em posição vertical, em que os degraus estão numerados com alguns números inteiros obedecendo a orientação da reta numérica, sendo que o sentido positivo aponta para cima e o degrau "zero" está indicado na figura com uma seta.

Complete o espaço nas frases abaixo com as palavras *acima* ou *abaixo*.

a) **+4 está_______ de +6;**
b) **-3 está _______ de +1;**
c) **+2 está_______ de 0;**
d) **-9 está _______ de 0;**
e) **-5 está _______ de -2;**
f) **-7 está _______ de -10;**
g) **+ 6 está ______ de -6.**



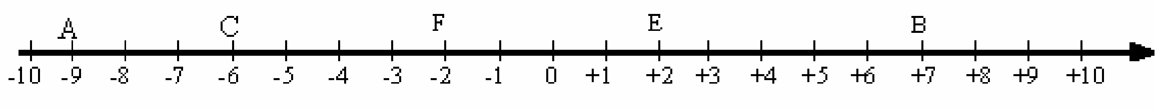
Complete o espaço nas frases abaixo com as palavras *maior* ou *menor*, e represente a relação usando o símbolo > (maior) ou < (menor).

a) **+4 é________ do que +6;** **+4 ☐ +6**
b) **-3 é________ do que +1;** **-3 ☐ +1**
c) **+2 é________ do que 0;** **+2 ☐ 0**
d) **-9 é________ do que 0;** **-9 ☐ 0**
e) **-5 é ________do que -2;** **-5 ☐ -2**
f) **-7 é________ do que -10;** **-7 ☐ -10**
g) **+6 é________ do que -6;** **+6 ☐ -6**

QUESTÃO 1.2.7:

Observe a reta numérica abaixo e escreva os números inteiros que representam as letras indicadas:

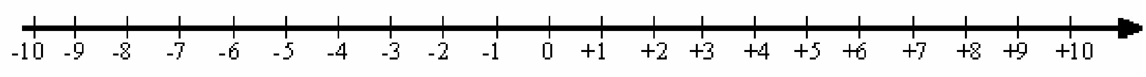
A = ___ **B** = ___ **C** = ___ **E** = ___ **F** = ___



QUESTÃO 1.2.8:

Marque na reta a seguir os pontos indicados pelas letras, com as coordenadas dadas:

M = -2 N = 0 P = +4 Q = -5 X = -1



QUESTÃO 1.2.9:

O Serviço Meteorológico registrou as seguintes temperaturas em um dia.
(fonte: jornal O Estado de São Paulo – 10/02/2005)

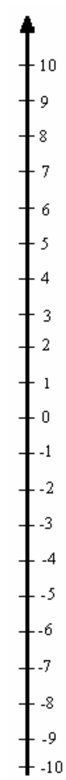
Cidade	Temperatura acima de 0°	Temperatura abaixo de 0°
Estocolmo		-2
Barcelona	3	
Chicago		-7
Miami	9	
México	6	
Washington		-3

Use a reta numérica ao lado para representar um termômetro e marque nela as temperaturas das cidades descritas acima.

a) **Qual cidade registrou a menor temperatura?______________.**

b) **Qual cidade registrou a maior temperatura?_______________.**

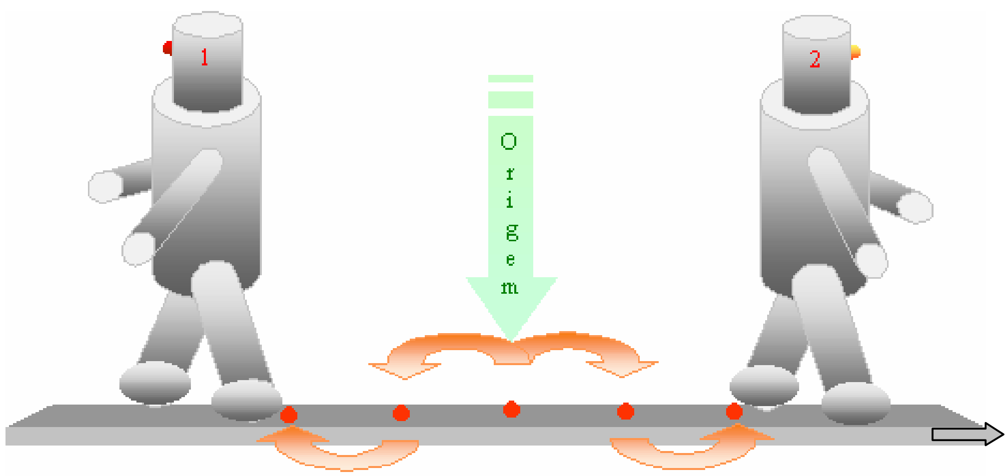
c) **Ordenar os nomes das cidades conforme a ordem crescente das temperaturas registradas em cada cidade: ________________, ________________, ____________________, ________________, ________________ e __________________.**



1.3 Questões sobre a propriedade de simetria dos números inteiros. Oposto de um número inteiro.

QUESTÃO 1.3.1:

Dois robôs de brinquedo, Robô 1 e Robô 2, caminham em linha reta dando passadas iguais. Colocaram-se os robôs um de costas para o outro, em um mesmo ponto, e deu-se a partida. Após 5 passos da origem viram-se e acenam um para o outro. A direção caminhada pelos robôs é representada por uma reta numerada, orientada como na figura:

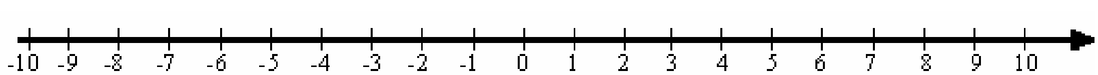


a) Supondo que eles partam da posição 0, que número representa a posição de cada robô após caminhar 5 passos?

i. O Robô 1 está na posição de número:________

ii. O Robô 2 está na posição de número:________

b) Marque estas posições na reta numérica abaixo:



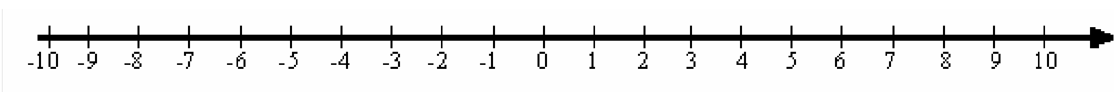
c) **Qual é a distância entre os robôs assim que eles viram e acenam um para o outro?**

Resposta: ___________

d) **Procedendo como antes, isto é, com os dois robôs partindo simultaneamente do ponto 0, quando um robô está na posição - 8, qual é a posição do outro robô?**

Resposta: ___________

Represente esta situação na reta numérica

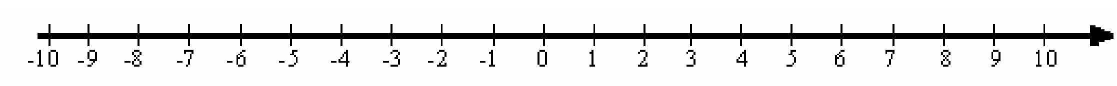


e) **Se os dois robôs partiram simultaneamente do +4 e caminham 4 passos em direções opostas, qual é o numero de chegada de cada robô?**

i. **O Robô 1 chegou na posição: __________**

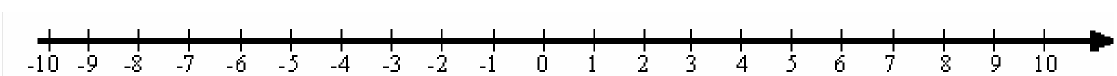
ii. **O Robô 2 chegou na posição: __________**

Represente esta situação na reta numérica



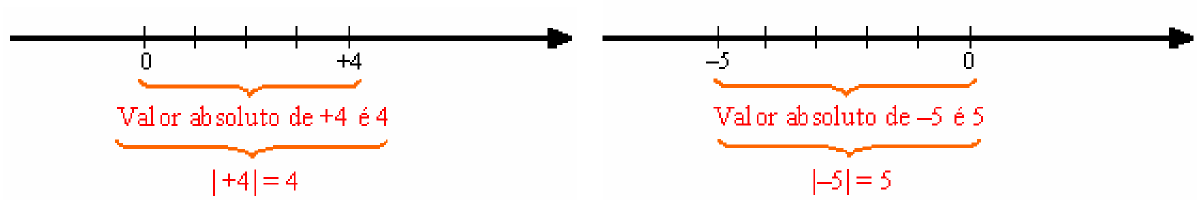
f) **Os robôs partem agora do ponto -1 caminhando em direções opostas. Após darem 7 passos qual será a posição de cada robô?**
Robô 1: _________ e Robô 2: __________

Represente esta situação na reta numérica



O VALOR ABSOLUTO

Na representação sobre uma reta numérica, o valor absoluto de um número inteiro é medida pela distância, contada em unidades, do ponto que o representa até a origem zero. É sempre maior ou igual a zero. Por exemplo, o valor absoluto de +4 e de - 4 é 4, pois ambos distam a mesma medida da origem . O valor absoluto é indicado entre duas barras: |+4| = 4 e |- 5| = 5.



QUESTÃO 1.3.2:

Complete com o valor absoluto dos números:

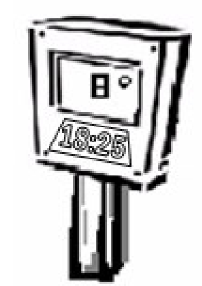
a) | - 3 | = ____ b) | + 7 | = ____ c) | - 7 | = ____ d) | 0 | = ____

QUESTÃO 1.3.3:

Dois guardas em patrulha por uma avenida de Buenos Aires passaram pelo mostrador do painel digital de temperatura durante uma madrugada de inverno, e um deles disse: “Está marcando 2 graus abaixo de zero”.

À tarde do mesmo dia, passando pelo mostrador o guarda disse ao colega, “Agora está 8 graus acima de zero, ainda está frio”. Qual é a variação de temperatura entre as duas vezes que os guardas passaram pelo local?

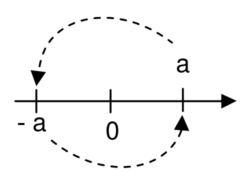
Resposta:______



O “oposto” de um número inteiro é o número que é representado na reta numérica simetricamente ao número dado em relação ao “0”. Por exemplo, o oposto de +2 é - 2 e o oposto de - 7 é +7. Indicamos o oposto com o sinal de menos (-) na frente do número.

► o oposto de +2 é -2, ou seja, - (+2) = -2.

► o oposto de -7 é +7, ou seja, - (-7) = +7



QUESTÃO 1.3.4:

Complete as seguintes sentenças:

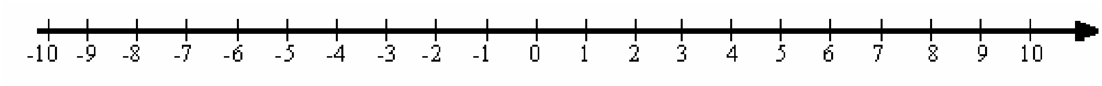
a) **O oposto de 38 é___** b) **- 24 é oposto de ___** c) **- (+5) = ___**

d) **- 38 = - (+___)** e) **24 = - (___)** f) **- (-7) = ___**

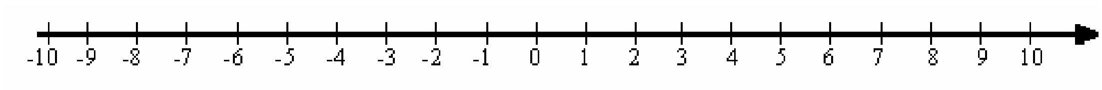
QUESTÃO 1.3.5:

Marque nas retas numéricas abaixo:

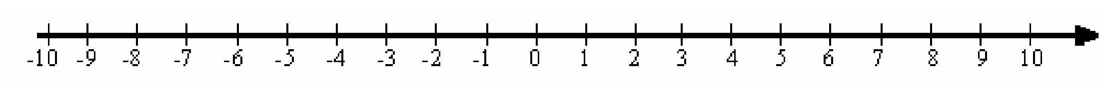
a) o oposto de +5



b) o oposto de -3



c) o oposto de 0



1.4 Questões sobre adição/subtração: registro de ações que requeiram estas operações e o domínio de técnicas operatórias.

QUESTÃO 1.4.1:

Eu tinha 30 reais na minha conta bancária. Precisei emitir um cheque de 80 reais. Meu pai me ajudou depositando em minha conta uma quantia de 90 reais. Assinale qual ou quais das seguintes expressões registram estas ações.

a) **(- 80) + (- 30) + (90)**

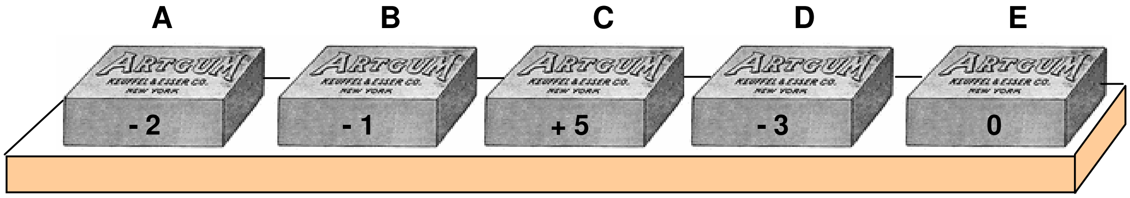
b) **80 – (- 90)**

c) **30 – 80 + 90**

d) **30 + 80 + 90**

QUESTÃO 1.4.2:

Um comerciante comprou caixas de chicletes que teriam cada uma 20 unidades. Após conferir os conteúdos, ele fez as seguintes anotações:



Indique as operações que justifiquem a sua resposta, para cada uma das perguntas.

Qual é o total de chicletes que *deveria ter recebido*?
Resposta:________.

Qual é o total de chicletes que *ele recebeu*?
Resposta:________.

Qual é a diferença entre *o que deveria ter recebido e o que realmente recebeu?*
Resposta:________.

Responda se o comerciante teve prejuízo ou não, justificando sua resposta com uma sentença completa.
Resposta:____
____
____
____

QUESTÃO 1.4.3:

Efetue as operações indicadas:

a) **3 + 5 =**	b) **4 – 5 =**	c) **(-7) + 6 =**	d) **- 4 – (+3) =**
e) **-3 + (-2) =**	f) **- (+2) – (-2) =**	g) **- (- 8) + (+4) =**	h) **3 – 2 =**
i) **(+3) + (+5) =**	j) **0 – (- 3) =**	k) **(- 3) – 0 =**	l) **- 5 - 6 - (-11) =**

QUESTÃO 1.4.4:

Complete os espaços de modo a tornar verdadeiras as igualdades:

b) $38 - \square = 18$ c) $38 - 42 = \square$

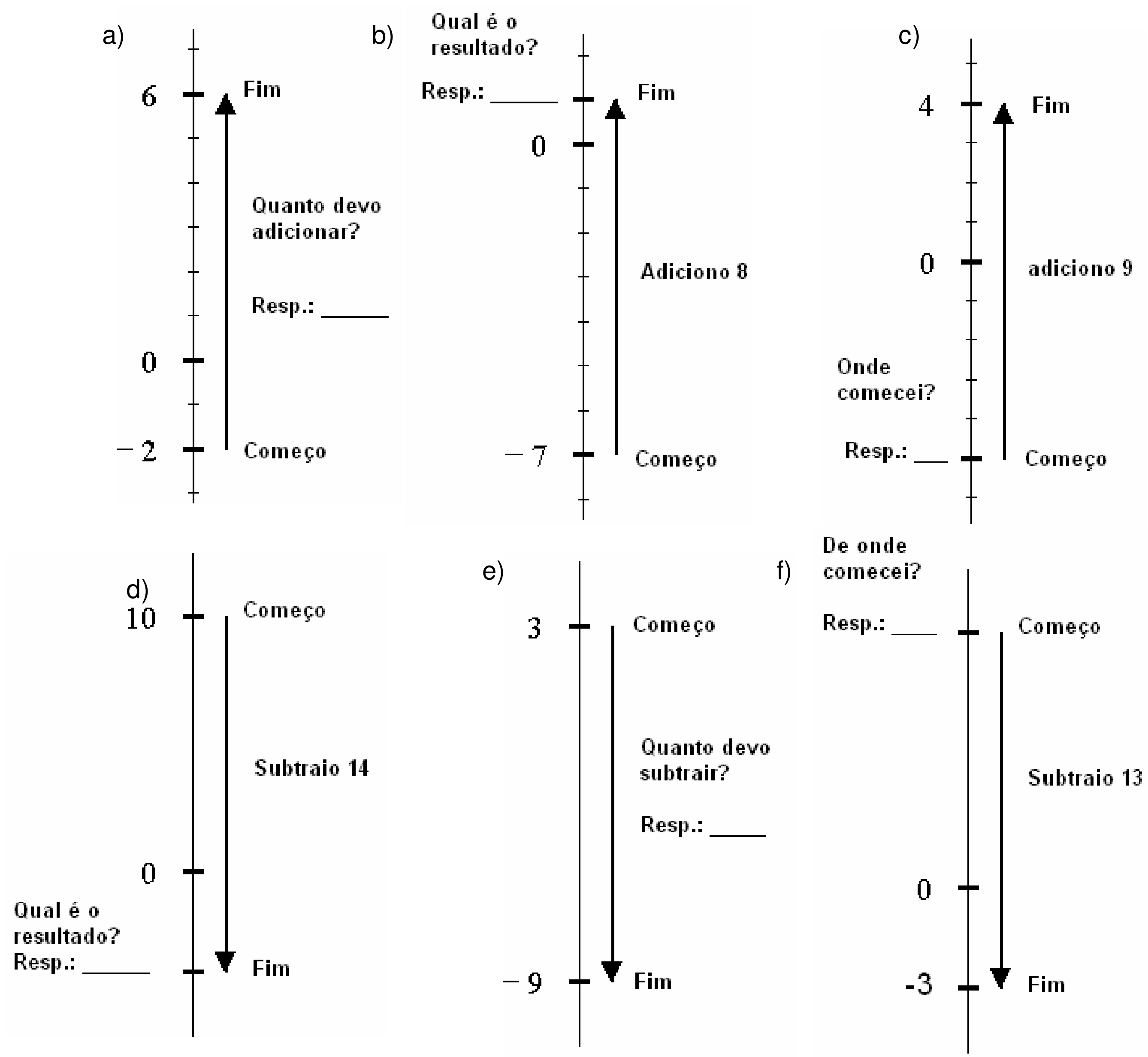
d) $42 - 38 = \square$ e) $42 + \square = -2$

QUESTÃO 1.4.5:

Efetue as seguintes operações:

a) $\begin{array}{r} 321 \\ +\ 105 \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 321 \\ -\ 105 \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 105 \\ -\ 321 \\ \hline \end{array}$ d) $\begin{array}{r} -321 \\ +\ 105 \\ \hline \end{array}$

QUESTÃO 1.4.6:



1.5 Registro de ações que requeiram as operações de multiplicação e divisão e o conceito de divisão exata e divisão com resto.

QUESTÃO 1.5.1:

Nesta semana, deixei para pagar a cantina no final da semana. O lanche custa 2 reais e eu comi um lanche por dia, de 2ª a 6ª feira. Se uma dívida é representada por um valor negativo na minha conta, a operação que representa a minha dívida no final de semana é:

a) $2 \times (+5)$ b) $+2 \times 5$ c) 5×2 d) $5 \times (-2)$

O total da dívida é: _______________.

QUESTÃO 1.5.2:

Complete de modo a formar sentenças verdadeiras:

a) $(-3) \times (+2) = \boxed{}$ b) $+4 \times (-1) = \boxed{}$ c) $+7 \times (+3) = \boxed{}$

d) $(-5) \times 10 = \boxed{}$ e) $(-1) \times (-1) = \boxed{}$ f) $+1 \times (-1) = \boxed{}$

g) $\boxed{} \times (+3) = 21$ h) $\boxed{} \times 10 = -50$ i) $-6 : \boxed{} = 2$

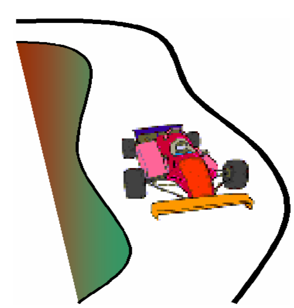
j) $8 : \boxed{} = -8$ k) $-8 : \boxed{} = -8$ l) $-8 : \boxed{} = 8$

QUESTÃO 1.5.3:

Em um treino de Fórmula 1, um piloto andou com seu carro 235 Km. Sabendo-se que cada volta da pista tem 55 Km, responda:

a) **Quantas voltas o piloto completou? Escreva a operação correspondente.**

b) **Quantos quilômetros faltaram para completar mais uma volta?**



QUESTÃO 1.5.4:

Calcule as divisões a seguir:

a) **340 : 20 =**   b) **216 : 12 =**   c) **450 : (-18) =**

d) **(-330): (-30) =**   e) **-750 : 25 =**   f) **0 : (-25) =**

QUESTÃO 1.5.5:

Indique e justifique as operações em cada uma das seguintes questões.

a) **A confeitaria São Pedro produz numa fornada 5 assadeiras de pães doces. Se cada assadeira contém 28 pães doces, quantos pães são produzidos em cada fornada?**

b) **A confeitaria assa também queijadinhas. Numa fornada são assadas 5 assadeiras de mesmo tamanho. Se a produção numa fornada foi de 160 queijadinhas, quantos doces cabem em cada assadeira?**

c) **As queijadinhas são embaladas em caixinhas em que cabe meia dúzia delas. Quantas caixinhas são necessárias para embalar as queijadinhas produzidas em uma fornada?**

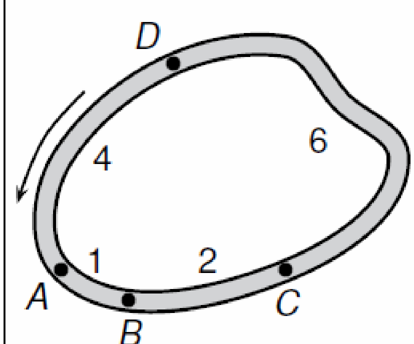
QUESTÃO 1.5.6:

(OBMEP 2006) A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

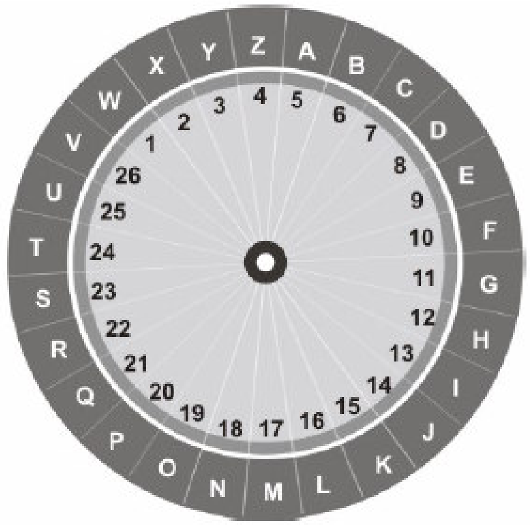
(a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

(b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

(c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.



QUESTÃO 1.5.7:



(OBMEP 2007) Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado chave do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra A. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura ao lado a chave é 5 e a palavra PAI é codificada como 20-5-13.

(a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23-25-7-25-22-13.

(b) Codifique OBMEP usando a chave 20.

(c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.

(d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras A, B e C é 52. Qual é essa chave?

(para ver as soluções comentadas acesse o site http://www.obmep.org.br/provas.html)

1.6 Potenciação

QUESTÃO 1.5.1:

Efetue as seguintes operações:

a) $3^2 =$ b) $2^3 =$ c) $2^2 \times (-2)^3 =$ d) $(4^2)^2 =$

e) $3 \times 3 \times 3 =$ f) $(-3)^5 : 3^2 =$ g) $2^2 + 2^3 =$ h) $11^5 : (11^2 \times 11^2) =$

QUESTÃO 1.5.2:

Ao lançarmos 1 moeda, teremos apenas 2 possibilidades: cara ou coroa. Se, entretanto, lançarmos 2 moedas, o número de possibilidades duplica: cara-cara, cara-coroa, coroa-cara e coroa-coroa, ou seja, teremos $2^2 = 4$ possibilidades.

a) Quantas possibilidades aparecem ao lançarmos 3 moedas?
b) E 5 moedas?
c) E 100 moedas?

Com esta atividade encerra-se o diagnóstico das principais dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos números inteiros; tendo clareza dessas dificuldades, o professor e o aluno podem concentrar seus esforços visando superá-las. Nos próximos capítulos apresentam-se propostas concretas para a realização deste trabalho conjunto.

2. A NATUREZA DOS INTEIROS

OS NÚMEROS INTEIROS, SUA NATUREZA E SUA REPRESENTAÇÃO SOBRE UMA RETA ORIENTADA.

O objetivo deste Capítulo, e dos subsequentes sobre Números Inteiros, é fornecer ao professor um material que lhe seja auxiliar na sala de aula, apresentando um desenvolvimento do conteúdo programático dos tópicos curriculares, acompanhado de estratégias de ensino/aprendizagem por meio da resolução de problemas e de jogos educativos. Este Capítulo trata da natureza dos números inteiros, introduzindo sua necessidade baseada em problemas e atividades que estejam relacionadas com exemplos práticos da vida cotidiana. Trabalha-se também a representação de números inteiros sobre uma reta orientada e o conceito de coordenada de um ponto sobre a reta orientada como números inteiros. Recomenda-se utilizar os exercícios propostos no Capítulo de Diagnóstico, para avaliar o progresso dos alunos na compreensão dos conceitos, após trabalhar cada capítulo de conteúdo.

AS ORIGENS

No cotidiano de um cidadão aparecem inúmeras situações em que um registro numérico facilita a compreensão do evento que está ocorrendo. Foi assim que, na Antigüidade, os homens aprenderam a fazer contagem, em diversas culturas, e houve a necessidade de registrar este fato. Por exemplo, é perfeitamente compreensível que, mesmo em culturas primitivas, houvesse a necessidade de saber quantos animais uma tribo possuía, ou ainda, quantos guerreiros podiam entrar em luta contra seus inimigos, desenvolvendo inclusive a noção quantitativa de mais e menos. A representação numérica de atividades simples de contagem levou ao que se ensina e aprende nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os Números Naturais.

PRÉ-REQUISITOS

O material deste curso não trabalha o conceito de números naturais, nem a evolução histórica dos mesmos nas diversas civilizações, por ser um tópico que merece um curso inteiro à parte. A notação indo - arábica de números naturais, 1, 2, 3 etc e o sistema posicional decimal também serão considerados conhecidos. Este Capítulo começa com a necessidade de caracterizar os Números Inteiros, destacando a propriedade que os diferencia dos números naturais. O objetivo principal deste é desenvolver o conceito de orientação numa reta numérica que está subjacente ao conceito de números com sinais.

2.1 Análise de situações-problema.

QUESTÃO 2.1.1:

Antônio começou a freqüentar o 6º. ano na escola e para pagar seus lanches na cantina sua mãe resolveu dar-lhe a quantia de R$ 20,00 (vinte reais) no início de cada semana. Para aprender a ter controle sobre seus gastos, sua mãe recomendou que ele registrasse num caderno a quantia recebida e a quantia que gastasse. A primeira quantia recebida foi registrada como "crédito" no caderno de Antônio. A cada dia da semana que se seguiu, o gasto na cantina foi registrado como "débito". Como poderíamos imaginar o registro no caderno do Antônio na sexta-feira da primeira semana?

Podemos imaginar, por exemplo, que o caderno de Antônio se apresentasse assim:

Dia da semana	Crédito	Débito
Segunda-feira	20	3
Terça-feira		2
Quarta-feira		0
Quinta-feira		4
Sexta-feira		3

A representação em colunas diferentes (crédito/débito) claramente caracteriza a natureza da quantia em reais registrada por Antônio. Os números que representam estas quantias são, em princípio, números naturais, mas carregam significados distintos: eles são de natureza oposta em relação à situação inicial em que Antônio nada tinha.

O crédito tem o significado de ***ganho***, então podemos registrar a quantia 20 (reais) com sinal ***positivo***: +20.

Por outro lado, o débito tem o significado de ***perda***, e o seu registro é feito com sinal ***negativo***: - 2.

Então, uma tabela que registra dados como:

+20	- 3
	- 2
	0
	- 4
	- 3

representa muito bem a conta do Antônio no final de uma semana.

A interpretação dos dados é imediata. Pense agora: o que significa o 0 na terceira casa da segunda coluna? No final da semana, Antônio ficou com dinheiro no bolso, ou não?

Outra situação muito comum nas nossas vidas é o Serviço Meteorológico que anuncia as temperaturas das cidades, países ou regiões. Uma das unidades adotadas para registrar a temperatura é grau Celsius, denotado por ^{o}C. Temos uma noção da sensação de calor ou frio através da leitura da temperatura, tomando-se como referência a temperatura média de um corpo humano sadio em torno de 37^{o} C, e a água que se transforma em gelo a 0^{o} C. Nos países como Brasil, não é muito comum o registro de temperatura ambiente abaixo de 0^{o}C, mas algumas cidades da Região Sul apresentam temperaturas abaixo de 0^{o}C em dias de inverno. Então, tomando-se como ***referência*** o número 0, registramos as temperaturas ambiente usando os sinais: positivo + para aquelas acima de 0^{o}, e negativo - , para aquelas abaixo de 0^{o}. Notamos novamente uma situação em que ***a natureza oposta*** de dados numéricos ***em relação a uma referência*** pode ser registrada com sinais de + e -, com significados muito claros na sua interpretação.

ATIVIDADE 2.1.2:

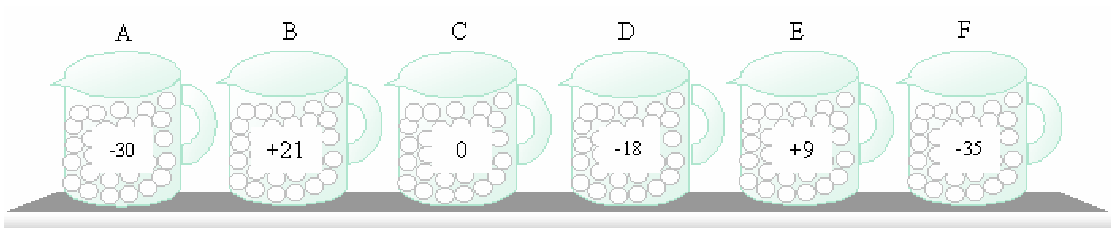
<u>Atividade para classe:</u> Cada classe poderia pesquisar nos jornais a temperatura de algumas cidades do mundo, e interpretar o clima de acordo com as leituras feitas. A leitura em termômetros de nível também poderia ser considerada. Como se poderiam comparar as leituras de temperatura nos painéis digitais com as leituras numa coluna de um termômetro comum?

Esta atividade inicia uma boa discussão sobre as diferenças e significados das medidas com diferentes instrumentos. As questões com termômetros apresentadas no Capítulo de Diagnóstico também podem ser úteis.

O seguinte problema pode ser proposto aos alunos para fixar o conceito de **referência**, a partir da qual se distingue a natureza oposta de registros numéricos.

ATIVIDADE 2.1.3: O Problema dos Jarros

Em uma loja de esportes, o proprietário comprou jarros de vidro de bolinhas de pingue-pongue. Em todos os jarros deveria haver a mesma quantidade de bolinhas: 200. Ele descobriu, no entanto, que isso não acontecia, pois em alguns sobravam bolas, em outros faltavam. Resolveu, então, colocar rótulos nos jarros, indicando quantas faltavam para completar 200, ou quantas sobravam. Qual jarro contém 200 bolinhas? Qual é a referência usada na contagem?



Na sala de aula, o professor poderá colocar uma ilustração dos jarros, com os registros ou desenhá-los na lousa.

Com esta situação, podemos abordar as seguintes questões:

a) Discutir com os alunos os possíveis significados dos rótulos -30, +21 e do rótulo com número 0.

Nesta atividade, o professor deve conferir a compreensão do aluno sobre os seguintes fatos:

- o rótulo **-30** significa que estavam **faltando** 30 bolas;
- o rótulo **+21** significa que havia um **excesso** de 21 bolas;

- o pote com rótulo **0** significa que havia o número exato de 200 bolas.
- a quantia 200 é a **referência**, a partir da qual se caracteriza a natureza oposta dos registros: a *falta* ou o *excesso*. O registro deste fato é o número 0 que se atribui à quantia 200, e os excessos são registrados com +, as faltas com sinal -.

b) Considerando que o comerciante usou o sinal de **-** para indicar que **faltavam** bolas e o sinal de **+** para indicar que **sobravam** bolas, além das 200 que o jarro deveria conter, discutir:

- Que jarro contém *mais* bolas?
  [*Há mais bolas no jarro que contém o rótulo + 21]*

- Que jarro contém *menos* bolas?
  [*Há menos bolas no jarro que contém o rótulo –35*]

Estas atividades nos levam a concluir que os Números Inteiros constituem uma <u>extensão</u> dos Números Naturais que surgem dos processos de contagem de objetos discretos, acompanhados de **sinais** que os caracterizam como **opostos** em relação a um número de referência.

2.2. Representações geométricas dos números inteiros

As atividades acima sobre os números inteiros podem ser enriquecidas com representações gráficas que modelam as características dos mesmos.

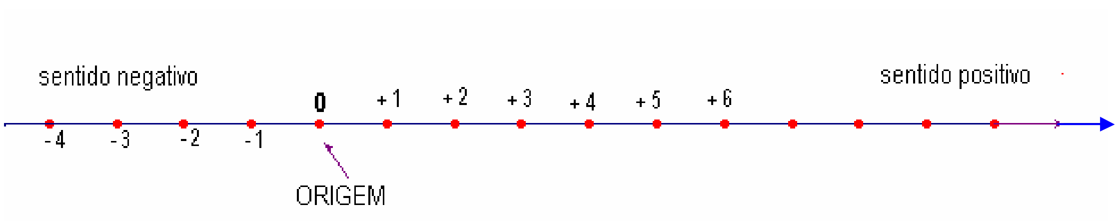
Quando caminhamos sobre uma trajetória unidimensional (uma curva aberta simples), como uma estrada por exemplo, intuitivamente sabemos que, a partir de um ponto fixado (ponto de partida ou referência) podemos escolher exatamente dois sentidos de percurso: ir para **um sentido** ou ir para o sentido **oposto** a este. Se usarmos cada passo como *unidade*, podemos *contar* os passos caminhados sobre a curva num sentido, identificando-os se foi num *determinado sentido*, ou no *sentido oposto* a este.

Notamos claramente na descrição desta situação as características próprias dos números inteiros que são: a escolha de um ponto de referência e a contagem de unidades em dois sentidos (opostos em relação ao ponto fixado de referência).

Assim, o *modelo geométrico* que representa os números inteiros, de maneira mais apropriada, é uma **reta** em que se escolhe um ponto como referência, e se estabelece o sentido "positivo" de percurso pela escolha de uma das semirretas determinadas pelo ponto.

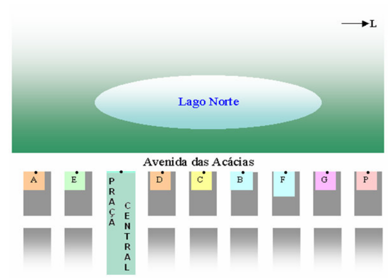
Estamos determinando o modelo de uma **reta numérica orientada**, com sentido "positivo" escolhido e estabelecendo a outra semirreta como sendo o sentido "negativo". A escolha da orientação depende, portanto, da origem e da escolha de uma das semirretas. A determinação de um ponto sobre a reta, no sentido positivo, de modo que a distância deste ponto à origem seja tomada como a *unidade* na contagem de passos, permite fazer a representação dos números inteiros como pontos geométricos sobre a reta orientada.

Por comodidade, a representação da reta numérica orientada se faz normalmente na direção horizontal, e o sentido positivo é tomado como a semirreta à direita do ponto de origem. Indicamos o sentido positivo com uma seta $\rightarrow$.



Assim, a cada ponto geométrico sobre a reta numérica orientada, cuja distância à origem é medida em número múltiplo da unidade, corresponde um *número inteiro* cujo sinal identifica a posição do ponto relativa à origem. Tal número é chamado de "coordenada do ponto". Reciprocamente, dado um número inteiro, podemos localizar o ponto na reta orientada que o representa. Esta via de mão dupla entre a Aritmética e a Geometria é um legado do grande pensador francês René Descartes (1596-1650)), criador da Geometria Analítica.

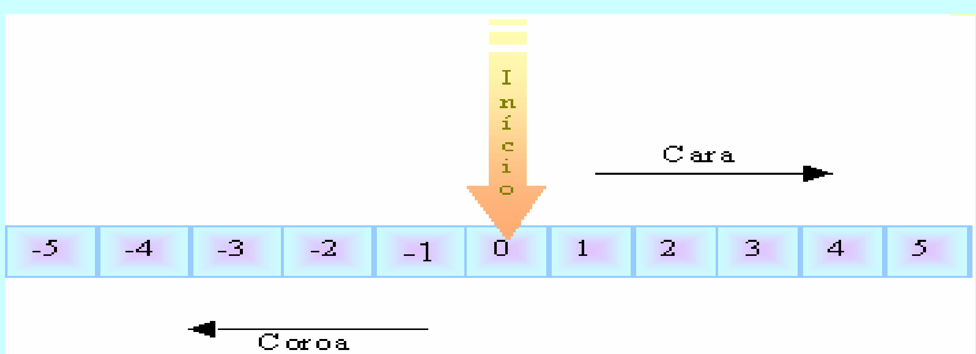
O exercício 1.2.2 sobre uma representação do mapa de uma cidade no Capítulo de Diagnóstico é uma boa atividade para fixar o conceito de coordenada de ponto relacionado com o conceito de número inteiro.



A seguinte atividade é proposta também com o objetivo de tornar clara a ideia de movimento em sentidos opostos sobre uma reta numérica orientada, subjacente ao conceito de positivo/negativo.

ATIVIDADE 2.2.1: Jogo de "cara" ou "coroa"

Inicialmente temos um tabuleiro que representa uma reta numérica orientada, com casas que representam os números inteiros. O tabuleiro pode ser visualizado desenhando-o na lousa, ou numa folha de cartolina. Pode ser ainda ser visualizado por meio de figuras quadradas desenhadas no chão da sala de aula ou do pátio da escola, ou mesmo usando-se um barbante esticado no qual foram feitas marcas igualmente espaçadas.



Dois são os jogadores deste jogo e este consiste em avançar uma casa no sentido positivo ou recuar uma casa, conforme o resultado ao se jogar uma moeda.

Inicia-se colocando as fichas de cada jogador na casa do “zero” = 0; tira-se “par ou ímpar” para decidir quem joga primeiro a moeda. Os jogadores se revezam a cada jogada. As regras do jogo são:

a) se der cara, avance uma casa;
b) se der coroa, volte uma casa;
c) ganha o jogo, quem estiver na casa de maior número, após 20 jogadas.

Sugestão para atividade: Suponhamos que sejam João e Pedro, dois alunos que vão jogar. Após 5 jogadas, pare o jogo por um momento e leve a classe a discutir a situação. Por exemplo, suponhamos que o resultado neste ponto esteja assim:

- *João tirou: cara, cara, cara, coroa, cara.*
- *Pedro tirou: cara, coroa, coroa, cara, coroa.*

Questões a discutir:

a) Qual o número da casa que João chegou? *[É a casa de número + 3]*.
b) Qual o número da casa que Pedro chegou? *[É a casa de número – 1].*
c) Quem está ganhando o jogo até o momento? Faça os alunos explicarem a resposta, por meio de uma comparação (utilizando o termo *maior ou menor que*) entre os números resultantes.
d) Proponha a cada aluno que está assistindo o jogo que desenhe uma reta numérica orientada no caderno e localize as posições de João e Pedro após 5 jogadas. Ao acompanhar o jogo após a retomada, faça os alunos perceberem o movimento dos registros no sentido positivo ou negativo na reta, conforme o resultado da jogada da moeda.

Quando o jogo terminar, depois de 20 jogadas, a leitura do registro final leva à decisão de quem ganhou o jogo. O número da casa do vencedor deve ser **maior que** o número da casa do perdedor, e isto ocorre quando a casa final do vencedor **está à direita** da casa final do perdedor.

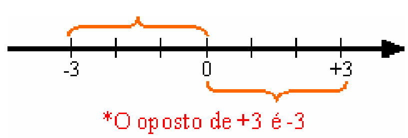
Esta atividade permite ao aluno fixar o conceito de **ordem** nos números inteiros. Exercite este conceito de ordem, decidindo quem ganhou o jogo se o resultado final foi:

João parou na casa de número -1;
Pedro parou na casa de número -3.

Durante as jogadas, dê destaque ao seguinte fato que naturalmente os alunos deduzirão: cada jogada "cara" seguida de "coroa" anula o efeito de movimento na reta numérica, isto é, um resultado tem o efeito "oposto" do outro. O mesmo se verifica se "coroa" for seguida de "cara". Isto leva ao conceito de números opostos.

O *oposto* de um número inteiro é o número que, na reta numérica orientada, é *simétrico* em relação a 0. Denotamos o oposto de um número com sinal de – na frente dele.

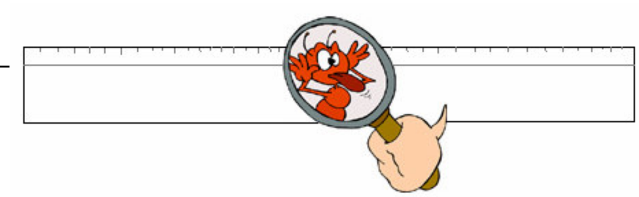
Por exemplo, o oposto de +3 é -3. O oposto de -8 é -(-8) e é igual a +8.



Relembrando que o *valor absoluto* |*a*| de um número inteiro *a* é a *quantidade em unidades* da distância à origem da sua representação na reta numérica, vemos nos dois exemplos acima que $|-3| = |+3| = 3$ e $|+8| = |-8| = 8$. Em geral, "*um número inteiro e o seu oposto possuem o mesmo valor absoluto*".

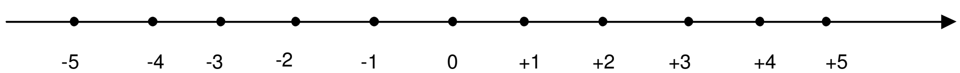
ATIVIDADE 2.2.2: Formiga sobre a régua

Um aluno reparou que em sua régua de 30 cm de comprimento havia uma formiga, que se encontrava na marca de 5 cm. A formiga andou 17 cm para frente e em seguida voltou 3 cm e parou. A que distância ela se encontrava do 0 quando parou?



ATIVIDADE 2.2.3:

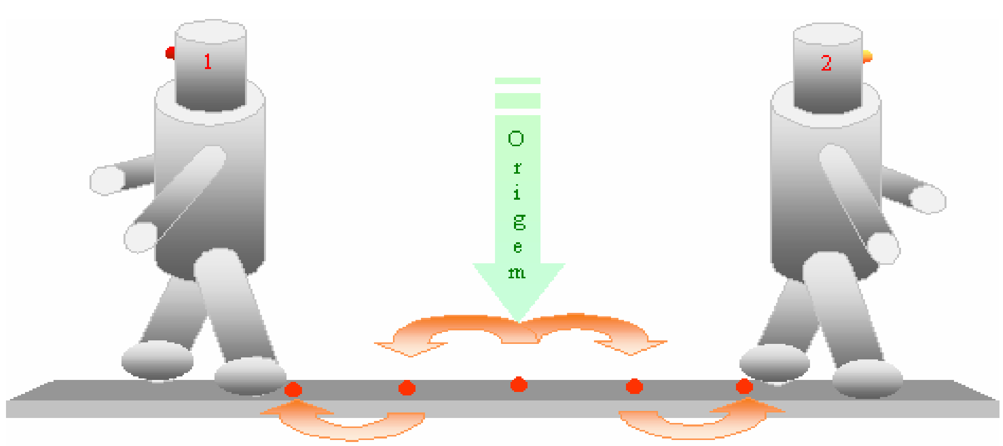
Quantos números inteiros têm valor absoluto menor do que 4?



[*Resp.: 7]*

A Atividade do Robô que veremos a seguir explora a ideia de simetria dos números inteiros e do oposto relativo a 0, incorporando a ideia de movimentos em dois sentidos e também do valor absoluto.

ATIVIDADE 2.2.4: Jogo do Robô



Esta atividade pode ser tanto simulada com alunos, ou ainda com a montagem de um cenário de brinquedo sobre uma superfície plana, para se ter uma ideia concreta do jogo.

Dois robôs de brinquedo, Robô 1 e Robô 2, caminham em linha reta dando passadas iguais. Colocam-se os robôs um de costas ao outro em um mesmo ponto e dá-se a partida. Como na figura, suponhamos que o Robô 1 caminhe para a esquerda e o Robô 2 para a direita. Após 50 passos da origem viram-se e acenam um para o outro.

Represente a direção caminhada pelos robôs como uma reta numerada orientada e leve seus alunos a trabalhar com as seguintes questões:

a) Que número representa a posição de cada robô após caminhar 50 passos? Represente esta situação na reta numérica.

b) Qual é a distância (em passos) entre os robôs?

Em particular, nesta questão, o aluno deve intuir que a distância de cada Robô à origem é igual para os dois, levando à fixação da ideia do valor absoluto de números inteiros. O aluno deve ser levado a concluir a relação entre as coordenadas de pontos com a distância entre os mesmos. Se os robôs estão em posições opostas com relação à origem, a distância entre eles é o dobro do valor absoluto da coordenada de um deles.

c) Durante a caminhada, quando um robô está na posição – 30, qual será a posição do outro robô, se ambos partiram juntos da origem, mas em direções opostas? Represente esta situação na reta numérica.

O aluno deve ser convidado a interpretar que o oposto de -30, isto é –(-30), é igual a +30, interpretando geometricamente este fato.

d) Se os dois robôs partirem do +5 e caminham 5 passos em direções opostas, qual é o numero de chegada de cada robô?

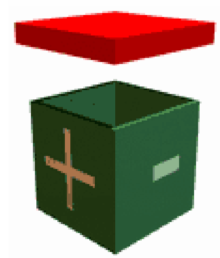
O objetivo deste exercício é destacar o papel do ponto de referência para a contagem de números inteiros.

e) Os robôs partem agora do ponto –10 caminhando em direções opostas. Após darem 10 passos qual será a posição de cada robô?

A atividade/jogo do Robô será retomada no próximo capítulo. Perceba antecipadamente o valor pedagógico das ideias trabalhadas até aqui e como elas podem colaborar na aprendizagem das operações com números inteiros.

3. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

EXTENSÃO DAS OPERAÇÕES BÁSICAS DOS NATURAIS PARA OS INTEIROS



No capítulo anterior, aprendemos a trabalhar com situações cotidianas que envolvem números inteiros, por exemplo, aprendemos a registrar os resultados de um evento a partir de perdas e ganhos, observar os registros de temperaturas acima e abaixo de zero e acompanhar as variações bancárias de débito e crédito, entre outras. Exploramos as ideias fundamentais do conceito de números inteiros que se referem à reta que modela a representação geométrica de tais números: a orientação da reta, o conceito de ponto de referência, o conceito de coordenada de um ponto geométrico e o significado da distância entre dois pontos na representação.

Uma vez realizado tal trabalho, surge a necessidade de iniciar o estudo das operações com números inteiros. Neste capítulo, iremos trabalhar com as operações de adição e subtração, apresentando atividades e problemas adequados ao desenvolvimento das mesmas para serem aplicados em sala de aula.

3.1 Abordagem Inicial

Sugerimos iniciar os estudos das operações de adição e subtração apresentando aos alunos a seguinte pergunta:

QUESTÃO 3.1.1:

Qual é o número que somado com 3 produz 0 como resultado?

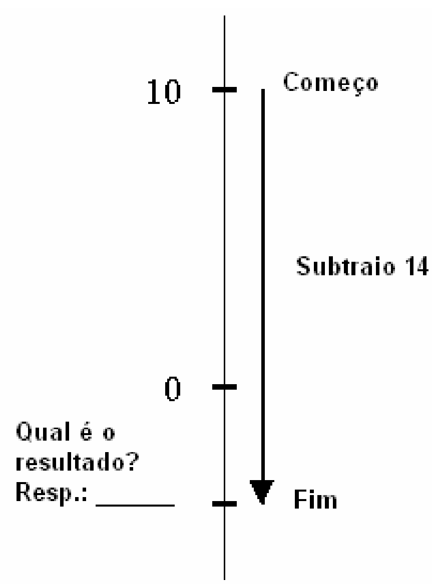
Ao enfrentar este problema, admitamos que o aluno dispõe, como conhecimento prévio, os números naturais e suas operações fundamentais, o que lhe permite verificar que *não existe* um número natural que o solucione.

Por outro lado, o aluno já conhece os números inteiros, embora não saiba ainda operar com eles formalmente. O aluno está, portanto, em condições de levantar a hipótese de que algum inteiro possa resolver a questão colocada. Devemos propor aos alunos situações concretas, com o mesmo significado da pergunta citada, para que este tenha condições de responder à pergunta satisfatoriamente. Por exemplo:

- Qual o total de pontos que fiz num jogo de duas partidas, em que ganhei 3 pontos na primeira e perdi 3 pontos na segunda?

- Para obter a temperatura de 0℃ num freezer que registra a temperatura de 3℃, como deverei proceder e fazer o registro do procedimento?

- Alguns questionamentos acerca da representação geométrica dos números inteiros envolvendo a adição e subtração também podem ser utilizados, pois eles envolvem contagens simples. Veja dois exemplos trabalhados no Capítulo1 (diagnóstico):



As perguntas citadas acima mostram a necessidade de considerar números inteiros e servem como ponto de partida para o aprendizado das operações e suas propriedades.

3.2 Adição de Números Inteiros

Frequentemente, os alunos executam adições com números inteiros muito antes de se abordar essa operação especificamente com a regra de sinais. Dessa forma, consideramos importante que, num primeiro momento, o professor trabalhe algumas ideias intuitivas que estão ligadas às operações com esses números.

Propomos trabalhar estas ideias por meio de um exemplo prático e de alguns jogos que serão trabalhados em sala de aula.

QUESTÃO 3.2.1: Exemplo Prático

Paulo está devendo R$ 12,00 na cantina da escola. Hoje, comprou mais um lanche e um suco, cuja conta ficou em R$ 5,00.

Qual é a dívida total do Paulo?

Se a mãe de Paulo lhe entregar uma nota de R$ 20,00 para pagar sua dívida, ele vai continuar devendo, ou ficar com crédito junto à cantina?

Para responder à primeira pergunta, é imediato perceber que o valor absoluto da **dívida** do Paulo é efetivamente de 12 reais. E, fazendo mais uma **dívida** de 5 reais, este valor 5 possui a mesma **qualidade de ser dívida.** Então, o total da dívida é *a soma das dívidas* e temos 12 + 5 = 17 (reais), e estamos efetuando a soma de números naturais como já aprendido.

O que existe de diferente neste exemplo é a qualidade do número que estamos trabalhando. Se atribuirmos à dívida o sinal “negativo”, em relação à situação em que Paulo nada possuía ainda, esta operação seria denotada como (-12) + (-5) = -17. Entendemos que a soma de números de mesma qualidade mantém a qualidade.

A partir do momento em que Paulo recebe 20 reais, esta quantia tem qualidade oposta em relação à dívida.

Então, o *total* de dinheiro que Paulo possui é representado pela operação:

+20 + (-12) + (-5) = +20 + (-17) = + 3 (reais).

Portanto, Paulo tem crédito com a cantina.

Porém, se a mãe do Paulo lhe desse apenas R$ 10,00, então o total da adição de todos os registros é:

+10 + (-12) + (-5) = +10 + (-17) = -7 (reais).

Paulo ficaria ainda devendo 7 reais.

Este exemplo prático tem como objetivo *intuir* que:

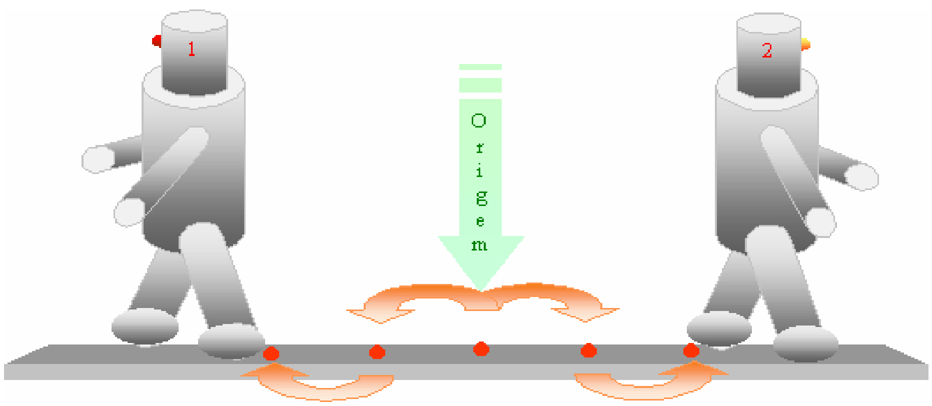
A soma de números positivos é um número positivo.
A soma de números negativos é um número negativo.
A soma de número positivo com negativo, não importa em qual ordem, é a *diferença* entre os valores absolutos dos números, com o sinal do número de maior valor absoluto.

Para desenvolver a ideia básica de adição de números inteiros que está por trás deste exemplo, vamos trabalhar o Jogo do Robô, que é um passo na direção da abstração para a representação da adição na reta numérica orientada.

3.2.2 O JOGO DO ROBÔ E AS OPERAÇÕES NA RETA NUMÉRICA

Este jogo já foi trabalhado no Capítulo 1, para dar significado aos sinais de + e – aos números inteiros positivos e negativos, respectivamente. Vamos retomar o jogo para trabalhar a ideia intuitiva de adição de números inteiros. O jogo é dinâmico e pode ser montado num tabuleiro com fichas representando os robôs, ou ainda pode ser encenado numa classe ou num pátio, com alunos fazendo o papel dos robôs, caminhando sobre uma reta com marcas desenhada previamente.

Dois robôs de brinquedo, Robô 1 e Robô 2, caminham em linha reta dando passadas iguais. Colocam-se os robôs um de costas para o outro, em um mesmo ponto e dá-se a partida. A direção caminhada pelos robôs é representada por uma reta numerada, cada passo é contado como uma unidade, e os sentidos, “positivo” e “negativo”, são representados pelos sentidos opostos em que os robôs caminham, uma vez que se escolha um deles como sentido positivo.

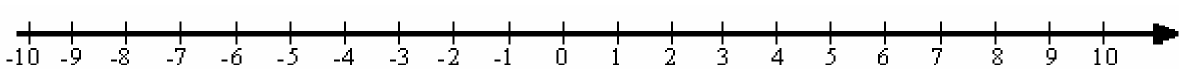


Vamos supor que eles partam da posição 0 e caminhem 5 passos em sentidos opostos, convencionando-se que o sentido do Robô 2 é o positivo.

Vamos associar as coordenadas dos pontos em que eles estão.

Após a caminhada, o Robô 1 estará na posição de número:_________ e o Robô 2 estará na posição de número:_________ .

Marque estas posições na reta numérica abaixo:



Propomos agora a questão: “Se os robôs derem mais 3 passos mantendo o mesmo sentido de percurso que vinham desenvolvendo, quais são as novas posições?”

A visualização do ***modelo de reta orientada*** torna intuitiva ao aluno a ideia de contar os passos que darão, a partir do ponto em que cada um dos robôs está.

O Robô 1 estará na posição (-5) + **(-3)** = - 8, significando que o Robô 1 continuará caminhando **mais** 3 passos no sentido “**negativo**”, a partir do ponto - 5.

Analogamente, o Robô 2 estará na posição (+5) + **(+3)** = +8, significando que o Robô 2 caminhará **mais** 3 passos no sentido “positivo”, a partir do ponto +5.

O destaque que deve ser dado aqui é para o significado de “adicionar” (representado pela palavra “mais”) números cujo sinal que acompanha o número significa a qualidade do número a ser adicionado, o que determina o sentido do movimento que se toma sobre a reta orientada, *a partir* da localização do ponto dado pelo número da primeira parcela.

ALERTA: **Aqui já se evidencia um problema comum na aprendizagem das operações com números inteiros: os sinais de + e de - aparecem na mesma expressão, mas com diferentes significados, o que atrapalha a compreensão. Por um lado, esses sinais expressam uma operação entre duas parcelas e, por outro, em cada parcela aparecem também os mesmos sinais que dão qualidade ao número (de ele ser positivo ou negativo).**

Para superar este obstáculo, aconselha-se a continuidade do trabalho com o Jogo do Robô, até que estas diferenças fiquem esclarecidas e ocorra a completa compreensão.

Vamos então pensar na seguinte situação: suponhamos que, após darem 5 passos em sentidos opostos a partir da origem, os robôs se viraram.

“Quantos passos o Robô 1 precisa dar para *voltar* à posição de número –2?”

“Quantos passos o Robô 2 precisa dar para *voltar* à posição de número 1?”

Os alunos devem perceber que a palavra “voltar” implica uma inversão no movimento que cada Robô estava executando. Assim, o Robô 1, que estava na posição – 5, deve dar 3 passos no sentido “positivo” (+3) e chegar ao ponto –2.

Representamos esta situação com: (-5) + (+3) = -2.

Como o Robô 2 também inverte o sentido do seu movimento, estando ele na posição +5, sua situação fica: o Robô 2 deve dar 4 passos no sentido “negativo” (- 4) e chegar ao ponto 1.

Representamos esta situação com: (+5) + (- 4) = 1.

Vamos trabalhar ainda esta ideia:

“Onde o Robô 2 vai parar se, partindo do ponto 1 caminhar **mais** 3 passos no sentido **negativo** ?”

A leitura dos dados mostra uma operação de *Adição* de 1 com o número 3, cuja qualidade é negativa. Logo, a representação é: 1 + (-3) = -2.

Agora, uma questão muito natural:

“Qual é a distância entre as posições dos robôs após terem dado 5 passos em sentidos opostos a partir da origem?”.

A visualização do ***modelo de reta orientada*** torna intuitiva ao aluno a idéia de contar os passos entre eles: 10 unidades. A mesma questão pode ser refeita agora sob outra forma:

“Continuando a pergunta anterior, se o Robô 2 ficar parado na posição +5, quantos passos são necessários para o Robô 1, que está na posição – 5, atingir o ponto onde está o Robô 2?”

Nesta reformulação fica clara a idéia de adição de um número positivo, pois o Robô 1 deve caminhar na direção do Robô 2, isto é, no sentido positivo. A operação é representada por (-5) + 10 = 5.

Da mesma forma, para o Robô 2 atingir o ponto em que o Robô 1 está, ele precisa inverter o seu movimento para o sentido negativo e caminhar 10 passos. Logo, temos a operação de Adição de um número negativo, representada por 5 + (-10) = - 5.

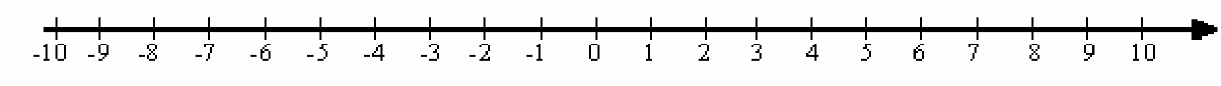
Confirmamos nestas atividades a propriedade que, na adição de números de **qualidades opostas** a operação envolve a **diferença dos valores absolutos,** e a qualidade do resultado é daquele número de maior valor absoluto.

Vamos trabalhar agora o significado de 0 na reta numérica, representando o ponto de partida do movimento na reta numérica, explorando a ideia de ponto de referência para simetria.

PROBLEMA 3.2.3:

Se os robôs partem simultaneamente do ponto 0, quando um robô estiver na posição - 8, qual será a posição do outro robô? Depois desta caminhada eles se viram, quantos passos eles devem andar para se encontrarem novamente?

Represente esta situação na reta numérica:



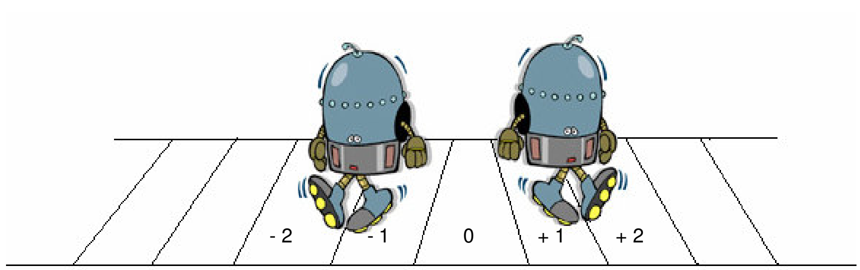
A atividade anterior mostram que, se cada robô caminhar, no sentido **contrário** ao seu movimento, o mesmo número de passos dados, eles voltam ao ponto inicial de partida. Isto é:

(-8) + 8 = 0, para o Robô 1;

+8 + (-8) = 0, para o Robô 2.

Isto se deve ao fato de que o oposto de um número inteiro é representado pelo simétrico, com relação à origem, do ponto que representa o número na reta numérica e também mostra uma das várias propriedades notáveis da adição de números inteiros que exploraremos na próxima seção e que podemos já perguntar:

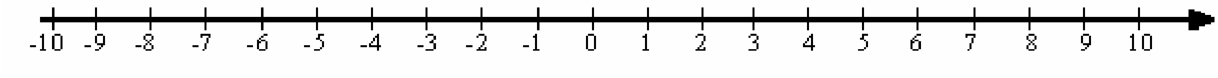
- Qual é a interpretação geométrica de um número somado com seu oposto?
- O que ocorre se adicionarmos 0 a um número inteiro? Que significado geométrico tem isto?
- Interpretando geometricamente, existe alguma diferença entre as operações $a + b$ e $b + a$, sendo a e b inteiros?



Para explorar tais questionamentos, voltemos ao Jogo do Robô.

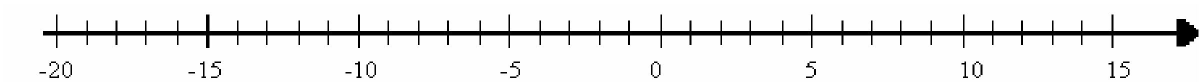
Se os dois robôs partirem do +4 e caminham 4 passos em direções opostas, qual é o número de chegada de cada robô?

Representе esta situação na reta numérica:



Os robôs partem juntos do ponto - 7 caminhando em direções opostas. Após darem 7 passos qual será a posição de cada robô?

Represente esta situação na reta numérica:



A operação de adição possui propriedades muito importantes e úteis. A Atividade do Robô é uma maneira muito eficiente ilustrar tais propriedades. Tente usá-la com seus alunos, para fixar as propriedades. Na classe, use também a reta numérica orientada e interprete as propriedades junto com os alunos, trabalhando questões como sugeridas na próxima seção.

3.3 Propriedades da Adição de Números Inteiros

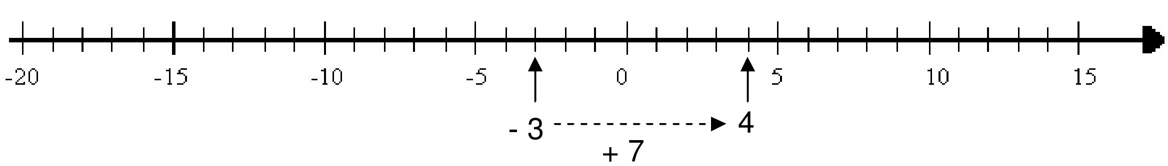
Propriedade comutativa da adição

O que acontece com a soma de -3 + 7 se trocarmos a ordem das parcelas?

Efetue as adições, representando os números na reta numérica orientada:

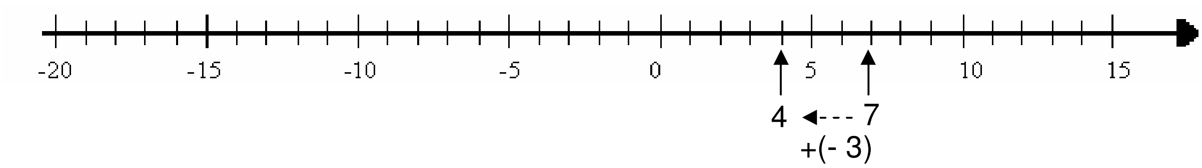
Observamos que saindo de -3 e andando +7, chegamos a +4:

$$\boxed{(-3) + (+7) = +4}$$



E observamos que saindo de +7 e andando -3, também chegamos a +4

$\boxed{(+7) + (-3) = +4}$



Assim, podemos escrever: - 3 + 7 = +7 - 3. Pense bem nisto: a operação de adição se transformou em uma subtração. O aluno não poderá fazer confusão se isto não for bem trabalhado? Como deveremos definir a subtração de inteiros para evitar tais incompreensões? Veremos isto em breve.

Veja outro exemplo: $\boxed{(-5) + (-2) = -7}$ e $\boxed{(-2) + (-5) = -7}$

Ou seja, trocando a ordem das parcelas, o resultado da adição é o mesmo. Esta é uma manifestação particular da

Propriedade Comutativa da Adição:

***a + b = b + a*, quaisquer que sejam os inteiros *a* e *b*.**

Será que o mesmo vale para a subtração de inteiros? 2 – 3 é o mesmo que 3 – 2?

Propriedade associativa da adição

A adição de várias parcelas como

$$(-20) + 12 + 36$$

faz sentido e pode ser feita agrupando-se parcelas. Por exemplo, podemos começar adicionando as duas primeiras:

$$[(-20) + 12] + 36 = (-8) + 36 = +28$$

Ou começando pelas duas últimas:

$$(-20) + [12 + 36] = (-20) + 48 = +28$$

Em ambas, encontramos o mesmo resultado. Isto é uma manifestação da

Propriedade associativa da adição:
***(a + b) + c = a + (b + c)* para todos os inteiros *a*, *b* e *c*.**

Proponha aos alunos que *criem* problemas na Atividade do Robô, que ilustrem a propriedade associativa. Observe que enunciar problemas é tão importante para compreender um conceito, quanto responder a questões já formuladas.

Elemento neutro da adição

Quando somamos o número 0 a um número inteiro, o resultado é o próprio número. Numa reta numérica, adicionar 0 significa não movimentar o ponto, nem à direita nem à esquerda. Assim, temos os exemplos abaixo:

a) 0 + (- 3) = - 3

b) (+5) + 0 = +5

c) - 4 +0 = - 4

d) 0 + 8 = 8

Dizemos que 0 é o elemento neutro da adição.

Adição de números opostos ou simétricos

Todo número inteiro possui um oposto. A soma do seu inteiro com seu oposto é 0. Use a Atividade do Robô para lembrar que somar o oposto a um número inteiro é reverter o sentido do movimento a partir do ponto geométrico inicial, adicionando uma quantidade igual em valor absoluto ao número inicial e, portanto, o resultado final é a origem de referência, o número 0.

Trabalhe, por exemplo, os seguintes casos:

a) -5 e +5 são números opostos: (-5) + (+5) = 0

b) +9 e -9 são números opostos: + 9+ (-9) = 0

Esta propriedade será intensamente utilizada nos jogos do próximo capítulo.

Subtração de Números Inteiros

Assim como na adição com os números inteiros, consideramos importante iniciar o estudo, desenvolvendo alguns exemplos práticos que ilustrem, de maneira intuitiva, o significado da operação de subtração.

Exemplos Práticos:

1) João tinha R$ 18,00 e comprou um boné que custou R$ 6,00. Após a compra, quanto dinheiro sobrou para João?

Neste exemplo, o aluno deve utilizar seu conhecimento de números naturais e poderá facilmente responder com uma operação de subtração.

2) Mário, pai de Joana, tinha um saldo positivo de R$ 60,00 no banco e para comprar uma bicicleta para a filha, fez uma retirada de R$ 80,00. Após o banco lhe dar crédito, quanto Mário ficou devendo ao banco?

3) Voltemos ao exemplo do Capítulo 2, em que Antônio ganhou R$ 20,00 no início da semana e o seu gasto na cantina durante uma semana foi registrado no caderno como segue:

Dia da semana	Crédito	Gasto
2^a feira	20	3
3^a feira		2
4^a feira		0
5^a feira		4
6^a feira		3

Consideremos a pergunta: “No final da semana, sobrou algum dinheiro para Antônio? Quanto?”.

Em cada um dos exemplos acima, identificamos o conceito de “sobra” ou “resto” em relação a uma situação inicial. Em vez de “somar”, estamos considerando uma situação em que algo foi “subtraído” ou “diminuído”. Estamos tratando da operação de “Subtração”.

Lembremos do desenvolvimento do exemplo do Antônio. Neste, o gasto pode ser representado como um número negativo, sendo o total de gastos no final de semana a “**soma de números negativos**” (números de mesma qualidade).

Indicamos: *gasto total* = (-3) + (-2) + 0 + (-4) + (-3) = -12, significando que ele *gastou* um valor absoluto de 12 reais durante a semana.

O saldo do Antônio, no final da semana, é a *diferença* entre o que ele possuía, 20 (reais), e o que ele gastou, isto é, 20 – 12 = 8 (reais), como teríamos feito com subtração de números naturais. O que ocorre com os números inteiros, é que podemos considerar a natureza (positiva ou negativa) dos valores absolutos dos números envolvidos, e a operação de subtração “20 – 12” corresponde exatamente à adição do primeiro número inteiro com *o oposto* do segundo: “20 + (-12)”.

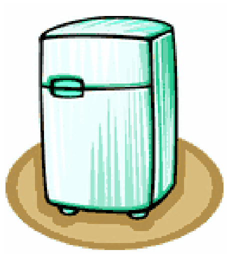
Esta interpretação se aplica perfeitamente ao Exemplo 2, quando consideramos a operação de crédito/débito bancário para a compra da bicicleta. Efetivamente, neste exemplo identificamos uma situação em que subtraímos 80 (reais) de 60, o que é indicado por 60 – 80. Esta operação não tem significado nos números naturais.

Atribuindo a "**possuir crédito**" o sinal "positivo", e a "**retirada**" ou **"dever ao banco"** o sinal "negativo", podemos identificar a seguinte ação no problema: (+60) + (- 80) = - 20.

Portanto, podemos reescrever a operação de Subtração: (+60) – (+80) = - 20, usando os números inteiros. Temos a subtração de números inteiros como adição do primeiro número com o *oposto* do segundo número.

Faça a interpretação da operação subtração nos seguintes problemas:

Problema 1: Paulo, tio de João, deve R$ 100,00 ao banco. Precisando pagar algumas contas, Paulo empresta do banco a quantia de R$ 50,00. Depois desse empréstimo, qual é o saldo bancário de Paulo?



Problema 2: Numa cozinha a temperatura ambiente é de 23 graus. Um objeto foi retirado do congelador, cujo interior é de 5 graus negativos, e foi deixado sobre a mesa por um dia inteiro até atingir a temperatura ambiente. Que operação representa a variação de temperatura do objeto? E qual é a diferença de temperatura sofrida pelo objeto?

[Temperatura final – temperatura inicial = 23 – (- 5) = 28]

Resumindo:

A subtração de números inteiros é a adição do primeiro deles com o oposto do segundo: *a – b = a + (- b)*, quaisquer que sejam os inteiros *a* e *b*.

No Capítulo 4, jogos e atividades serão trabalhados para sugerir estratégias diferentes que podem ser usadas na sala de aula para fixar o conteúdo visto até aqui com as operações de adição e subtração.

Para finalizar este capítulo, sugerimos que os alunos trabalhem as operações de adição e subtração de números inteiros, que requeiram o uso do algoritmo aprendido nas operações com números naturais acrescido do conceito de “sinais”.

Atividades com algoritmos de Adição e Subtração

Um algoritmo é a etapa final de um processo que permite a realização com sucesso das operações em diferentes contextos. Este processo pode ser descrito pelas seguintes etapas:

- inicia-se com a compreensão da ação envolvida na operação,
- passa-se ao estudo das operações elementares, em geral envolvendo números com apenas um algarismo (tabuadas),
- em seguida atentamos para o reconhecimento e compreensão das propriedades fundamentais da operação e, finalmente,
- nas técnicas operatórias próprias de cada operação.

Em todas estas etapas o professor deve estar atento à aprendizagem dos alunos.

Admitindo familiaridade com as operações básicas dos números naturais, sugerimos as seguintes atividades com números inteiros baseadas nas propriedades estudadas neste capítulo:

a) $58 - (-42) = \underbrace{58 + 42} = 100$ (subtrair é somar com o oposto)

$$\begin{array}{r} 58 \\ +\ 42 \\ \hline 100 \end{array}$$

b) $-105 + 279 = \underbrace{279 - 105} = 174$ (comutativa)

$$\begin{array}{r} 279 \\ -\ \underline{105} \\ 174 \end{array}$$

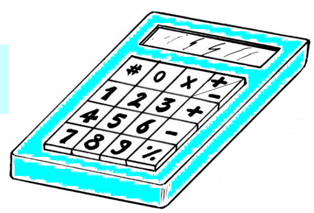
c) $-520 - (71) = -\underbrace{(520 + 71)}$ (para números de mesmo sinal somam-se os valores absolutos e mantêm-se o sinal comum)

$$\begin{array}{r} 520 \\ \underline{+\ 71} \\ 591 \end{array}$$

Em cada um dos exemplos acima, tenha a certeza de que os alunos compreenderam que tipo de operação e que tipo de propriedade está sendo utilizada.

Como última atividade deste capítulo, chamamos a atenção do professor sobre o uso pedagógico da tecla +/- que se encontram na maioria das calculadoras de bolso; elas ilustram o conceito de sinal “positivo” e “negativo” que foi desenvolvido até agora.

Atividade com tecla +/- da calculadora



É interessante o professor trazer para a sala de aula uma breve discussão e aplicação das operações com os números inteiros, usando uma calculadora. É uma forma, inclusive, do aluno aprender que para operar a calculadora é preciso conhecer certas propriedades matemáticas.

Tendo em mãos uma calculadora, o professor, a fim de despertar a curiosidade dos alunos e verificar suas habilidades para operar com uma máquina, pode introduzir a atividade com a seguinte pergunta:

"Vocês sabiam que a maioria das calculadoras tem uma tecla que permite trabalhar com números negativos?"

Após ouvir as possíveis respostas dos alunos, o professor apresenta a tecla +/-, que se acionada logo após a digitação do número, este muda de sinal.

Por exemplo, para se obter o número -10 em sua calculadora, digite 1 e 0 e depois a tecla +/-. Assim, irá aparecer o sinal de menos (-) antes do número. Contudo, devemos prestar atenção, pois, algumas calculadoras não exibem o sinal de "menos" para indicar números negativos, e sim a palavra *minus* do lado esquerdo no visor da calculadora. Vemos então que a tecla +/- serve para trocar o sinal do número que está no visor.

O professor pode propor ao aluno: como você faria, usando a calculadora, para realizar a seguinte operação: (+78) – (+80) – (-7)?

- Pense que, se o aluno ainda não conhecesse ou não soubesse operar com a tecla +/-, seu procedimento ao realizar a conta, possivelmente, seria o seguinte.

1º) digitaria 78 – 80. Resultado: - 2.

O aluno guardaria esse resultado, ou memorizando-o ou anotando-o em um papel.

2º) digitaria em seguida + 7, usando a propriedade de que a subtração de um número inteiro é a soma com seu oposto, resultando em 5.

- Outro modo, usando já a tecla (+/-):

Temos 78 – 80, resultando em - 2. Então, digitamos em seguida **–** (tecla da operação), depois 7, a seguir (+/-) (o 7 no visor ganha o sinal -) e finalmente a tecla =, para obter 5.

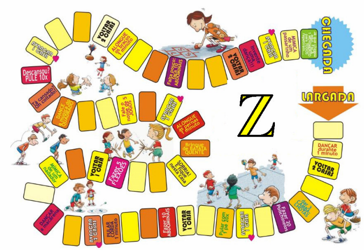
Este último procedimento mostra claramente a operação de subtração, e a função da tecla (+/-) que troca o sinal do número 7. O professor deve destacar a diferença entre os sinais de + / – nesta tecla, que não são operatórias, daqueles + e – que são as teclas da calculadora que efetuam operações com os números.

Depois, o professor pode ampliar essa atividade propondo outras operações que devem ser realizadas aplicando o botão da ação (+/-) das máquinas de calcular.

Para fixar o conceito de adição de números inteiros, o professor pode lançar mão de **atividades com jogos**. O próximo capítulo será integralmente dedicado a este assunto. Os resultados alcançados com esta metodologia são animadores, vale a pena levá-la para a sala de aula.

4. JOGOS QUE ENVOLVEM A ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

“Aquele que ensina Matemática e não pratica, de quando em quando, uma recreação aritmética, pode ser um gênio como Poincaré, um novo Weierstrass, um George Cantor da Álgebra Moderna, mas será sempre um péssimo, um detestável professor” (Felix Klein)



Neste capítulo trabalha-se a confecção de jogos que acompanham os capítulos já estudados e propõe-se simular a utilização dos mesmos na sala de aula. Merece destaque as Atividades com Fichas Positivas/Negativas que dão significado concreto às regras de sinais na adição e subtração. Esta atividade também será útil na aprendizagem das regras de sinais para a multiplicação. Os demais jogos podem ser classificados em três níveis: alguns servem para auxiliar à introdução de conceitos a partir do conhecimento intuitivo dos alunos, outros se prestam a agentes pra consolidar atividades já aprendidas e finalmente alguns outros foram planejados para estabelecer conexões dos conceitos consolidados com situações do cotidiano ou aplicações da matemática com outras áreas do conhecimento.

4.1 JOGO DAS CARTAS INTEIRAS

Esta primeira atividade tem como objetivo a introdução conceitual aos números inteiros utilizando cartas de um baralho e trabalha intuitivamente as operações de soma e subtração. Apesar de muito simples, os resultados são surpreendentes, pois permitem a compreensão da verdadeira gênese dos números negativos, além de exigir a necessidade de uma nova notação para registrá-los.

Os materiais necessários são cartas de dois baralhos com cores diferentes, lousa e giz. A atividade é introdutória e pode ser realizada com alunos do 6º. ou 7º. ano e tempo de duração não ultrapassa uma aula.

As cartas pretas do baralho corresponderão a **pontos ganhos** e as cartas vermelhas a **pontos perdidos**. Cada carta do baralho do 2 até o 10 representa sua respectiva pontuação, o Ás vale 1, o Valete 11, a Dama vale 12 e o Rei vale 13. O sinal do número depende de sua cor: será positivo se forem pontos ganhos (cartas pretas) e negativo se forem pontos perdidos (cartas vermelhas).

O professor deve dividir os alunos em duas equipes (Equipe A e equipe B). Cada grupo deverá escolher um aluno como representante em uma jogada e este será o responsável pelos registros de sua equipe na lousa. Este aluno poderá escolher a forma de registro que quiser para marcar os pontos ganhos e perdidos, sem interferência do professor. Entretanto, convém fazer uma tabela na lousa como a exposta a seguir para organizar a atividade:

♣♦♠♥	Equipe A	Equipe B
1ª. carta retirada		
2ª. carta retirada		
3. carta retirada		
4ª. carta retirada		
5ª. carta retirada		
6ª. carta retirada		
7ª. carta retirada		
8ª. carta retirada		
9ª. carta retirada		
10ª. carta retirada		
Total de pontos		

Sorteia-se uma das equipes para começar o jogo. O professor fica de posse do baralho e um aluno de cada turma retira alternadamente uma carta, mostrando-a à sala e ao seu representante para que este faça o registro na lousa, anotando o valor de cada carta retirada pelos alunos de sua equipe na tabela. Cada rodada consta de 10 sorteios de cartas para cada turma e as retiradas de cartas são feitas alternadamente.

O ideal é fazer três rodadas, mudando o representante e tentando fazer com que todos participem. Ao final de uma rodada, os alunos anotam os resultados obtidos por sua equipe e ajudam o representante a encontrar o total de pontos daquela rodada. Um aluno da outra equipe confere o resultado para ver se não houve trapaça.

Os resultados finais das três rodadas devem ser anotadas em uma outra tabela, como a sugerida:

♣♦♠♥	Total de pontos da Equipe A	Total de pontos da Equipe B
1ª. rodada		
2ª. rodada		
3ª. rodada		
Somatória Final		

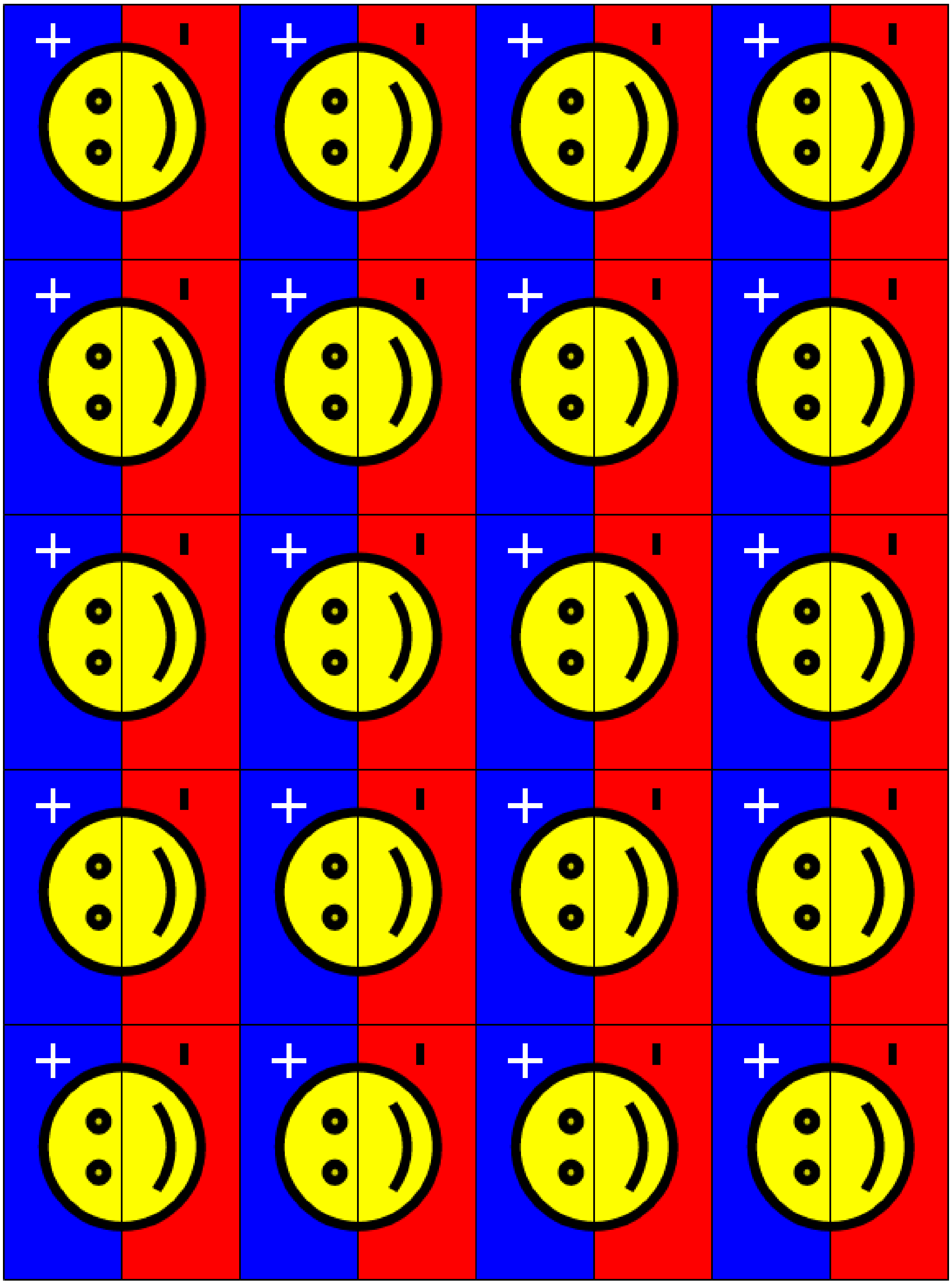
Vencerá o jogo a equipe que fizer o maior número de pontos na somatória dos totais das três jogadas realizadas. Ao final o professor deverá ouvir dos alunos as novidades ou dificuldades que tiveram a fim de introduzir sistematicamente os números inteiros. O resultado é incrível!

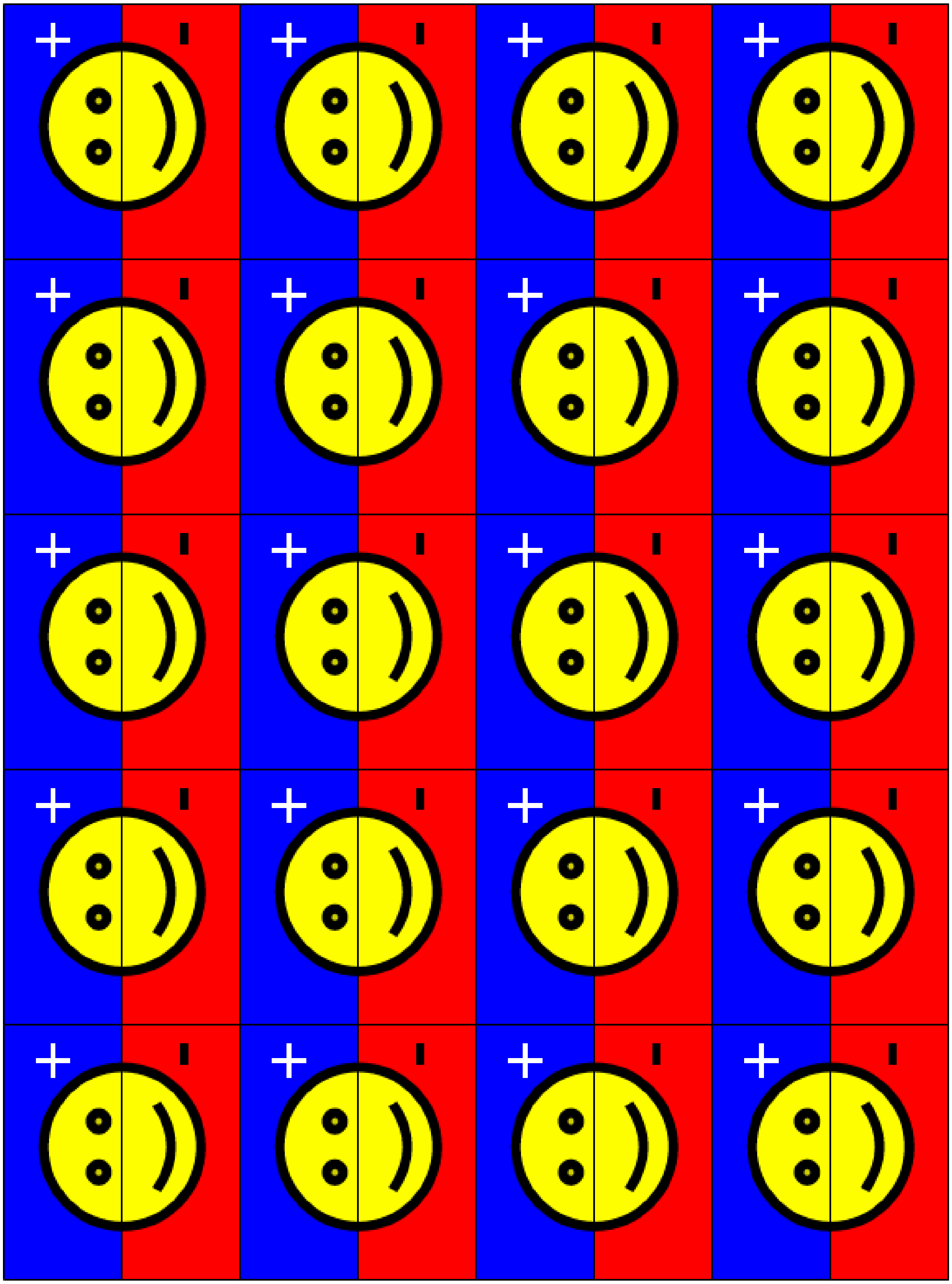
4.2 Atividades com fichas positivas e negativas para a adição e subtração de inteiros

Esta atividade é muito rica e pode ser usada muitas vezes para o trabalho com as operações com números inteiros. Ela dá significado às operações básicas e auxilia os alunos com dificuldades na passagem do universo dos números naturais para o dos números inteiros. O objetivo é fazer com que o aluno elabore as regras das operações de adição e subtração com números inteiros, tornando–as deste modo, mais significativas.

O material necessário são uma coleção de fichas de papel cartão (ou cartolina ou EVA). Sugere-se o uso de fichas azuis para a representação dos números positivos e o uso de fichas vermelhas para a representação dos números negativos. São necessárias aproximadamente 30 fichas, de 2 cm x 4 cm, 15 de cada cor.

Eis uma amostra de como as fichas podem ser feitas:





A atividade se dirige a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, mas pode ser realizada com alunos de séries mais altas que tenham dificuldade em trabalhar com números inteiros.

Combina-se com o aluno que uma ficha azul anula uma ficha vermelha e vice – versa. Isto é natural para o aluno, desde que ele já tenha participado da atividade anterior com as cartas do baralho. Vejamos as etapas do trabalho:

1. Como representar (escrever) os números inteiros:

Observe algumas formas possíveis de representações para os números naturais, utilizando–se as fichas. Veja os exemplos que seguem:

Como "escrever" o número zero?

Pode–se colocar uma ficha de cada cor, ou três fichas de cada cor, e assim por diante. Observe que colocando-se números iguais de fichas azuis e vermelhas, as fichas se anulam duas a duas, pois cada par de fichas com cores diferentes representa o número zero.

Como "escrever" o número (+5)?

Podemos "escrever" o número cinco, utilizando cinco fichas azuis, ou dez fichas azuis e cinco vermelhas, ou vinte fichas azuis e quinze fichas vermelhas e assim por diante.

Como "escrever" o número (–5)?

Podemos "escrever" o número menos cinco utilizando cinco fichas vermelhas, ou dez fichas vermelhas e cinco azuis e assim por diante.

2. Operação de Adição com Inteiros

Inicialmente o professor deve lembrar os vários significados para a palavra adição ou adicionar, inclusive a idéia de juntar, que será a ideia utilizada nesta etapa.

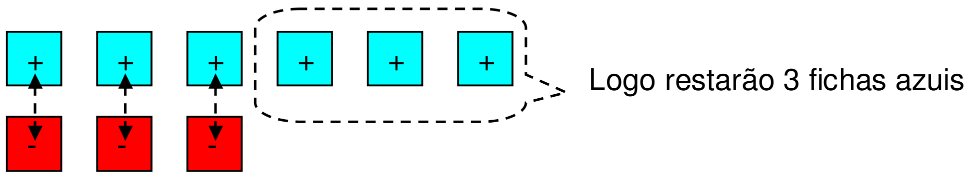
Veja abaixo alguns exemplos de situações a serem exploradas na sala de aula:

Queremos adicionar (+ 3) com (+ 6), ou seja, devemos juntar 3 fichas azuis com 6 fichas também azuis. No total, quantas fichas azuis teremos?

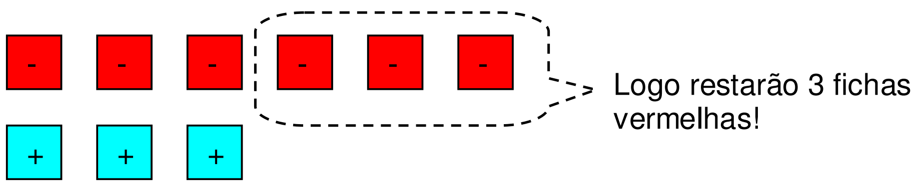
Queremos adicionar (–3) com (–6), ou seja, devemos juntar 3 fichas vermelhas com 6 fichas vermelhas. Ao todo, quantas fichas vermelhas teremos?

Se quisermos adicionar (–3) com (+6), ou seja, devemos juntar 3 fichas vermelhas com 6 fichas azuis. E agora? Lembre–se que ao juntarmos uma ficha azul com uma ficha vermelha, elas se anularão uma a outra. Então ficaremos com 3 fichas! De que cor? Ficaremos com 3 fichas da cor azul, ou seja, (+3).

Teremos então a seguinte situação:



Vamos agora adicionar (+3) com (–6), ou seja, devemos juntar 3 fichas azuis com 6 fichas vermelhas.



Então novamente, temos que uma ficha azul anula uma vermelha e vice-versa e, portanto teremos como resultado da adição de (+3) com (–6), 3 fichas vermelhas, ou seja, 3 negativo (- 3). Portanto (+3) + (- 6) = - 3.

3. Operação de subtração de números inteiros:

Nesta etapa, devemos resgatar o significado da subtração, que é “retirar”. Esta será a palavra chave aqui! Então iremos retirar, retirar do que se tem!

1º caso: (Realizando operações com números de mesmos sinais)

Queremos fazer: (+3) – (+2), ou seja, de 3 fichas azuis queremos tirar 2 fichas azuis. Com quantas fichas azuis ficaremos?

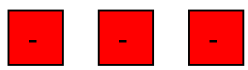
Vamos fazer agora: (–3) – (–2), ou seja, de 3 fichas vermelhas queremos retirar 2 fichas vermelhas. Com quantas fichas vermelhas ficaremos?

2º caso: (Realizando operações com números de sinais diferentes)

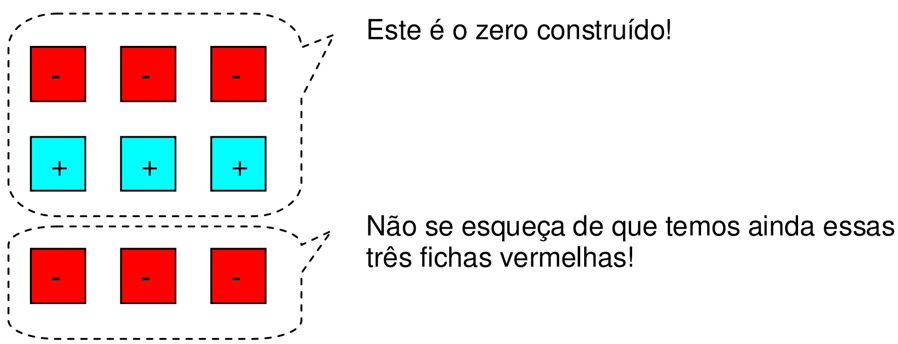
Vamos fazer (–3) – (+2). E agora? De que forma iremos retirar 2 fichas azuis das 3 fichas vermelhas que temos? Por enquanto não é possível. Mas temos que efetuar a operação!

Usaremos o recurso de “colocar zeros”. Mas o que é colocar zeros? É acrescentar fichas azuis e vermelhas na mesma quantidade! Quantas? Quantas quisermos.

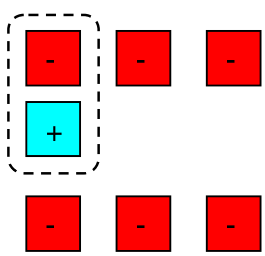
Observe que temos, inicialmente, que retirar duas fichas azuis, mas só temos 3 fichas vermelhas:



Precisamos, portanto criar fichas azuis. Observe que devemos fazer isto, de modo a não alterar a situação inicial. Para isso, devemos criar “zeros”, acrescentando, por exemplo, 3 fichas vermelhas e 3 fichas azuis. Logo, como resultado, obteremos a seguinte situação:



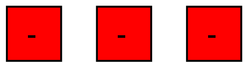
Temos agora, no total, seis fichas vermelhas e três fichas azuis. Devemos retirar duas fichas azuis. Fazendo esta retirada, obtemos:



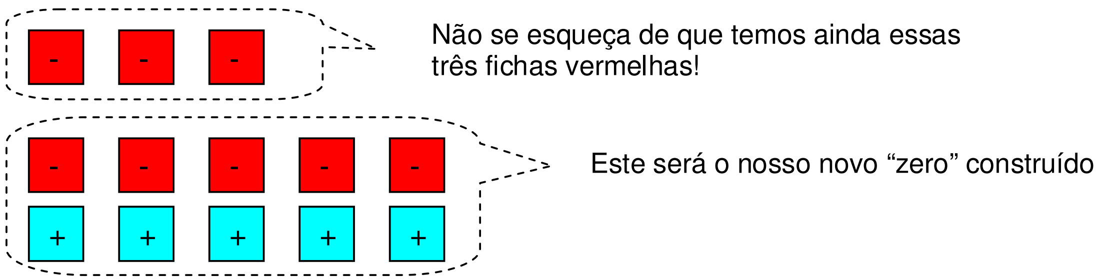
Veja que restam ainda um par de uma ficha vermelha e uma ficha azul e mais cinco fichas vermelhas. Essas duas fichas do par se anulam e sobram as outras cinco fichas vermelhas, que representam o sinal de menos. Logo a resposta será (–5).

Uma dúvida muito comum se dá quanto a quantidade de fichas usadas no momento de se determinar os zeros. O número de fichas pode variar de acordo com sua vontade, mas você não pode se esquecer de que para cada nova ficha azul, devemos ter uma ficha vermelha e vice-versa. Para que você possa entender melhor, veja o exemplo abaixo em que queremos realizar a mesma operação realizada acima, sendo ela: (–3) – (+2).

Começaremos do mesmo ponto de partida. Inicialmente, tem-se três fichas vermelhas...



Criaremos agora “zeros” de um modo diferente e chegaremos a esta nova situação...

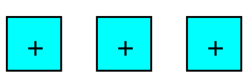


Logo, como resultado, obteremos a seguinte situação: temos agora, no total, oito fichas vermelhas e cinco fichas azuis. Devemos retirar duas fichas azuis. Veja que restam ainda três pares contendo cada um, uma ficha vermelha e uma ficha azul e mais cinco fichas vermelhas. As fichas dos pares se anulam e sobram as outras cinco fichas vermelhas, que representam o sinal de menos. Logo a resposta será novamente (–5).

De modo análogo, devemos prosseguir para esta situação:

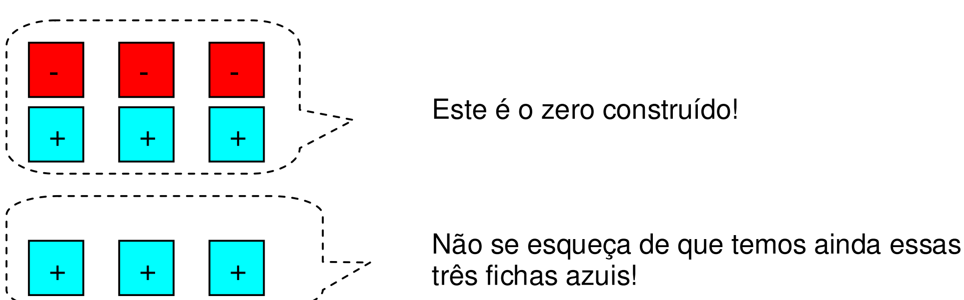
Vamos fazer a operação (+3) – (–2). E agora? Queremos retirar 2 fichas vermelhas das 3 fichas azuis que temos? Novamente isto parece ser impossível! Usaremos o recurso de “colocar zeros”.

Observe que temos, que retirar duas fichas vermelhas, mas só temos 3 fichas azuis:

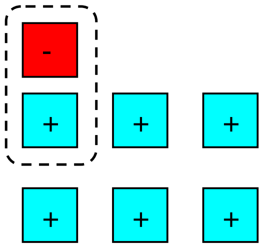


Precisamos criar fichas vermelhas. Observe que devemos fazer isto, de modo a não alterar a situação inicial. Para isso, devemos criar “zeros”:

Logo, como resultado, obteremos a seguinte situação:



Observe que ainda temos, a quantidade (+3), que está sendo representada pelas 3 fichas azuis. Agora podemos retirar 2 fichas vermelhas. Retirando-as obtemos:



Nos resta, após a retirada das duas fichas vermelhas, um par formado por uma ficha azul e uma vermelha, que somam zero e mais cinco fichas azuis. Então tem-se como resultado final, cinco fichas azuis. Portanto (+3) – (–2) = (+5).

Tente fazer experimentos com outros números, que tal (- 2) – (-2), 3 – 5, 5 – 5, 5 + 0, 0 + 5, 5 – 0 e 0 – 5?

4.3 Jogo Financeiro

Esta atividade também trabalha com as operações de soma e subtração de números inteiros, mas é planejada para ser realizada em pequenas equipes. O ideal são grupos de 4 alunos.

O jogo é formado por 70 fichas vermelhas que representam a situação de dívida e 70 fichas azuis que representam a situação de crédito. Além disso são necessárias 30 fichas contendo instruções iguais às que estão reproduzidas abaixo:

O banco deve lhe dar 10 fichas vermelhas	Receba 2 fichas vermelhas do próximo jogador	Pague duas fichas azuis ao jogador seguinte	Receba duas fichas azuis do banqueiro
Pague duas fichas azuis ao jogador anterior	Pague três fichas azuis ao banqueiro	Receba 5 fichas vermelhas do jogador anterior	Receba 1 ficha azul do banqueiro
Receba duas fichas azuis do jogador anterior	Retire 10 fichas vermelhas do seu colega à esquerda e fique com elas	Você deve entegar 10 fichas vermelhas ao banqueiro	Receba 4 fichas vermelhas do banqueiro
Entregue 5 fichas vermelhas ao jogador anterior	Receba 3 fichas vermelhas do banqueiro	Retire 10 fichas vermelhas do seu colega à esquerda e entregue-as ao banqueiro	O banqueiro deve lhe dar 10 fichas azuis
Entregue 10 fichas azuis ao banqueiro	Entregue 4 fichas azuis ao banqueiro	O banqueiro deve lhe dar 10 fichas vermelhas	Retire 10 fichas azuis do seu colega à esquerda e fique com elas
Retire 10 fichas vermelhas do seu colega à esquerda e entregue-as ao banqueiro	Dê 10 fichas azuis ao seu colega da direita	Receba 10 fichas azuis do seu colega da direita	Dê 10 fichas vermelhas ao banqueiro
Entregue 10 fichas vermelhas a seu colega da esquerda	Entregue 10 fichas vermelhas a seu colega da direita	Pegue 10 fichas azuis com o banqueiro	Dê todas as suas fichas vermelhas ao banqueiro
FIM DO JOGO	**FICHAS COM INSTRUÇÕES DO JOGO FINANCEIRO**		FIM DO JOGO

Inicialmente a classe deve ser dividida em equipes. Em cada equipe, os componentes deverão determinar quem será o banqueiro responsável, sendo os três outros membros os jogadores que realizarão as transações “financeiras”. Cada banqueiro deve distribuir 10 fichas azuis para cada um dos três jogadores de sua equipe. As fichas com instruções são colocadas no centro da mesa, empilhadas com a face escrita voltada para baixo, a fim de que os alunos não possam ler os comandos antes de comprá-las.

Através de um sorteio (por exemplo, jogando-se par ou ímpar ou lançando-se um dado) os três jogadores decidem a sequência de ordem de compra dos cartões. O jogador que representa o banqueiro fica como um intermediador, sendo responsável pelo controle das fichas e organização das jogadas.

O jogo então efetivamente começa; o primeiro jogador deve pegar uma ficha do centro da mesa e seguir a instrução nela escrita. Caso o jogador não tenha a quantidade necessária de fichas para efetuar a transação solicitada no cartão retirado, este deverá recorrer ao banqueiro. Por meio do empréstimo de fichas, este deverá receber do banqueiro a mesma quantidade de fichas vermelhas e azuis. As fichas azuis servem para atender as necessidades do jogador, enquanto que as vermelhas são para que o aluno não se esqueça que possui uma dívida com o banqueiro, a qual, no futuro deverá ser quitada.

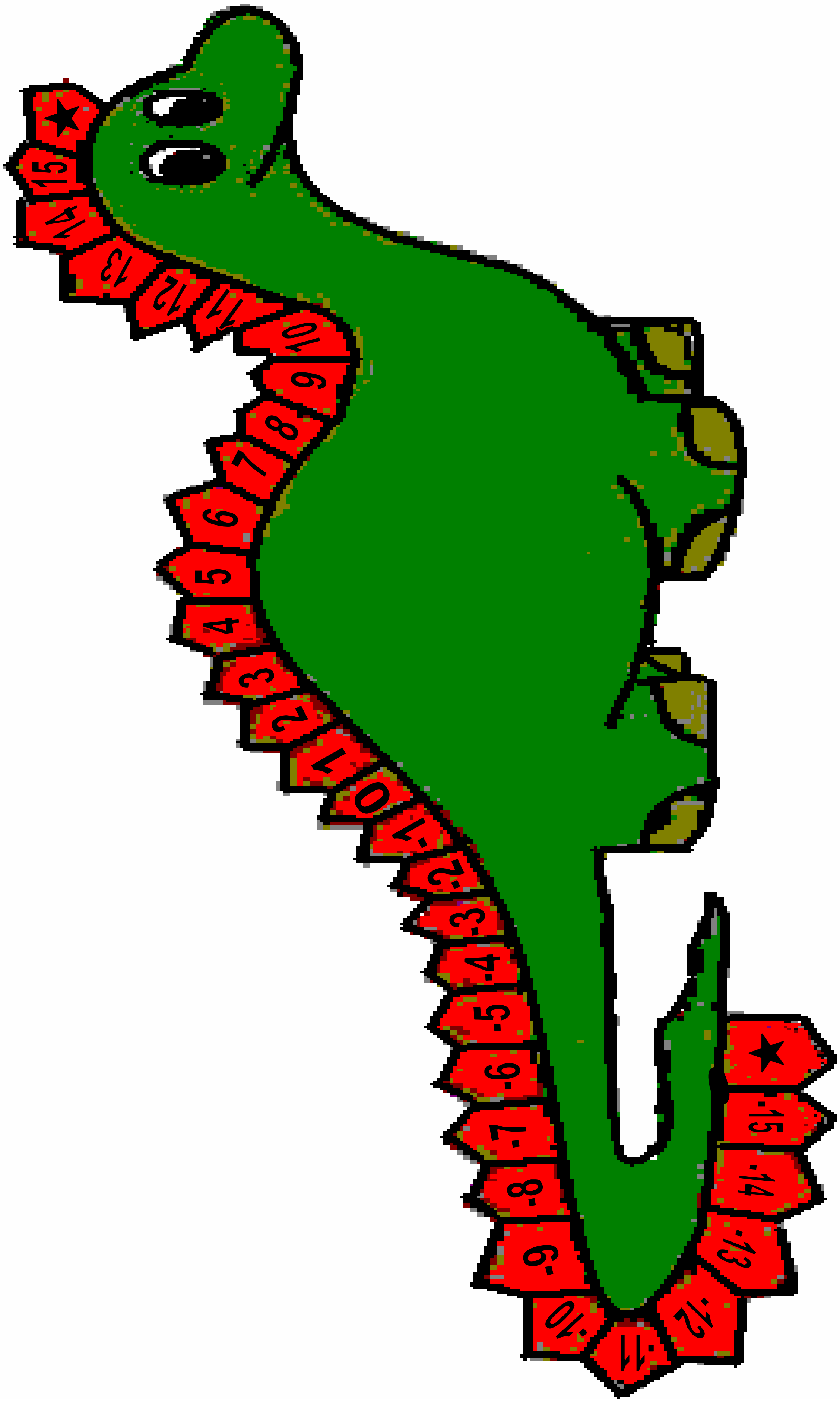
O jogo termina quando um jogador retirar a ficha com a instrução “Fim de Jogo”. Depois disto, os jogadores deverão fazer o seus respectivos balanços financeiros e vence o jogo aquele que tiver mais crédito (fichas azuis não anuladas por fichas vermelhas).

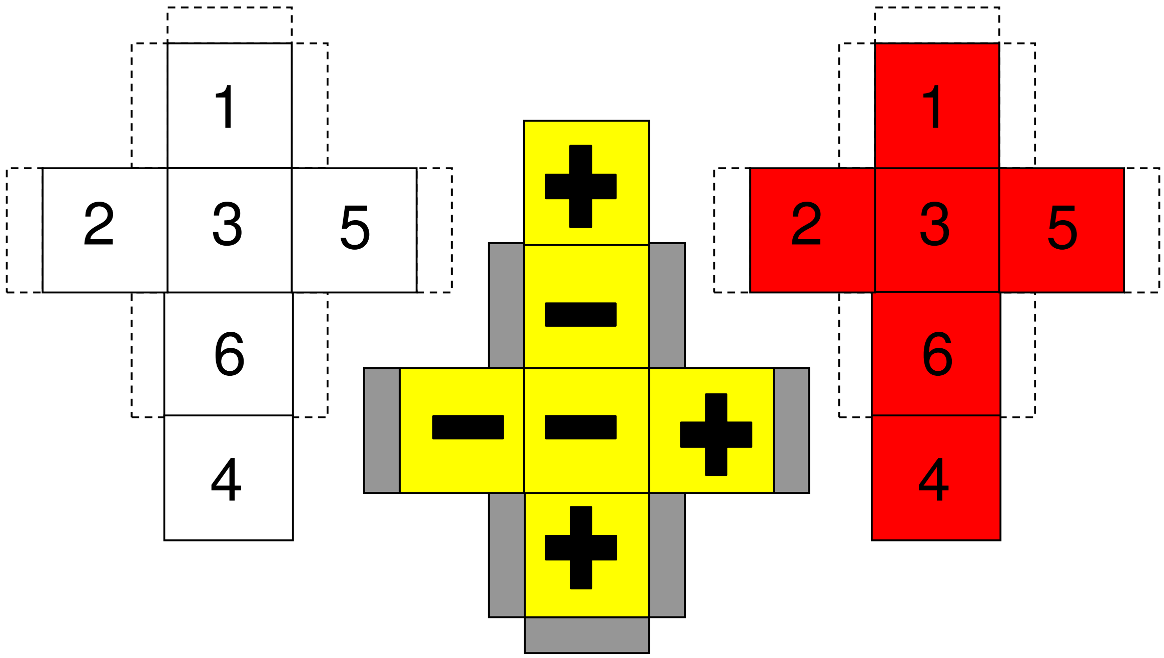
4.4.3 O Jogo do Dinossauro

Este jogo permite o trabalho com vários conceitos simultâneos ligados aos números inteiros: a ordenação, as operações de adição e subtração, o oposto e o cálculo mental.

O jogo é formado por um tabuleiro na forma de um dinossauro onde uma pequena equipe de jogadores podem disputar uma partida. Cada jogador deve ter seu próprio peão para andar sobre as costas do dinossauro e as jogadas são determinadas pelos lançamento de dados. Este jogo é indicado para alunos do 6º. e 7º anos.

A seguir estão os materiais utilizados no jogo:


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15



REGRAS DO JOGO DO DINOSSAURO:

1ª rodada

Para a primeira rodada, devemos seguir às seguintes regras:

- O início da partida se dá na casa zero (0) do tabuleiro do dinossauro. Todos os peões dos jogadores devem ser colocado no 0 no início do jogo.
- O dado branco representa a operação de **adição** e indica quantas casas o peão deverá subir no dinossauro.
- O dado vermelho representa a operação de **subtração** e indica quantas casas o peão deverá descer no dinossauro.
- O dado amarelo não é usado nesta primeira rodada.

Para entender melhor o que foi dito acima, observe o seguinte exemplo:

Jogam-se os dois dados simultaneamente. Suponha que o resultado obtido é o seguinte:

Neste caso o peão deve subir 3 casas (resultado do dado branco) e, a seguir, descer 5 casas (resultado do dado vermelho) a partir da casa em que o peão se encontrava antes da jogada. Logo:

- Se o peão estiver na casa zero (0), deverá ir para a casa –2, pois 0 + 3 + (–5) = –2.
- Se o peão estiver na casa 8, então deverá ir para a casa 6, pois 8 + (3 + (–5)) = 8 – 2 = 6.
- Se o peão estiver na casa -1 deverá ir para a casa -1 + 3 + (-5) = -3

O vencedor será quem chegar primeiro em uma das casas marcada com uma estrela. Quem sair fora do tabuleiro (ultrapassar uma estrela) deve retornar à casa 0 e continuar jogando.

2ª rodada –

Terminada a primeira rodada, os jogadores darão início à segunda etapa. Agora, a regra é um pouco mais elaborada: Os peões deverão ser posicionados na faixa zero (0) para o início do jogo. Os dados serão jogados e agora os jogadores terão que dizer para qual casa do dinossauro irão, sem mexer no peão. Se errar, o participante continua no mesmo lugar.

3ª rodada –

Os jogadores deverão seguir as instruções da 1ª rodada, sendo que após ser efetuada cada jogada, haverá a utilização do dado amarelo. Este dado poderá alterar a posição do peão no dinossauro, dependendo do sinal + (mais) ou – (menos) que será determinado no lançamento do mesmo.

Para exemplificar as novas regras, observe a seguinte situação:

Considere que um dos peões esteja na casa (+2) do tabuleiro e seja (–3) o resultado da jogada dos dados branco e vermelho. O jogador deverá então descer três casas, indo para a casa (–1). O mesmo jogador deverá lançar o dado dos sinais; podem ocorrer dois resultados:

a) Caso saia o sinal de + (mais) na face do dado, o peão permanecerá na mesma casa do tabuleiro em que se encontra, ou seja, o sinal de + (mais) não interferirá na posição do mesmo.
b) Caso saia o sinal de – (menos), o peão deverá se deslocar da casa (–1) em que se encontra para a casa (+1) do tabuleiro (troca de sinal). Neste caso, o sinal de – (menos) altera a posição do peão levando-o para a casa simétrica com relação a 0 (zero).

O vencedor será quem chegar primeiro em uma das casas marcada com uma estrela. Quem sair fora do tabuleiro (ultrapassar uma estrela) deve retornar à casa 0 e continuar jogando.

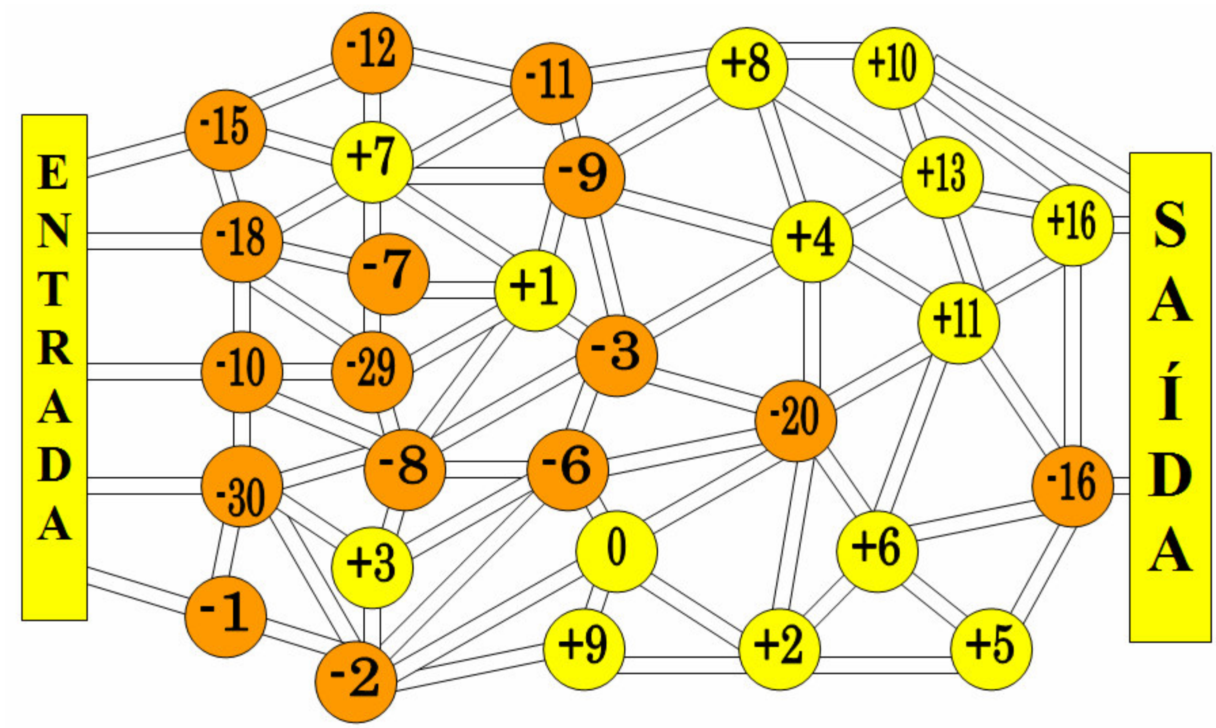
4ª rodada –

O jogo deverá obedecer às mesmas regras estabelecidas na 2ª rodada (cálculo mental), utilizando o dado dos sinais a cada jogada.

4.4.4 Labirinto dos números inteiros

Este jogo envolve dois participantes e cada um deles deve ter seu peão para marcação. Não é um jogo de azar e, uma vez descoberta a solução, o tabuleiro não poderá mais ser utilizado pela mesma dupla de jogadores. Por isto sugere-se a construção de vários tabuleiros parecidos, para que uma mesma dupla possa jogar mais de uma vez. Sorteia-se quem deve iniciar o jogo.

Um exemplo de tabuleiro encontra-se na figura a seguir:



Vários tabuleiros como este podem ser feitos, com desafios diferentes.

REGRAS DO JOGO DO LABIRINTO DOS NÚMEROS INTEIROS:

Cada jogador, na sua vez, move sua peça de uma casa para outra do labirinto, andando somente uma casinha por rodada, desde que caminhe SEMPRE em ordem crescente na numeração das casas. Caso algum participante fique sem saída, deve retornar ao ponto de partida (entrada) e seguir por um outro caminho. Vence quem sair do labirinto em primeiro lugar.

4.4.5 Matix com Inteiros

Este é um jogo pedagógico clássico que envolve estratégia, antecipação mental de jogadas, comparação entre números inteiros, além da operação de adição de inteiros.

Esta atividade deve ser realizada em duplas, com um tabuleiros 8 x 8, 63 peças com números inteiros distribuídas aleatoriamente pelas casas do tabuleiro e uma peça especial, marcada com uma estrela que deve ser colocada na última casa vazia. Escolhe-se o jogador que irá iniciar o jogo por meio de um sorteio.

O objetivo do jogador é ir retirando as peças do tabuleiro uma por uma, sendo vencedor aquele que conseguir fazer o maior número de pontos com as peças que retirou, ao final do jogo. Os jogadores retiram alternadamente as peças.

O primeiro jogador tem direito de escolher se ele joga no sentido horizontal (retirando as peças que estão situadas na linha horizontal em que se encontra a estrela), ou na vertical (retirando as peças situadas na mesma coluna em que se encontra a estrela). Feita esta escolha, cada jogador poderá jogar apenas em um dos sentidos, isto é, nas linhas horizontais ou nas colunas verticais, o que deve ser previamente estabelecido pois isto não pode mudar até o final do jogo.

Em sua vez, um jogador pode retirar qualquer peça que estiver na mesma linha (se ele jogar na horizontal) ou coluna (se jogar na vertical) em que se localiza a estrela. A estrela é uma peça móvel que ambos os jogadores movimentam e colocam, a cada vez, no lugar da peça que retiram. Com as retiradas alternadas dos dois jogadores, o tabuleiro vai ficando cada vez mais vazio.

O jogo termina quando:

- ou são retiradas todas as peças do tabuleiro
- ou quando um jogador retira a última peça de uma fileira (horizontal ou vertical) em que se encontra a estrela.

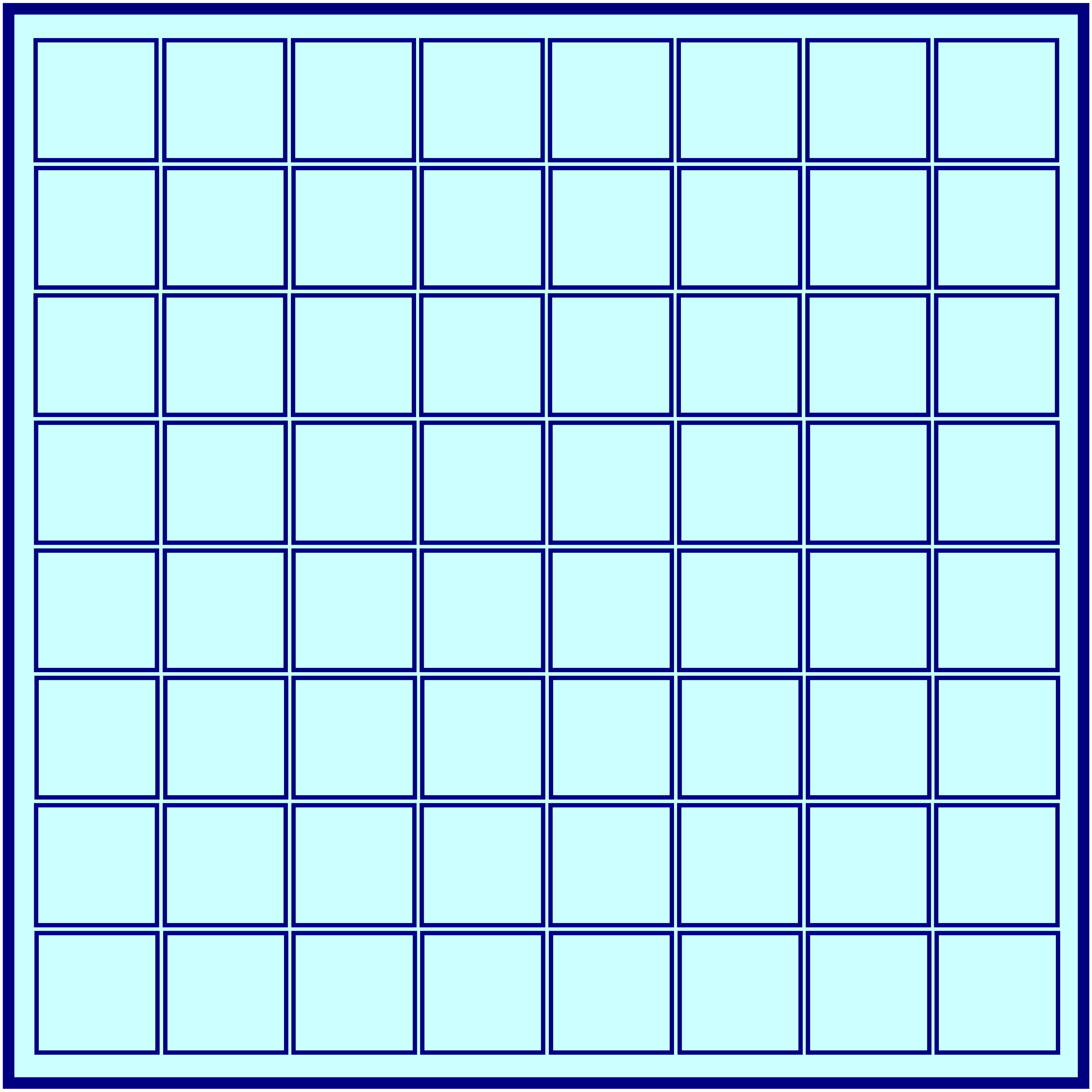
O vencedor será aquele que tiver feito o maior número de pontos com suas fichas retiradas, depois de somados todos os pontos positivos e deles subtraídos os pontos negativos.

Apresentamos a seguir todos os componentes do jogo; são 64 peças: 1 com o número 15, duas com o número -10, os números - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 7, 8, 10 aparecem cada um deles em três fichas diferentes, os números 1, 2, 3, 4, 5, 0 aparecem, cada um deles em cinco fichas diferentes, seis fichas têm o número 6 escrito nela e finalmente uma ficha tem o desenho da estrela.

PEÇAS DO MATIX COM INTEIROS

15	-10	-10	-1	-1	-1	-2	-2
-2	-3	-3	-3	-4	-4	-4	-5
-5	-5	7	7	7	8	8	8
10	10	10	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	3	3	3
3	3	4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	0	0	0	0
0	6	6	6	6	6	6	

TABULEIRO DO MATIX COM INTEIROS



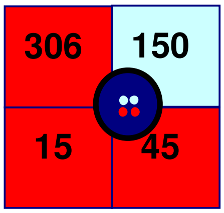
4.4.6 INTEIROS COM SEUS BOTÕES

Este jogo serve para desenvolver as habilidades operatórias com números inteiros não muito pequenos e o conceito de valor absoluto de um número inteiro.

Trata-se de um jogo para dois participantes, formado por um tabuleiro e seis botões.

As casas vermelhas do tabuleiro representam pontos perdidos, enquanto que as azuis representam pontos ganhos. Sorteia-se que vai começar o jogo. Cada jogador deverá, na sua vez, jogar os seis botões aleatoriamente dentro da caixa com o tabuleiro. O aluno deve então observar em quais casinhas cairam os botões que ele lançou naquela jogada e registrar os pontos obtidos, informando a seu oponente qual foi o resultado, se foram pontos perdidos ou ganhos. Se um botão cair na fronteira de duas ou mais casas, valerá o número da casa com maior valor absoluto.

Por exemplo, na situação descrita na figura:



O número que valerá é vermelho 306, ou seja -306, pois este número tem maior valor absoluto que os três demais (150, 15 e 45). O número registrado deve ser -306.

Cada aluno deverá realizar pelo menos 5 jogadas e vence tem obtiver mais pontos ganhos.

O tabuleiro do jogo tem o formato de uma caixa sem tampa, como o apresentado na figura a seguir:

202	123	91	306	102	7	68	95
125	213	150	10	47	112	42	39
37	123	157	260	80	77	95	39
131	303	315	100	7	125	202	195
472	306	150	79	222	62	373	49
2	15	45	251	139	17	58	09
195	62	135	79	166	179	268	119
150	472	157	93	1	77	278	200

4.4.7 COMO FAZER UM DOMINÓ PARA CADA CONTEÚDO DE MATEMÁTICA

Vamos apresentar uma metodologia que permite construir vários dominós para conteúdos específicos de Matemática. Mesmo dentro de um determinado conteúdo é possível fazer dominós com dificuldades variadas, adequadas ao conhecimento prévio do aluno, individualizando a aprendizagem.

O procedimento todo é feito em três etapas:

1) Preenchimento de uma tabela com resultados e operações que você quer que os alunos saibam.

2) Transferência dos dados da tabela para um rascunho onde estão desenhadas as 28 peças do dominó.

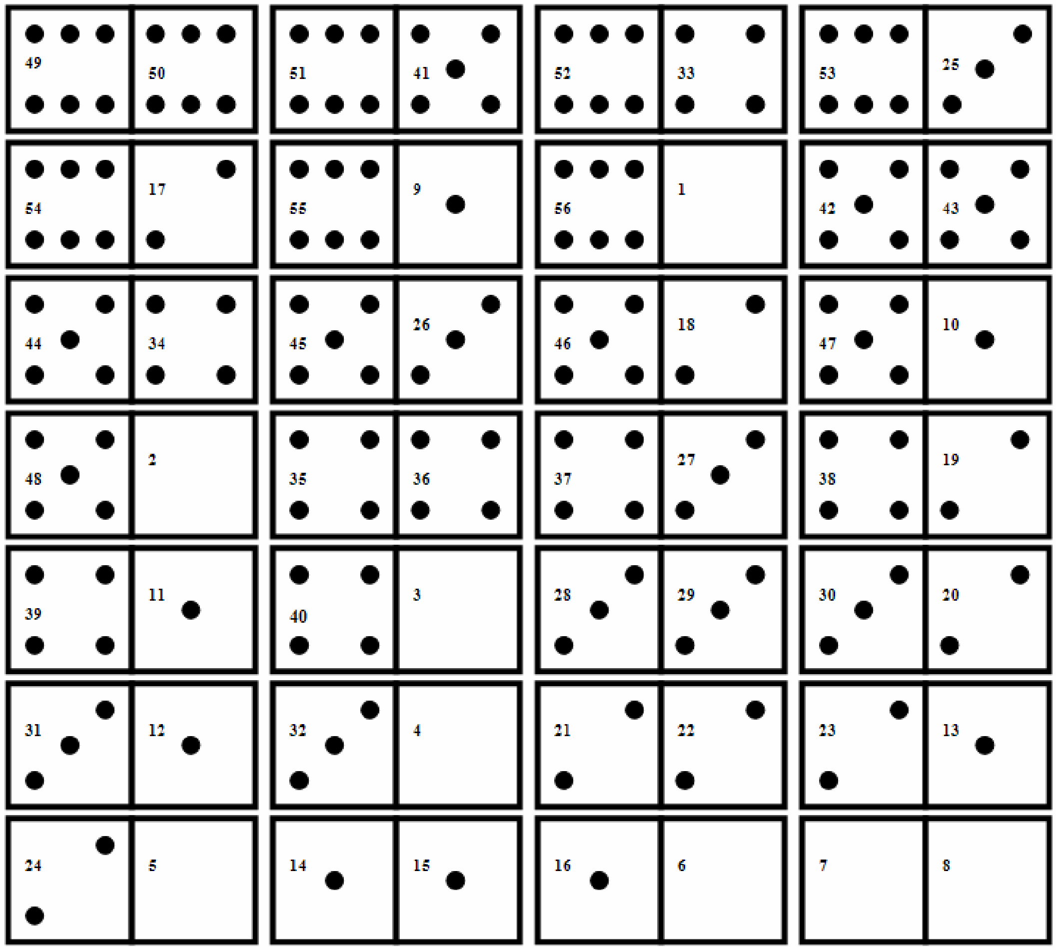
3) Transferência definitiva do rascunho para o dominó (sem as bolinhas) pronto para o jogo.

Inicialmente preencha **a coluna marcada com a seta** da tabela abaixo com resultados das operações que você quer que os alunos saibam.

Nenhuma bolinha	1	2	3	4	5	6	7	8
Uma bolinha	9	10	11	12	13	14	15	16
Duas bolinhas	17	18	19	20	21	22	23	24
Três bolinhas	25	26	27	28	29	30	31	32
Quatro bolinhas	33	34	35	36	37	38	39	40
Cinco bolinha	41	42	43	44	45	46	47	48
Seis bolinhas	49	50	51	52	53	54	55	56

Agora preencha as **linhas** com várias expressões que dêem o resultado que você marcou na primeira coluna. Assim, os resultados em cada célula de uma mesma linha **deverão ser sempre iguais**.

A seguir, escreva em cada peça do dominó os resultados da tabela que você preencheu, seguindo a ordem numérica que aparece na tabela.



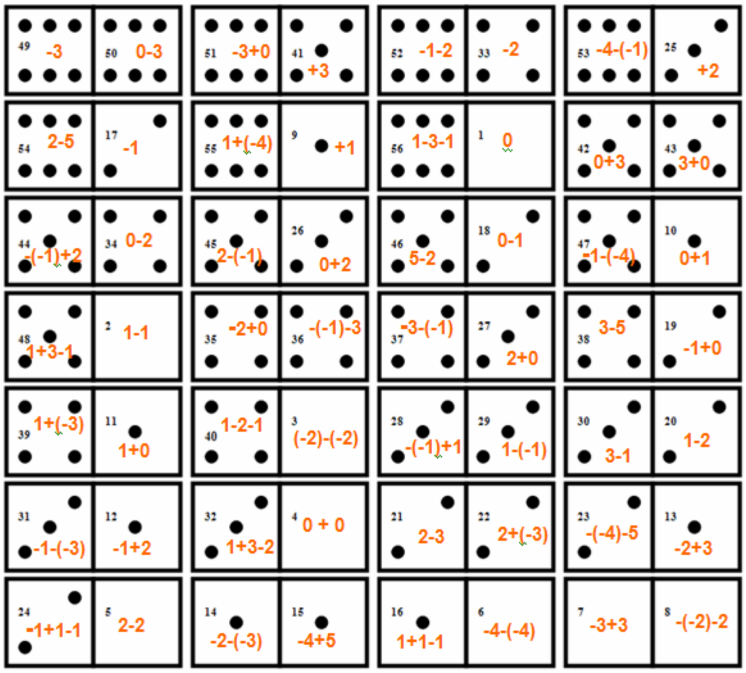
Copie os resultados numa folha com os desenhos das peças, mas **sem as bolinhas** e sem as marcações com números pequenos. A figura do dominó anterior é usada apenas um rascunho para evitar confusão na hora de transferir os dados da tabela para as peças.

Como um exemplo, vamos elaborar um dominó com as operações de adição e subtração de números inteiros. Escolhemos os números 0, 1, 2, 3, -1, -2 e -3, mas poderiam ser outros.

1) Primeiro preenchemos a tabela:

Colocamos primeiro esses números.

Nenhuma bolinha	1 **0**	2 **1-1**	3 **(-2)-(-2)**	4 **0+0**	5 **2-2**	6 **-4-(-4)**	7 **-3+3**	8 **-(-2)-2**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: 0.**
Uma bolinha	9 **+1**	10 **0+1**	11 **1+0**	12 **-1+2**	13 **-2+3**	14 **-2-(-3)**	15 **-4+5**	16 **1+1-1**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: +1.**
Duas bolinhas	17 **-1**	18 **0-1**	19 **-1+0**	20 **1-2**	21 **2-3**	22 **2+(-3)**	23 **-(-4)-5**	24 **-1+1-1**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: -1.**
Três bolinhas	25 **+2**	26 **0+2**	27 **2+0**	28 **-(-1)+1**	29 **1-(-1)**	30 **3-1**	31 **-1-(-3)**	32 **1+3-2**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: +2.**
Quatro bolinhas	33 **-2**	34 **0-2**	35 **-2+0**	36 **-(-1)-3**	37 **-3-(-1)**	38 **3-5**	39 **1+(-3)**	40 **1-2-1**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: -2.**
Cinco bolinha	41 **+3**	42 **0+3**	43 **3+0**	44 **-(-1)+2**	45 **2-(-1)**	46 **5-2**	47 **-1-(-4)**	48 **1+3-1**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: +3.**
Seis bolinhas	49 **-3**	50 **0-3**	51 **-3+0**	52 **-1-2**	53 **-4-(-1)**	54 **2-5**	55 **1+(-4)**	56 **1-3-1**	**Todas essas operações dão o mesmo valor: -3.**



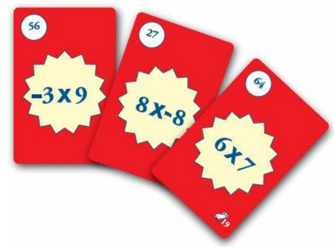
2) Transferimos os dados da tabela anterior para este rascunho.

3) Finalmente passamos a limpo e o dominó está pronto!

-3	0-3	-3+0	+3	-1-2	-2	-4-(-1)	+2
2-5	-1	1+(-4)	+1	1-3-1	0	0+3	3+0
-(-1)+2	0-2	2-(-1)	0+2	5-2	0-1	-1-(-4)	0+1
1+3-1	1-1	-2+0	-(-1)-3	-3-(-1)	2+0	3-5	-1+0
1+(-3)	1+0	1-2-1	(-2)-(-2)	-(-1)+1	1-(-1)	3-1	1-2
-1-(-3)	-1+2	1+3-2	0 + 0	2-3	2+(-3)	-(-4)-5	-2+3
-1+1-1	2-2	-2-(-3)	-4+5	1+1-1	-4-(-4)	-3+3	-(-2)-2

5. MULTIPLICAÇÃO DE INTEIROS CONCEITOS E ATIVIDADES

UM OBSTÁCULO HISTÓRICO E DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO DE INTEIROS: A REGRA DOS SINAIS.



Neste capítulo vamos continuar o estudo de operações com números inteiros, agora trabalhando com a multiplicação. Em geral, este conteúdo traz dificuldade ao aluno, que acaba tentando aprender apenas "as regras dos sinais", sem ter vivenciado atividades ou tentado resolver problemas que o auxilie na tarefa de dominar os conceitos que estão por trás das regras. O desenvolvimento de tópicos segue o modelo dos outros capítulos, introduzindo os conceitos ilustrados por exemplos e situações/problemas e apresentando algumas atividades lúdicas ligadas aos conceitos estudados. As falhas de aprendizagem, neste tópico, devem ser detectadas inicialmente com os exercícios do Capítulo 1. A operação de divisão não é fechada nos inteiros, mas pode ser realizada se admitirmos restos, o que será feito no Capítulo 7; ela segue a ideia natural como operação inversa da multiplicação, e será trabalhada acompanhada de problemas que enfatizem este caráter, mantendo as atividades sempre no contexto dos números inteiros.

5.1 A operação de multiplicação de números inteiros

Vamos estudar quatro situações de multiplicação de inteiros:

- a multiplicação entre dois inteiros positivos,

- entre um número positivo e um negativo,
- entre um número negativo e um positivo e, por último,
- entre dois números negativos.

A multiplicação de dois números inteiros ***a*** e ***b*** é denotada por ***a*** × ***b***, sendo ***a*** e ***b*** chamados de ***fatores*** e o resultado chamado de ***produto de a por b***. A notação ***a.b*** também aparece em livros e textos. Existem calculadoras científicas e *softwares* em que a notação * pode ser usada para designar a operação de multiplicação.

5.1.1: Multiplicação de dois fatores positivos

Um número inteiro positivo pode ser identificado como um número natural, e por isso, multiplicar dois números positivos é a mesma situação da multiplicação de dois números naturais.

As ideias básicas a serem trabalhadas, para fixar o conceito de multiplicação de dois números inteiros positivos, são as seguintes: *agrupamento por adição de parcelas iguais, número de elementos em arranjos geométricos retangulares e problemas de decisão nos processos de contagem da Análise Combinatória*.

Vejamos algumas atividades simples que resgatam estes conceitos:

Exemplo: A multiplicação de 3 por 2, denotada por 3×2, deve ser compreendida como o agrupamento formado por 3 grupos de 2 unidades, isto é: “ 3×2 significa uma adição de três parcelas iguais a 2”.

De forma visual:

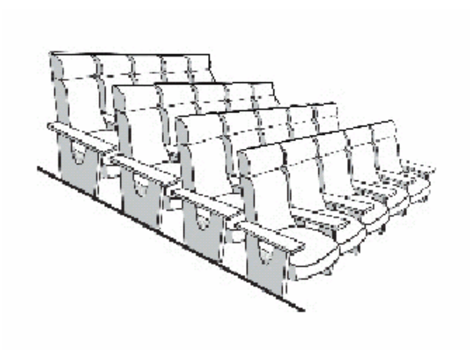
interpretamos: $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$. E vale observar uma nuance da propriedade comutativa: embora $2 \times 3 = 3 \times 2$, a visualização é ligeiramente diferente:

Exemplo: Quantos lápis existem dentro de uma gaveta com cinco caixas de doze lápis cada?

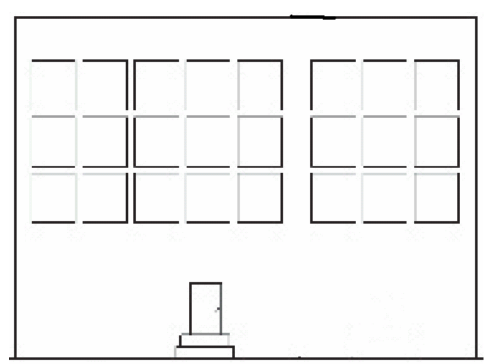
Reconhecendo o conceito de agrupamento; se são 5 caixas e cada uma delas contém 12 lápis, temos uma adição com 5 parcelas iguais a 12: $12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 5 \times 12 = 60$ lápis.

Portanto há 60 lápis na gaveta.

Vejamos dois exemplos da utilização da multiplicação para calcular a quantidade de elementos de um arranjo retangular:



Exemplo: Quantas poltronas há na sala de cinema da figura?

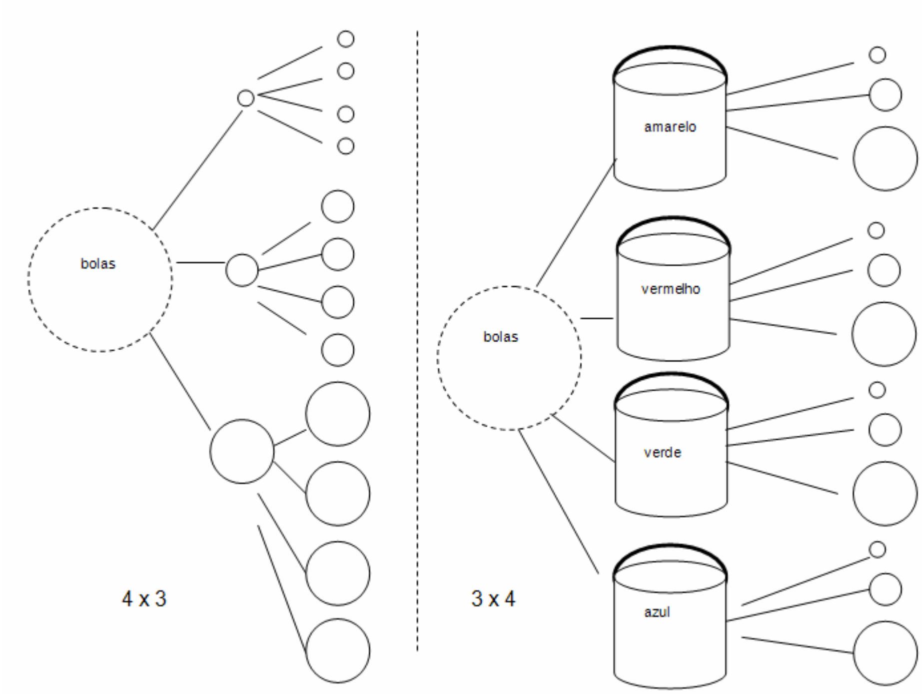


Exemplo: Quantos vidros há nas janelas do prédio?

A multiplicação aparece também no Princípio Multiplicativo da Contagem, no qual se baseia toda a Análise Combinatória:

Exemplo: Uma indústria de brinquedos fabrica bolas de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande; e de 4 cores: amarelo, vermelho, verde e azul. Quantas bolas diferentes a fábrica produz?

Cores / Tamanhos	amarela	vermelha	verde	azul



5.1.2: Multiplicação de um fator positivo por outro negativo

Neste caso, não podemos de imediato recorrer a uma adição simples com fatores iguais. Vamos motivar o estudo analisando uma situação típica, lembrando a representação de um número inteiro com sinal (Capítulo 2):

Exemplo: João comprou um aparelho de som, e o pagamento foi dividido em 4 parcelas iguais de R$ 100,00. Como posso representar a dívida do João? E qual é essa dívida?

Reconhecemos uma situação de agrupamento, em que cada parcela possui um significado que permite seu registro como um número negativo, da seguinte maneira:

A dívida total é **4 × (-100),** que podemos "ler" como: "4 parcelas de (-100)", em que o sinal "-" representa a qualidade do número "100" ser negativo (dívida);

Portanto, a dívida é dada por:

4 × (-100) = (-100) + (-100) +(-100) + (-100) = - 400.

A resposta é: "A dívida total do João é R$ 400,00 (que é o preço do aparelho de som)".

Da mesma maneira, sempre que encontrarmos multiplicações do tipo: **5 × (-20)**, ela significa uma soma de 5 parcelas de - 20.

Portanto, a multiplicação de um número positivo ***a*** por um número negativo ***-b*** pode ser interpretada usando ainda a *idéia básica de agrupamento*, desta vez como um agrupamento de parcelas de números inteiros negativos.

Observamos assim que situações do cotidiano justificam definir o produto de um número positivo ***a*** por qualquer outro número inteiro ***b*** como sendo ***– (a.b)***, seja ***b*** positivo, negativo ou nulo.

Entretanto este tipo de contextualização não ocorre se o primeiro dos fatores da multiplicação for negativo. Isto provocou, historicamente, uma grande dificuldade em se aceitar a existência dos números negativos e até hoje, esta ausência de uma correspondência direta com a realidade provoca grande dificuldade para a compreensão dos números negativos. O que fazer então?

5.1.3: Multiplicação de um fator negativo por outro positivo

A leitura do significado para multiplicações do tipo ***(-a***) × ***b*** precisa de uma análise diferente do caso anterior, pois sendo o primeiro fator um número inteiro negativo, *não se aplica diretamente a idéia básica de agrupamento*.

Existem, entretanto, opções que permitem tornar natural a multiplicação com a primeira parcela negativa. Estas alternativas são baseadas no fato de que os inteiros devem herdar dos números naturais algumas de suas propriedades e também em atividades empíricas concretas que deixam natural ao aluno as “regras dos sinais”.

É claro que no caso em que ***b*** é positivo, se usarmos primeiramente a comutativa no produto ***(-a)*** × ***b***, recairemos no caso anterior já apresentado. Mas como usar a comutativa em algo que ainda não foi definido? Ora, os inteiros generalizam o conjunto dos números naturais e assim, uma alternativa é DEFINIR ***(-a)*** × ***b*** como sendo ***b*** × ***(-a)***, sendo ***a*** e ***b*** números naturais.

Isto resolve o problema neste caso, mas de algum modo não justifica ou não dá significado à operação de multiplicação com o primeiro fator negativo, pois uma definição traz em si, de certo modo, uma imposição; além disso o argumento de usar a comutatividade não servirá para tratar o caso ainda não estudado ***(-a)*** × ***(-b)***, ***a*** e ***b*** números naturais. O que fazer então?

Uma segunda opção é utilizar a propriedade distributiva, também herdada dos naturais. Analisemos um exemplo com números; como

$$\mathbf{1 \cdot 3 = (-4+5) \cdot 3 = (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 3 = (-4) \cdot 3 + 15},$$

devemos ter: **3 = (- 4) . 3 + 15** e, subtraindo **3** de ambos os membros,

$$\mathbf{0 = (-4) \cdot 3 + 12}$$

em outras palavras, a igualdade faz sentido quando **(- 4) . 3** é o *oposto* de **12**, isto é, quando **(- 4) . 3** for igual a **- 12**. Ou seja, se quisermos que a propriedade distributiva seja válida também para números inteiros, somos levados a aceitar que **(- 4) . 3 = - 12**.

Deste modo, lançamos mão do significado atribuído ao sinal "**-**" nos números inteiros, quando ***- a*** significa o oposto de ***a*** (e na reta numérica orientada, equivale a inverter o sentido na orientação da representação geométrica). Assim, como mais um exemplo, a operação:

$$\mathbf{(-50) \times 5}$$

pode ser interpretada como: "o *oposto* de **(50)** × **5**", ou seja, o sinal "**-**", que inverte a qualidade do primeiro fator, permite inverter a qualidade do resultado da multiplicação que é efetuada segundo a ideia básica de agrupamento.

Estamos propondo a leitura:

(- 50) × **5** = oposto de **[50** × **5]** = **-[50 + 50 + 50 + 50 +50]** = **- 250**

Da mesma maneira,

(- 25) × **4** = **- [25** × **4]** = **- [25 + 25 + 25 + 25]** = **- (100)** = **- 100**.

Em termos práticos, quando o primeiro fator é negativo, efetuamos a operação de multiplicação como se ele não existisse; no final ele retorna para indicar que o resultado correto é o oposto do anteriormente obtido.

O sinal "**-**" que aparece no primeiro fator do produto pode também significar a "retirada" de certos agrupamentos, como veremos na próxima seção quando trabalharmos a multiplicação com as fichas positivas e negativas. Esta atividade com material concreto se aproxima melhor do universo de um aluno do 6º. ou 7º. anos e por isto é pedagogicamente mais indicada para introduzir as regras de sinais que as discussões teóricas que fizemos até agora.

Perceba que em nenhum momento estamos impondo regras de sinais, o propósito é que o aluno aprenda a expandir uma ideia básica, recuperando ideias anteriormente consolidadas, e se libertem da necessidade de apenas memorizar regras.

Observe que estamos preocupados aqui em contextualizar a multiplicação de números inteiros. Quando falamos em contextualização em Matemática não podemos nos referir somente à contextualização de conceitos matemáticos em relação a atividades cotidianas ou vinculá-los a outras áreas do conhecimento; há uma outra importante forma de contextualização: **a contextualização interna, em relação à própria matemática**. Na educação básica em especial, é fundamental trabalhar os conceitos matemáticos no contexto da própria disciplina, oferecendo aos alunos uma visão de como estes se situam em relação a outras ideias e se integram com diferentes áreas. Desta forma, os alunos podem formar uma visão da Matemática como um corpo organizado de conhecimento, em que as ideias se relacionam e dependem umas das outras, e não como a justaposição de partes estanques. Em muitos casos, porém, conceitos, algoritmos e fórmulas são abordados de forma isolada, sem conexão entres os diversos campos da Matemática. Talvez seja esta a causa das grandes dificuldades que os alunos têm na aprendizagem dos números inteiros.

Em suma, podemos perceber que a atividade acima permite fazer uma leitura comparativa entre o caso $a \times (-b)$ e $(-a) \times b$, como segue: o primeiro caso é um agrupamento de números opostos de ***b,*** com ***a*** parcelas. O segundo caso é o oposto de um agrupamento de números ***b***, com ***a*** parcelas. O resultado final coincide em ambas operações.

O **Jogo de Robô** é uma excelente estratégia para perceber a equivalência destas leituras, trabalhando com naturezas distintas dos números ***a*** ou ***b***, positiva ou negativa.

Execute a Atividade do Robô correspondente à situação: $3 \times (-2)$ e $(-3) \times 2$ (o oposto de 3×2). Leve os alunos a discutir a leitura dos significados destas operações nos movimentos dos robôs.

5.1.4: Multiplicação de dois fatores negativos

Com a discussão dos casos acima, a interpretação da operação ***(-a)*** $\times$ ***(-b)*** de dois fatores negativos se processa de maneira natural:

Por exemplo, consideremos a operação (-3) $\times$ (- 4).

O sinal negativo do primeiro fator (-3) significa que o resultado da multiplicação é "o oposto de [3 $\times$ (-4)]", em que [3 $\times$ (-4)] possui a ideia de agrupamento de 3 parcelas iguais a (-4). Logo:

(-3) $\times$ (- 4) = - [3 $\times$ (-4)] = -[(- 4) + (- 4) + (- 4)] = - (-12)

= oposto de (-12) = +12,

um número positivo.

Portanto, o produto de dois números negativos é sempre positivo, e é igual ao produto dos valores absolutos dos números.

Observamos agora que, considerando a operação (- 4) $\times$ (- 3), temos a leitura "oposto de [4 $\times$ (- 3)]", que significa agrupamento de 4 parcelas iguais a (-3). Logo:

(- 4) $\times$ (- 3) = -[4 $\times$ (- 3)] = -[(- 3) + (- 3) + (- 3) + (- 3)] = - (-12) = + 12,

que é igual ao resultado obtido com a ordem inversa dos fatores na multiplicação.Esse exemplo mostra um caso particular da propriedade comutativa que a multiplicação de inteiros herda dos números naturais.

Para fixar o entendimento da regra dos sinais na multiplicação:

O primeiro sinal " ⁻ " inverte a qualidade (sinal) do resultado da operação efetuada com o valor absoluto do primeiro fator:

(**-a**) **× b = - [a × b]**,

qualquer que seja o número inteiro **b**, seja ele positivo, negativo ou nulo.

Vejamos mais alguns exemplos para fixar o conceito:

a) $- 6 \times (- 10) = - [6 \times (-10)] =$
$= - [(-10) + (-10) + (-10) + (-10) + (-10) + (-10)] = - (- 60) = +60.$

b) $-75 \times (- 4) = - [75 \times (- 4)] = - (- 300) = +300$

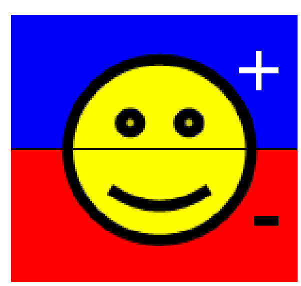
Algumas vezes se indica a multiplicação sem o sinal “×” ou “ · ”. Os fatores são colocados juntos, sem sinal algum entre eles. Por exemplo: $(-75)\ (-4) = 300$ ou $5(-4) = - 20$.

A seguir, veremos uma alternativa para introduzir corretamente as regras de sinais em todas as situações possíveis, utilizando-se as fichas positivas e negativas já utilizadas nas operações de adição e multiplicação. Salientamos mais uma vez a importância pedagógica da Atividade com Fichas Positivas e Negativas; os alunos que trabalham com ela passam a compreender perfeitamente as regras de sinais da multiplicação, pois dão significado a elas.

5.2 Atividades que dão significado à multiplicação de inteiros

5.2.1: Atividades com fichas positivas e negativas para a multiplicação:

O objetivo é fazer com que o aluno elabore e compreenda as regras da operação de multiplicação com números inteiros, através da manipulação adequada das fichas positivas e negativas já empregadas no estudo das operações de adição e subtração de inteiros.



Sugere-se o uso de fichas azuis para a representação dos números positivos e o uso de fichas vermelhas para a representação dos números negativos. Empregam-se aproximadamente 30 fichas de cada cor.

Inicialmente o professor deverá combinar com os alunos que uma ficha azul anula uma ficha vermelha e vice – versa. (Isto é natural para o aluno, desde que ele já tenha trabalhado com as atividades apresentadas no Capítulo 4).

Recorde que para "escrever" um zero com as fichas pode–se colocar uma ficha de cada cor, ou duas fichas de cada cor, ou três de cada cor, e assim por diante. Observe que colocando-se números iguais de fichas azuis e vermelhas, as fichas de cores diferentes se anulam duas a duas, pois tomando-se pares de 1ficha azul e 1 ficha vermelha, representamos o número zero.

Para escrever números positivos tais como 3, colocamos 3 fichas azuis, ou 6 fichas azuis e três vermelhas, por exemplo.

Para números negativos tais como -7, colocamos 7 fichas vermelhas ou 10 vermelhas e 3 azuis, por exemplo.

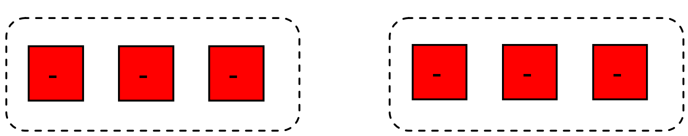
Esta atividade depende das seguintes ações: **formar e retirar grupos** de fichas de acordo com a operação que se deseja realizar.

Lembre-se que multiplicar é adicionar parcelas iguais. Então 2 x 3 é o mesmo que formar dois grupos de três unidades em cada um deles.

1º Caso: Formar grupos: Isto deve ser realizado quando o **primeiro fator é positivo**.

Exemplo: Execute com as fichas a operação: (+2) x (–3).

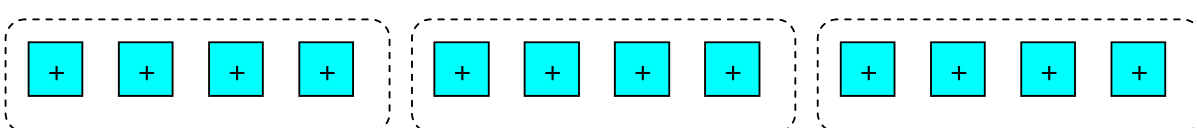
Queremos fazer 2 grupos com três fichas vermelhas cada um:



Ficamos ao todo com 6 fichas vermelhas, então (+2) x (–3) = –6

Faça agora (+3) x (+4)

Queremos fazer 3 grupos com 4 fichas azuis cada um:



Ficamos ao todo com 12 fichas azuis, então (+3) x (+4) = +12

2º Caso: Retirar grupos: Isto acontece quando o **primeiro fator é negativo.**

Lembre-se que nesta atividade só podemos retirar algo do que já temos.

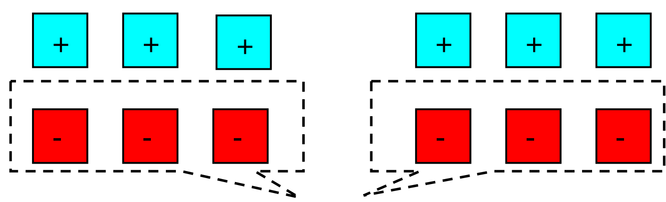
Teremos situações em que precisaremos retirar algo que ainda não temos, então precisaremos criar zeros, tantos quantos forem necessários.

Por exemplo:

Faça (–2) x (–3)

Inicialmente a mesa onde as fichas serão colocadas está vazia. Queremos retirar 2 grupos, sendo que cada grupo deve conter 3 fichas vermelhas.

Vamos criar “zeros”...



Estes são os dois grupos a serem retirados.

Observe que ao colocar 6 pares de fichas de cores diferentes temos somente zeros! Só que agora conseguimos tirar dois grupos, sendo que cada grupo tem três fichas vermelhas. Retirando-os, ficaremos com seis fichas azuis, ou seja, como resposta temos (+6), que é o que restou na mesa.

Então (–2) x (–3) = + 6.

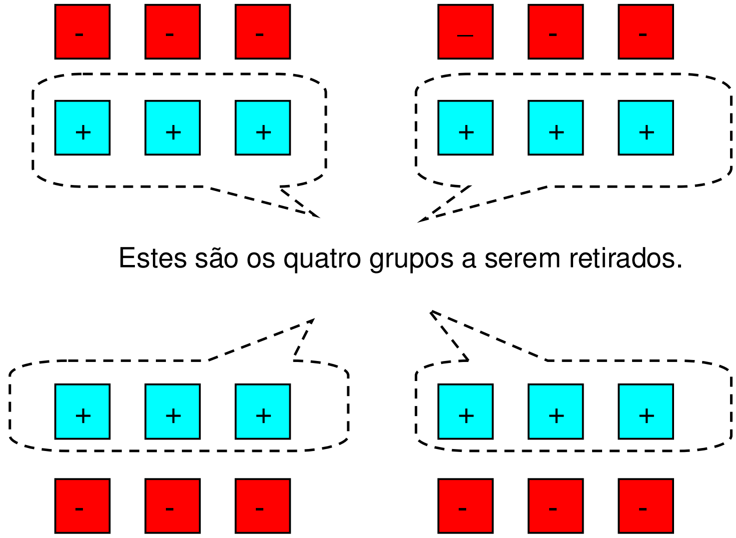
Isto explica de uma maneira simples a regra dos sinais:

(+ vezes + dá +, + vezes – dá –, – vezes – dá +).

Façamos agora a operação (–4) x (+3).

Queremos retirar 4 grupos, sendo que cada grupo tem 3 fichas azuis, pois o primeiro sinal que aparece é negativo.

Vamos criar “zeros”...

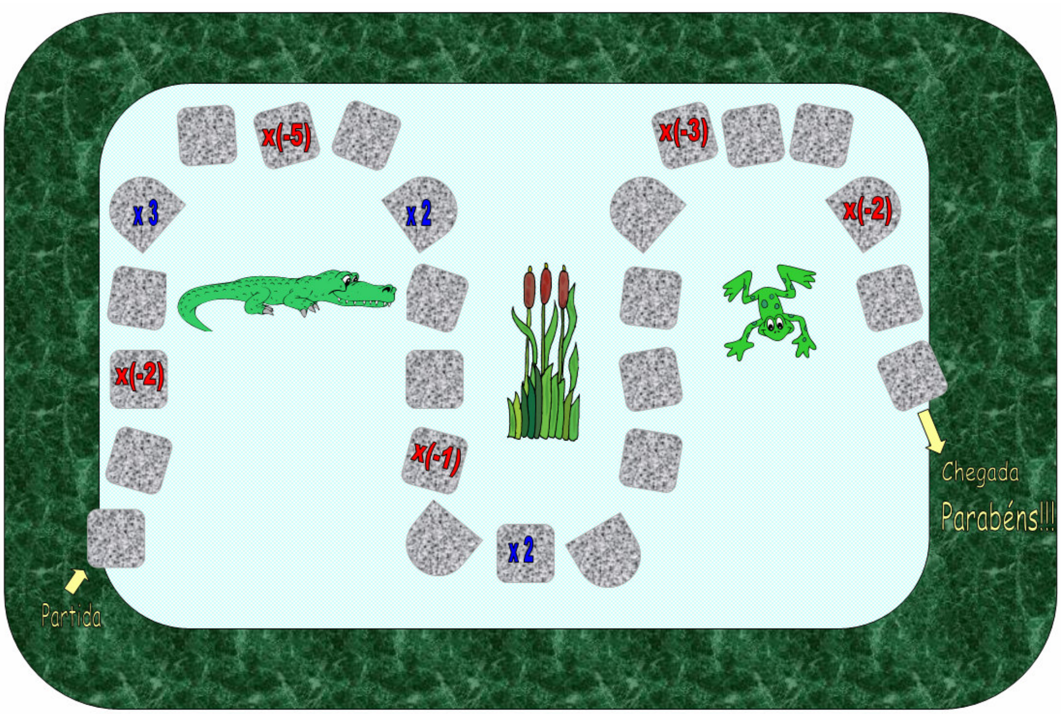


Observe que temos somente zeros! Só que agora conseguimos tirar os quatro grupos, sendo que cada grupo tem três fichas azuis. Retirando-os, ficaremos com doze fichas vermelhas, ou seja, como resposta temos (–12). Então (–4) x (+3) = –12.

Deste modo, as regras de sinais aparecem em um contexto simples e muito rico para se explorar as questões de aprendizagem.

5.2.2: Jogo da Trilha das Pedras do Números Inteiros:

A finalidade deste jogo é consolidar o conceito da operação de multiplicação dos números inteiros e podem participar 2 ou 3 alunos. O jogo consiste de um peão para cada jogador, um dado comum e um tabuleiro ilustrado na figura seguinte.



Inicialmente o professor deverá dividir a sala em equipes de dois ou três alunos. Depois, cada equipe deverá sortear quem começará a caminhada pela trilha e estabelecer qual dos peões representará cada um deles durante a partida. Os alunos devem combinar que cada um deles começará com 30 pontos, os quais deverão ser usados pelos mesmos, quando estes julgarem necessário. O primeiro jogador lança o dado e anda o número no lançamento do mesmo. Observe que temos três possibilidades:

1. Se o peão cair em uma casa sem marcação, ele permanece aí até sua próxima vez de jogar.

2. Se o peão cair em alguma casa com uma multiplicação por um número negativo, então este deverá voltar o número de casas que será determinado pelo resultado da multiplicação indicada na casinha em que o peão se encontra, pelo número indicado no lançamento do dado.

Por exemplo: Se um jogador, ao iniciar o jogo, lançasse o dado e obtivesse o número 3 como resultado do lançamento do mesmo, então deveria andar desde o ponto de partida, três casinhas, situando-se, portanto na casa, com a indicação x (-2). O jogador deve então realizar a operação 3 x (-2) = (-6), ou seja, deveria deste modo retornar 6 casas (por causa do sinal negativo). Observamos que nesse caso, não temos o número de casas suficiente para voltarmos. Então surge uma dúvida...O que fazer neste caso? Devemos descontar dos pontos iniciais que temos (Lembre-se dos nossos 30 pontos). Logo, no nosso exemplo, como o jogador só é capaz de voltar 3 casinhas no tabuleiro, ele perde 3 dos 30 pontos que ele começou a partida, ficando então com 27 pontos.

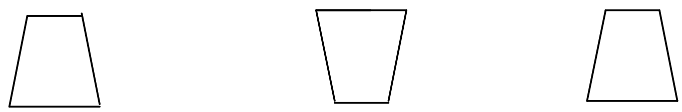
3. Se o peão cair em alguma casa com uma multiplicação por um número positivo, então este deverá avançar o número de casas que será determinado pelo resultado da multiplicação indicada na casinha em que o peão se encontra, pelo número indicado no lançamento do dado.

Por exemplo: Suponha que um jogador tenha lançado o dado e tenha obtido o resultado 2 do lançamento do mesmo e que tenha caído na casinha representado por x (2). Então teremos que o peão deverá avançar 4 casas, pois 2 x (2) = 4. Observe que o jogador pode também optar em não caminhar todas as 4 casinhas, caminhando apenas 1 casinha, ou somente 2 ou 3, como queira, contanto que queira somar ao seu total de pontos, respectivamente 3, 2 ou 1 ponto. O jogador tem a total liberdade de optar por escolher entre caminhar quantas casas queira ou quantos pontos quiser somar. Ele deve escolher qual será o melhor benefício para si próprio.

Vence o jogo quem obtiver MAIOR número de pontos e não quem atingir a chegada primeiro!

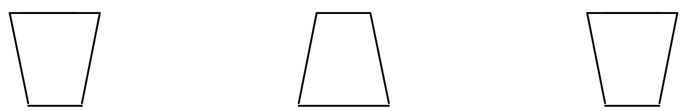
5.2.3: Jogo com copinhos de café

Coloque três pequenos copos de café de acordo com a configuração abaixo:



Virando simultaneamente dois desses copos, a pessoa deve deixá-los todos com a boca virada para cima. A solução é muito simples, basta virar o primeiro e o último dos copos. Peça à pessoa que dê uma segunda solução. Observe que isto pode ser feito virando-se ao mesmo tempo, por exemplo, o primeiro e o segundo copos e, a seguir, o segundo juntamente com o terceiro.

Coloque agora os três copos na seguinte disposição:

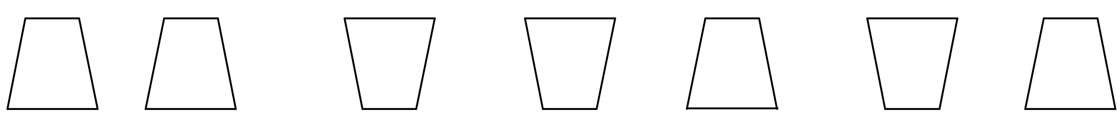


Mais uma vez, virando-se simultaneamente dois copos a cada vez, solicite que a pessoa coloque todos os copos emborcados para cima. Depois de algumas tentativas, a tarefa vai se revelar impossível. Como sabemos disto? Associe ao copo com a boca para cima o número +1 e ao copo virado para baixo o valor –1. Da primeira vez que colocamos o desafio os copinhos tinham a configuração -1, + 1 e -1. Queremos que os três copos fiquem virados para cima, isto é, obter a configuração +1, +1 e +1. Como devemos virar dois copos simultaneamente, isto é perfeitamente possível. Observe o que ocorre, na primeira situação, com o produto dos três números, antes e depois da virada:

$$(-1) . (+1) . (-1) = (+1) . (+1) . (+1) = 1$$

Agora, quando propomos pela segunda vez o desafio, a configuração inicial era +1, -1 e +1. O produto desses três números é -1. Este produto não se altera quando viramos simultaneamente dois dos copos. Se ambos forem de mesmo sinal o produto dos dois que já era +1 continuará sendo +1 e se forem de sinais diferentes (-1 e + 1 ou + 1 e -1), seu produto que inicialmente é -1, continuará sendo -1. Assim, o segundo desafio é impossível.

Tente solucionar um problema parecido com mais copinhos. Por exemplo, veja a figura abaixo, virando-se a cada vez dois copos, podemos colocar todos eles com a boca para cima?



5.4 Propriedades da Multiplicação

Quando temos vários fatores inteiros para multiplicar, podemos utilizar o conceito de multiplicação para cada par de fatores, pois a ideia básica de agrupamento permite lançar mão da propriedade associativa da adição de números inteiros, que justifica o procedimento.

É a **Propriedade Associativa da Multiplicação**: **(a . b) . c = a . (b . c)**, para **a, b, c** $\in \mathbb{Z}$.

Exemplo:

(-4).(- 8).(10) =

[(- 4).(- 8)].(10) =

= [32]. (10) = 320

Resolvemos primeiro a multiplicação de [(- 4) × (-8)], depois multiplicamos o resultado por 10.

A Multiplicação de um número inteiro por **1** resulta sempre no próprio número. Dizemos que **1** é o da **Elemento Neutro Multiplicação**.

Exemplo:

1 × 28 = 28; 1 × (-584) = -584; 37 × 1 = 37; (-3) × 1 = -3.

A **Propriedade Comutativa** afirma que **a . b = b . a**, para todos os inteiros **a** e **b**. Ela já apareceu na seção 1 deste capítulo, quando aprendemos a multiplicar números com o primeiro fator negativo. Nos números naturais, esta propriedade é uma consequência da comutatividade da adição.

Outra propriedade que é válida na Multiplicação de Números Inteiros é a **Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à Adição**, justificada também pela ideia básica de agrupamento por somas, que embasa a multiplicação.

Exemplo:

$(-20) \times [11 + (-8)] = [(-20) \times 11] + [(-20) \times (-8)] = (-220) + (+160) = -60.$

Esta operação equivale, obviamente a $(-20) \times 3 = -60$.

É possível enunciar, com a participação de seus alunos, problemas em que "a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição" apresenta um significado contextualizado. Atividades como esta trazem maior significado às propriedades, não deixando que elas passem desapercebidas e sejam vistas apenas como regras formais que não têm utilidade prática.

Por exemplo, pense sobre o seguinte problema, como uma sugestão para o exercício da propriedade vista acima:

Problema: Suponha que há dois times disputando uma prova de adivinhações. Para cada resposta errada por alguém de uma equipe, é atribuído 3 pontos negativos, e para cada resposta certa é atribuído 5 pontos. Pergunta sem resposta não ganha ponto. Após duas rodadas de perguntas, o registro de respostas dos times está como segue:

Time A: 1^a rodada "8 erradas e 12 certas"; 2^a rodada "5 erradas e 9 certas".

Time B: 1^a rodada "7 erradas e 10 certas"; 2^a rodada "6 erradas e 11 certas".

Registre numericamente os pontos perdidos e ganhos de cada time, até o momento. Quem está ganhando a competição no momento? Procure explorar, a propriedade distributiva.

5.5 O Algoritmo da Multiplicação

A propriedade distributiva que acabamos de estudar é essencial para entender o **Algoritmo da Multiplicação**, que deve estar dominado desde o segundo ciclo do Ensino Fundamental para números naturais, e agora podemos estender para os Números Inteiros.

- **Usando decomposição**

Vamos efetuar 15×12, em que 15 pode ser decomposto como 10 + 5, e 12 como 10 + 2, então, $15 \times 12 = (10 + 5) \times (10 + 2) = (10\times 10) + (10 \times 2) + (5 \times 10) + (5 \times 2)$, que pode ser disposto em diagrama como:

$$\begin{array}{rcrl} 10 & + & 5 & \\ 10 & + & 2 & X \\ \hline 20 & + & 10 & \\ 100 & + & 50 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{120 \quad + \quad 60}_{180}} & \end{array}$$

A seguir, vamos relembrar um método de multiplicação de números naturais, muito comum nos livros didáticos de Ensino Fundamental. Trata-se de um algoritmo, cujo embasamento teórico vem da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição surgida da decomposição decimal de um número inteiro positivo.

- **Usando um algoritmo**

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{1} & \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{U} \\ & 1 & 5 \\ \mathbf{X} & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 0 \\ 1 & 5 & + \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \end{array}$$

Iniciamos multiplicando a unidade do número 12 pela unidade do número 15. Então temos 2×5 =10 unidades, e como 10 unidades equivalem a 1 dezena, somaremos 1 na casa das dezenas.

Agora multiplicamos a unidade de 12 com a dezena de 15. Fazemos $2 \times 1 = 2$ (dezenas), e em seguida $2 + 1 = 3$ (a parcela 1 refere-se à dezena da multiplicação anterior, que estava aguardando).

A multiplicação ainda não acabou, temos que multiplicar o número 15 pela dezena do 12. Como agora vamos usar o valor que está na dezena, começaremos colocando os produtos na coluna das dezenas. Veja como faremos: 1(da dezena do 12) $\times$ 5 = 5, e colocaremos o 5 na coluna das dezenas.

E o produto 1(dezena) $\times$ 1(da dezena do 15) = 10 $\times$ 10 = 100 = 1 (centena), será colocado à esquerda, que é a coluna das centenas. Agora basta somar os valores em cada coluna, que correspondem respectivamente à unidade, dezena e centena do resultado.

Exemplo: Quando tivermos uma multiplicação de inteiros, como (-376)·(12), primeiramente devemos determinar a qualidade (o sinal) do produto. Temos um fator negativo multiplicado com um fator positivo, e assim, temos um produto que é o *oposto* de (376)·(12), logo com a qualidade de ser "**negativo**".

Agora faremos o cálculo para os valores absolutos dos fatores: (376)·(12), usando o algoritmo da multiplicação

Lembre aos alunos a decomposição decimal dos números 376 e 12:

376 = 3·100 + 7·10 + 6, ou seja, são 3 centenas (**C**), 7 dezenas (**D**) e 6 unidades (**U**)

12 = 1·10 + 2, ou seja, 1 dezena e 2 unidades.

- **Usando o algoritmo:**

	1	**1**	
M	**C**	**D**	**U**
	3	7	6
	x	1	2
	7	5	2
3	7	6	+
4	5	1	2

Observe que durante a soma 5 + 6 na coluna das dezenas obtemos 11 dezenas, que é considerado então como 1 dezena e 1 centena.

Temos 376 $\times$ 12 = 4512, mas o exercício inicial é multiplicar (-376)·(12), em que já se discutiu a qualidade deste produto como sendo negativa. Assim:

$$(-376)\times(12) = -(376 \times 12) = -(4512) = -4512.$$

Faça os alunos treinarem cálculos com números inteiros, juntamente com problemas. A habilidade em efetuar operações com números, pequenos ou grandes, é muito importante ao lado da capacidade de resolver e formular problemas.

Somente permita que os alunos utilizem a calculadora nos exercícios de cálculo para verificarem a resposta, *nunca* para dar resposta antes de executar no papel. A calculadora pode ser utilizada também para exercitar variadas formas da propriedade associativa e distributiva, sempre para consolidar as ideias, não para substituí-las.

Quando as técnicas de cálculo estiverem dominadas, com o entendimento do seu significado, então é hora de utilizar a calculadora para trabalhar problemas que exigem sensibilidade sobre a grandeza dos números e interpretação de dados que vão além da dificuldade numérica.

5. A divisão no Conjunto dos Números Inteiros

Nesta seção, a divisão de números inteiros será tratada como uma operação inversa da multiplicação, isto é:

Se ***a*** é um número inteiro obtido como o resultado da multiplicação de dois números inteiros *não nulos* ***b*** $\times$ ***c*,** então dizemos que ***b*** é o resultado da ***divisão*** de ***a*** por ***c***, indicado por ***b = a*** : ***c*** (ou ***b*** = $\frac{a}{c}$). Analogamente, ***c*** é o resultado da ***divisão*** de ***a*** por ***b***, denotado por ***c*** = ***a : b*** (ou ***c*** = $\frac{a}{b}$).

Como 0 $\times$ ***b*** = 0 para qualquer inteiro não nulo ***b***, temos a relação 0 = 0 : ***b*.**

Por outro lado, pela mesma razão, não podemos definir a divisão 0 : 0, tendo em vista que não existe um número inteiro b = 0 :0, bem determinado que satisfaça a relação: $0 \times b = 0$. Pode ser um inteiro qualquer!

Resumindo, temos uma das regras essenciais das operações com números:

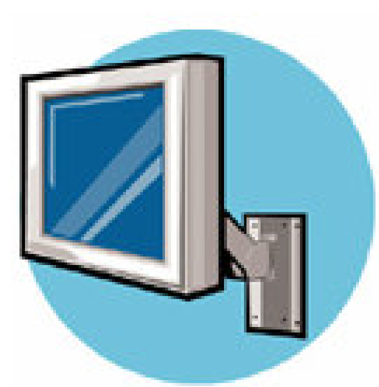
"NÃO SE DIVIDE UM NÚMERO POR ZERO".

Recordemos que a ideia básica da multiplicação de inteiros ***a*** $\times$ ***b***, em que ***a*** é positivo, é a de agrupamento por adição de ***a*** parcelas iguais a ***b***, com ***b*** inteiro qualquer.

Uma ideia concreta que existe por trás da "divisão como operação inversa da multiplicação" é exatamente a de "partilha" de uma quantidade (positiva ou negativa) em partes iguais.

Para entender melhor esta idéia, vamos retomar a seguinte situação/problema:

Problema: João foi à loja comprar um aparelho de televisão que custa R$ 400,00 à vista ou em 4 parcelas sem juros. Ele resolveu comprar parcelado, e recebeu o carnê na sua casa. De quanto é cada parcela? Interpretando a dívida como um valor negativo no crédito que João obteve junto à loja, registre a operação que calcula as parcelas das prestações. Qual é o valor de cada parcela, interpretando cada parcela da prestação como uma dívida?



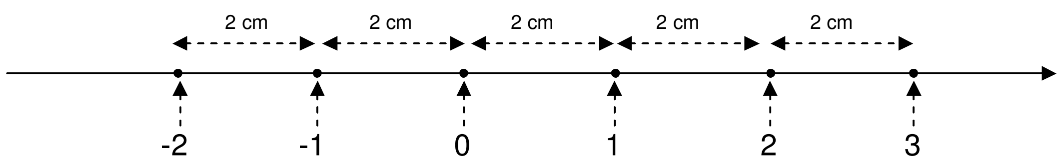
Observamos que o preço total do aparelho de som é R$ 400,00, em que registramos o número 400 com a qualidade de ser negativa, (- 400), por representar uma dívida.

Então – 400 = 4 $\times$ b, em que b = parcela da prestação. Assim b = $\dfrac{-400}{4}$ = -100, porque –100 é o valor que satisfaz a relação 4 $\times$ (-100) = - 400.

Logo cada parcela da prestação tem valor absoluto de R$ 100,00, mas como número inteiro, é representado como –100, por ser uma dívida.

Outro exemplo pode ser trabalhado com o **Jogo dos Robôs**.

Exemplo: Suponhamos no Jogo de Robôs a situação em que cada passo do robô tenha 2 centímetros, ao longo da trajetória retilínea.



Pensemos nas questões:

Se o Robô 1, que caminhou no sentido à esquerda da origem, parou após dar 6 passos, a que distância da origem ele chegou?

Quando o mesmo Robô 1 andar mais à esquerda e parar agora a 16 centímetros do ponto origem, qual é a coordenada do ponto em que ele está? Lembrando que os robôs partiram da origem ao mesmo tempo em sentidos opostos, qual é a distância do Robô 2, após os mesmos movimentos no sentido oposto ao do Robô 1? Quantos passos o Robô 2 deu no sentido à direita da origem?

Partindo agora do ponto distante 12 centímetros da origem, quantos passos o Robô 1 precisa dar para chegar ao ponto que dista 4 centímetros à esquerda da origem?

Use a reta numerada orientada para facilitar a visualização e o raciocínio.

Quando $a = b \times c$, o número a é chamado “múltiplo inteiro de b pelo fator c” ou equivalentemente “múltiplo inteiro de c pelo fator b”. No caso em que a e c são não nulos, temos b como divisão de a por c (a : c, ou $\frac{a}{c}$). Portanto, as regras de sinais para multiplicação de números inteiros valem também para a divisão entre um múltiplo e seus fatores, isto é, a divisão entre números de mesmo sinal resulta sempre positiva, e a divisão entre números de sinais opostos resulta sempre negativa.

Na divisão de $a = b \times c$ por c, a é chamado de dividendo, c de divisor, e b como resultado da divisão é chamado de quociente. A divisão nesta situação é chamada exata (o resto é 0).

Até o momento, tratamos a divisão entre números inteiros SOMENTE num caso especial em que o divisor é igual ao dividendo multiplicado por um fator inteiro. Isto já poderia instigar um questionamento: “Existem divisões de números em que o divisor e o dividendo não estejam assim relacionados?”.

Para entender melhor vamos explorar uma situação concreta:

Problema: Numa competição de carros de corrida, uma volta completa do circuito mede 55 km. Se um dos competidores correu 300 km, quantas voltas ele deu no circuito?

O raciocínio sobre este problema leva a considerar o total da distância percorrida como um agrupamento de voltas, cada qual com 55 (km). Portanto, o número de voltas V deve satisfazer $55 \times V = 300$. Estamos considerando o problema, interpretando 300 como um múltiplo de 55. Um exercício de listagem dos múltiplos inteiros de 55 mostra o seguinte:

Se deu 1 volta, percorreu 55 km.

Se deu 2 voltas, percorreu $55 \times 2 = 110$ (km).

Se deu 3 voltas, percorreu $55 \times 3 = 165$ (km).

Se deu 4 voltas, percorreu $55 \times 4 = 220$ (km).

Se deu 5 voltas, percorreu $55 \times 5 = 275$ (km).

Se deu 6 voltas, percorreu $55 \times 6 = 330$ (km).

Ora, com 6 voltas ele teria ultrapassado a marca de 300 km, e com 5 voltas ele não teria ainda completado 300 km. Isto significa que o carro parou antes de completar 6 voltas!

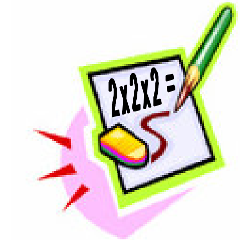
Nesta situação, não conseguimos aplicar a ideia de “dividir” (ou partilhar) um agrupamento em um número inteiro de fatores iguais.

Isto mostra que existem situações em que a divisão de números inteiros não pode produzir, como resultado exato, um número inteiro.

Por isso, a divisão tratada nesta seção evidencia limitações que motivam o estudo do tópico importante “Algoritmo da Divisão” no Capítulo 7 deste Curso e também nos leva ao estudo de frações, dos números racionais.

6. POTENCIAÇÃO DE INTEIROS COM EXPOENTES POSITIVOS

O PROCESSO DE RECURSÃO COM A MULTIPLICAÇÃO



Este capítulo é uma continuação do anterior sobre a multiplicação/divisão de números inteiros. A potenciação é tratada como um agrupamento multiplicativo de fatores iguais, para manter o resultado dentro do universo de números inteiros. Por isso, a operação de potenciação, com expoente dado por um número inteiro negativo, é assunto para um outro curso sobre os números racionais. O professor notará o caráter mais teórico e técnico deste capítulo, em relação aos anteriores. Isto mostra a importância do domínio de certos conceitos e técnicas na aprendizagem de números inteiros, sem os quais o reconhecimento do seu uso em problemas contextualizados e de modelagem seria prejudicado.

6.1 Potenciação com base qualquer

Vamos estudar as potências com base inteira e expoente inteiro positivo.

Começamos propondo um problema motivador das propriedades que caracterizam a potenciação. Consideremos a seguinte situação.

cara coroa

Vamos jogar uma moeda. Quando o fazemos temos duas possibilidades: pode ocorrer cara ou coroa.

Agora, pensemos na situação em que duas moedas diferentes são lançadas, e temos a questão: Quantas possibilidades existem neste caso?

Podemos ter como resultado: (Cara, Cara), (Cara, Coroa), (Coroa, Cara) e (Coroa, Coroa). Ou seja, temos *quatro* possibilidades.

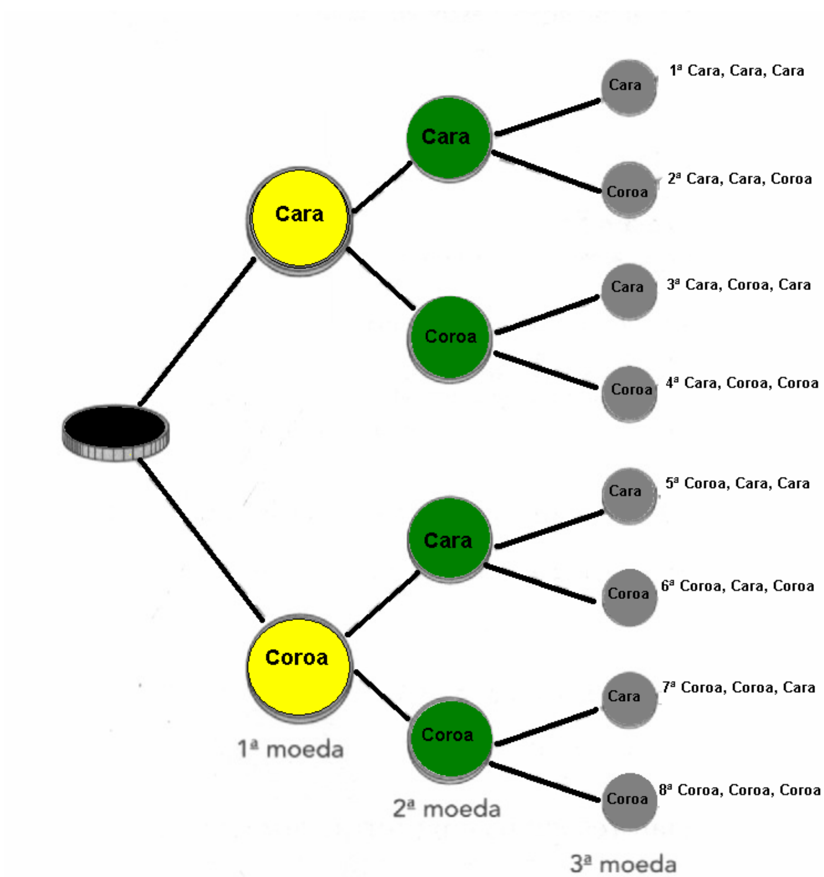
1ª Possibilidade:
(Cara, Cara)

2ª Possibilidade:
(Cara, Coroa)

3ª. Possibilidade:
(Coroa, Cara)

4ª. Possibilidade:
(Coroa, Coroa)

Seguindo a mesma idéia, consideremos agora o lançamento simultâneo de três moedas diferentes. Neste caso, para auxiliar o raciocínio sobre quantas possibilidades de resultado teremos, um esquema conhecido como “árvore de possibilidades” é muito útil. Confira a seguinte figura:



Com esta atividade percebemos que a tarefa de contagem fica mais trabalhosa, cada vez que aumentamos o número de moedas. Vejamos no quadro seguinte uma análise dos resultados, até agora obtidos:

ANALISE DOS RESULTADOS		
1 Moeda	**=** 2	possibilidades;
2 Moedas	= 4 = $(2 \cdot 2)$	possibilidades;
3 Moedas	= 8 = $(2 \cdot 2 \cdot 2)$	possibilidades;

Qual seria o número de possibilidades ao lançarmos quatro, cinco ou seis moedas diferentes?

Nesta atividade o aluno deverá perceber que estamos sempre multiplicando fatores iguais.

Lembramos que a multiplicação de um inteiro positivo por outro inteiro pode ser vista como um caso especial de uma adição de parcelas iguais, recuperando a ideia de agrupamento por adição. Por exemplo: $8 + 8 + 8 + 8 +8 = 5 \cdot 8 = 40$.

Então, o caso especial de multiplicação de fatores iguais é, por sua vez, "interpretada" como um caso de agrupamento por multiplicação, introduzindo a operação que chamamos de Potenciação, denotada de maneira especial, como nos exemplos:

$2 \cdot 2 = 2^2$. Lê-se: dois elevado à segunda potência.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Lê-se: dois elevado à terceira potência.

Na notação da potência 2^3, 2 é chamado de base e 3 é o expoente (inteiro positivo) que indica o número de fatores iguais à base 2 na multiplicação: $2 \times 2 \times 2 = 8$.

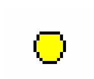
Assim, todo número elevado ao expoente 1 é igual a si mesmo.

1) Quando o expoente da potência for 2, este pode ser lido como “elevado ao quadrado”.

2) Quando o expoente da potência for 3, este pode ser lido como “elevado ao cubo”.

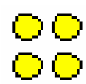
Atividade com potências de expoente 2 e de expoente 3

Expoente 2: Vamos brincar, colocando pedrinhas correspondentes a cada potenciação. Leve seus alunos a montar a seguinte formação.



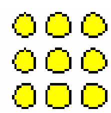
$1 = 1 \cdot 1$

1^2



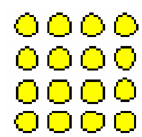
$4 = 2 \cdot 2$

2^2



$9 = 3 \cdot 3$

3^2



$16 = 4 \cdot 4$

4^2

A sequência de números 1, 4, 9, 16, 25, ... é chamada seqüência dos números quadrados. Observando as figuras acima, podemos ter uma idéia do por que essa sequência recebe esse nome. Percebemos ainda que para formar os números quadrados estamos sempre utilizando o expoente 2. Sendo assim, todo número elevado a segunda potência tem uma leitura especial. Observe:

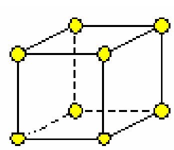
$(-5)^2$ se lê (-5) elevado ao quadrado, ou ainda (-5) ao quadrado;

3^2 se lê 3 elevado ao quadrado, ou 3 ao quadrado.

Expoente 3

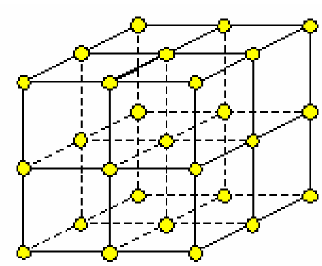
$1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$

1^3



$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

2^3



$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

3^3

A sequência de números 1, 8, 27, ... é chamada sequência dos números cúbicos. Observando as figuras acima, podemos novamente ter uma ideia do por que essa sequência recebe esse nome. Percebemos agora que para formar os números cúbicos estamos sempre utilizando o expoente 3. Assim como o expoente dois, todo número elevado ao expoente três tem uma leitura especial, como nos exemplos:

$(-10)^3$ se lê (-10) elevado ao cubo, ou ainda (-10) ao cubo;

7^3 se lê 7 elevado ao cubo, ou 7 ao cubo.

Um problema para pensar.

Uma notícia sobre um artista de novela é espalhada via telefone. A notícia parte de uma ex-artista, que espalha para 3 pessoas; cada uma dessas conta para outros 3 amigos, que por sua vez contam para mais 3 amigos diferentes, que ainda contam para outros 3. Quantas pessoas ficaram sabendo da notícia por este meio?

Potências de base negativa

Com a conceituação da potenciação com expoente inteiro positivo como caso especial de agrupamento multiplicativo, as potências com base negativa não oferecem nenhuma dificuldade. Observamos uma propriedade interessante quando a base é negativa:

a) $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$

b) $(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +64$

A resposta positiva, no segundo exemplo acima, se justifica pelo significado da natureza do produto de *dois* números negativos, estudado no Capítulo 5, e a propriedade associativa da multiplicação que permite tomar os produtos dois a dois. Assim, o produto de um número *par* de fatores negativos resulta sempre positivo.

Analise a potência nos seguintes exemplos:

a) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
b) $(\ 2)^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
c) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$
d) $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
e) $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
f) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Conclusão: "Quando a base é negativa, a potência com expoente inteiro positivo PAR é POSITIVA, e com expoente inteiro positivo ÍMPAR é NEGATIVA".

6.2 Operações com Potências

Multiplicação entre potências de mesma base

A interpretação da potenciação como um caso de agrupamento multiplicativo de um mesmo número inteiro, facilita a compreensão da multiplicação entre potências de mesma base.

Por exemplo: $5^4 \cdot 5^3$, pode ser reescrito como uma única potência. Para isso, escrevemos o produto das potências como:

$$5^4 \cdot 5^3 = \underbrace{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{4 fatores}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 fatores}}}_{\text{7 fatores}} = 5^7$$

A propriedade que justifica este resultado é a propriedade associativa da multiplicação.

Veja um outro exemplo:

$$(-3)^3 \cdot (-3)^2 = \underbrace{\underbrace{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{\text{3 fatores}} \cdot \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{\text{2 fatores}}}_{\text{5 fatores}} = (-3)^{3+2} = (-3)^5$$

O resultado é simplesmente a potência com mesma base e com expoente dado pela soma dos expoentes dos fatores.

Divisão de potências de mesma base

Vamos lembrar que a divisão entre números inteiros foi estudada no Módulo 5 somente no caso em que o dividendo é um múltiplo inteiro do divisor. Vamos lembrar também que a divisão *a: b*, pode ser escrita como $a : b = \frac{a}{b}$ = *c*, sendo que $b \times c = a$.

Assim, vamos considerar a divisão entre potências de mesma base em que o expoente do dividendo é <u>sempre maior</u> que o expoente do divisor. Então, a divisão entre potências de mesma base pode ser feita facilmente como nos exemplos a seguir:

Por exemplo, a divisão $5^4 : 5^3$ pode ser reescrita como única potência:

$$5^4 : 5^3 = \frac{5^4}{5^3} = \frac{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{\text{4 fatores}}}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 fatores}}} = 5^{4-3} = 5^1 = 5$$

Observamos que o simples fato de que o expoente do dividendo ser maior que o expoente do divisor, faz com que o divisor seja automaticamente um dos fatores do dividendo na decomposição deste como produto de dois números inteiros.

Outros exemplos:

$$(-3)^4 : (-3)^2 = \frac{(-3)^4}{(-3)^2} = \frac{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}{(-3)\cdot(-3)} = (-3)^{4-2} = (-3)^2 = 9$$

$$(4)^2 : (4)^2 = \frac{(4)^2}{(4)^2} = \frac{(4)\cdot(4)}{(4)\cdot(4)} = (4)^{2-2} = (4)^0 = 1.$$

Por que $4^0 = 1$? De fato, no exemplo acima estamos dividindo 4^2 por 4^2, ou seja, estamos dividindo um número por ele mesmo:

$$(4)^2 : (4)^2 = \frac{(4)^2}{(4)^2} = \frac{(4)\cdot(4)}{(4)\cdot(4)} = \frac{16}{16} = 1, \text{ pois } 16 = 16 \times 1.$$

Mais exemplos:

$$5^3 : 5^3 = \frac{5^3}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$$

$$(-7)^5 : (-7)^5 = \frac{(-7)^5}{(-7)^5} = \frac{(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)}{(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)} = (-7)^{5-5} = (-7)^0 = 1$$

"A potência $\boldsymbol{a}^0$, para qualquer número inteiro *não nulo* ***a***, é sempre igual a 1"

Não deixe de recordar aqui que 0^0 não é definido. Lembra-se do por quê? (Veja na RPM no. 1 o artigo "Conceitos e Controvérsias" de Elon Lages Lima)

6.3 Potências de 10

O nosso sistema de numeração é decimal e por isso aprendemos a decompor os números em parcelas múltiplas de potências de 10, conduzindo à representação dos números que é familiar já nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental.

Para lembrar, consideremos o número 4327, por exemplo. A leitura deste número na representação decimal é: 4 milhares, 3 centenas, 2 dezenas e 7 unidades, significando as seguintes decomposições:

4327= 4000 + 300 + 20 + 7

4327= 4 · (1000) + 3· (100) + 2 ·(10) + 7

4327= $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$.

Assim, o sistema de representação decimal permite decompor um número em parcelas múltiplas de potências de base 10, lembrando que a unidade 1 pode ser representada como 10^0.

Exemplo: Decomposição do número 123807, em potências de 10.

$123\ 807 = 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ (temos 0 dezenas).

Leve seus alunos a observar que o expoente de uma potência decimal na decomposição de um número é exatamente a posição do algarismo do múltiplo desta potência contada da direita para esquerda, a partir da ***dezena*** (= 10^1).

Por exemplo, o expoente 4 na decomposição acima equivale à posição do algarismo 2 *a partir da casa das dezenas*, que é 4^a posição.

A representação de um número inteiro por meio de potências decimais é um recurso muito útil na linguagem científica para trabalhar, por exemplo, com números muito grandes.

Como exemplos, temos a distância da Terra ao Sol que é aproximadamente 150 milhões de quilômetros = 150 000 000 quilômetros, e a massa da Terra que é aproximadamente 6 600 000 000 000 000 000 000 000 Kg.

É fácil perceber o quanto ficaria cansativo resolver um problema utilizando esses números várias vezes. Por isso, o conceito de potência é muito útil, simplificando a representação desses números como segue:

a) $1\underbrace{50\ 000\ 000}_{\text{Sete zeros}} = 15 \cdot 10^7$

b) $6\ 6\underbrace{00\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}_{\text{Vinte e três zeros}} = 66 \cdot 10^{23}$

Assim, quando multiplicamos números expressos em potências de dez, a operação se simplifica como no seguinte:

Exemplo: $(5 \cdot 10^4) \cdot (9 \cdot 10^7) =$

$= (5 \cdot 9) \cdot (10^4 \cdot 10^7)$

$= 45 \cdot 10^{4+7} = 45 \cdot 10^{11}$

Um Problema para mostrar a facilidade de calcular, usando potências.

Você sabia que um ano-luz é uma medida de distância que equivale a aproximadamente 9460530000000 km (ou seja, cerca de 9500 bilhões de quilômetros!)? Ele tem este nome por que é a distância percorrida por um raio de luz durante um ano. Usando potências de 10 podemos dizer que um ano-luz é aproximadamente igual a $95 \cdot 10^{11}$ Km. Suponha agora que um astrônomo verifique em seus estudos que uma galáxia está localizada a 2 milhões de anos-luz de nosso planeta. Qual é a distância aproximada desta galáxia à Terra em Km?

Sabendo que a distância é de 2 milhões de anos-luz, e que um ano-luz equivale a $95 \cdot 10^{11}$(km), vamos primeiro escrever 2 milhões como potência de 10:

2 milhões anos-luz equivale a $2 \cdot 10^6$ anos-luz.

Agora multiplicamos:

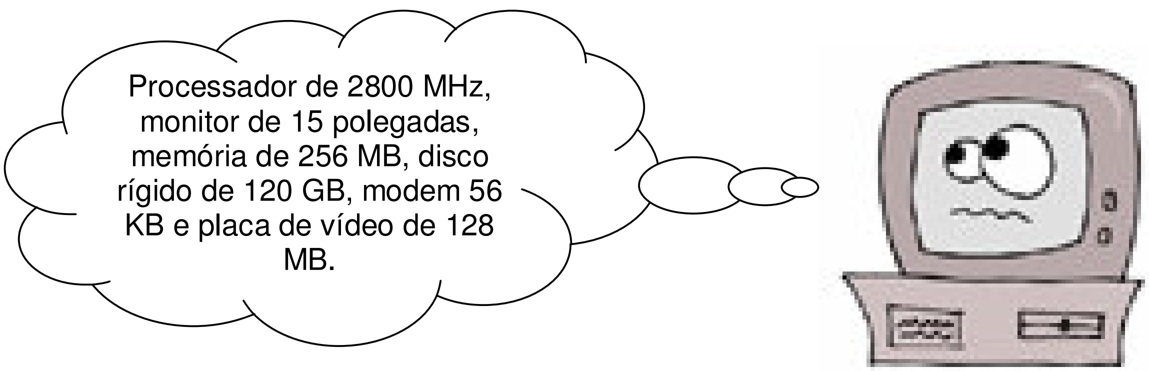
$$
\begin{aligned}
d = (2 \cdot 10^6) \cdot (95 \cdot 10^{11}) &= (2 \cdot 95) \cdot (10^6 \cdot 10^{11}) \\
&= 190 \cdot 10^{6+11} \\
&= 190 \cdot 10^{17} \\
&= 19 \cdot 10^{18}
\end{aligned}
$$

Logo a resposta é: A distância da galáxia à Terra é de aproximadamente $19 . 10^{18}$ km.

Sugerimos que se peça sempre para os alunos responderem as questões propostas num problema, *por extenso e completo*, utilizando unidades corretas, quando for o caso. Somente assim, os alunos poderão atribuir significados às operações e interpretar corretamente os resultados.

Potências de 10 na Informática

Com alguns poucos conhecimentos de Informática, podemos dar exemplos de números expressos em potências de 10 que estão presentes nos termos usados para especificar configurações de equipamentos. Por exemplo, podemos notar termos como os seguintes num catálogo que mostra as especificações de um computador:



As Unidades de Medidas usadas no texto acima são lidas como:

B = byte
MHz = megahertz
GHz = gigahertz
MB = megabyte
GB = gigabyte
KB = quilobyte

em que os termos Giga, Mega, e Kilo se referem a:

G = Giga = 10^9
M = Mega = 10^6
K = Quilo = 10^3

Assim, os Números do catálogo, escritas em potências de 10, ficam:

2800 MHz = 2 800 000 000 Hz = $28 \cdot 10^8$ Hz
256 MB = 256 000 000 B = $256 \cdot 10^6$ B
120 GB = 120 000 000 000 = $12 \cdot 10^{10}$ B
56 KB = 56 000 B = $56 \cdot 10^3$ B

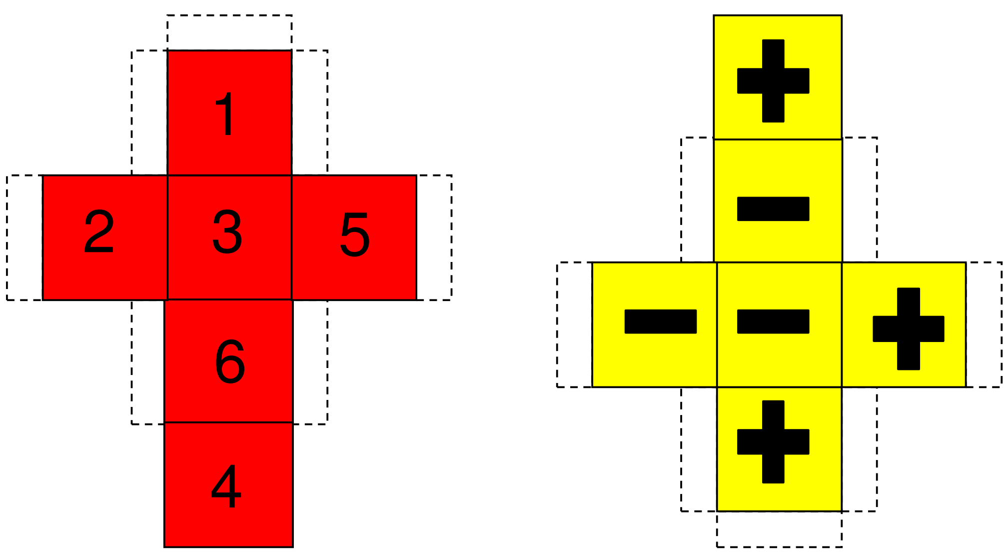
Atividade: Peça para os alunos pesquisarem o que estas medidas significam na linguagem da Informática. O que significa a unidade “byte”? O que é medido como “hertz”? O que é “polegada”? Por que se usa polegada, quando não a usamos em nosso país, em geral?

Para que o conteúdo deste capítulo seja dominado, muitos exercícios de fixação devem ser feitos. Os problemas contextualizados que utilizem os conceitos de potências, multiplicação e divisão de números inteiros dependem do domínio de técnicas operatórias.

No Capítulo 8 a potenciação será retomada no contexto do Teorema Fundamental da Aritmética.

6.4 Jogo da Potência

O objetivo deste jogo é consolidar as habilidades de realizar operações com potências de números inteiros. São necessários um dado comum e um dado com sinais, como os planificados abaixo:



Os participantes do jogo devem determinar, através de um sorteio, qual será o primeiro a jogar (por exemplo aquele que tirar o maior número no lançamento do dado comum). Cada jogador, na sua vez, deverá proceder da seguinte forma:

- Lança-se primeiramente o dado comum. O resultado será a base da potência, sem o sinal (por enquanto);
- Lança-se, em seguida, o dado dos sinais, o qual determinará se a base será positiva ou negativa;
- Lança-se novamente o dado comum para determinar o expoente.

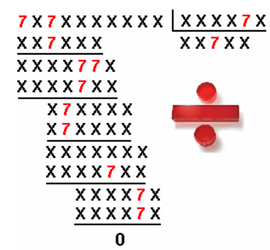
O jogador que obtiver o maior resultado em cada jogada ganha um ponto. Os resultados devem ser registrados em uma tabela.

	Base da potência	**Expoente**	**Potência formada**	**Resultado**	**Assinale quem ganhou**
1ª. rodada					
jogador 1					
jogador 2					
2ª. rodada					
jogador 1					
jogador 2					
3ª. rodada					
jogador 1					
jogador 2					

Bom divertimento! Boa aprendizagem!

7. DIVISIBILIDADE, DIVISORES E MÚLTIPLOS

O ALGORITMO DA DIVISÃO E SUAS CONSEQUÊNCIAS



Nos capítulos anteriores trabalhamos com uma grande gama de atividades ligadas à construção dos conceitos sobre os números inteiros, iniciando-se com o registro e trabalhando os aspectos geométricos e as operações com estes números.

Neste capítulo, iremos explorar os números inteiros de uma forma diferente do que vínhamos fazendo até agora; iremos, de certa forma, entender a "estrutura interna" que os números inteiros possuem. Esta estrutura só nos é revelada se entendermos bem os processos que envolvem a *divisão* de dois números inteiros. Muito raramente a divisão de dois números inteiros resulta em um número inteiro, pois esta pode produzir resto não nulo. A partir do Algoritmo da Divisão, os estudos das relações entre dois números inteiros e o resto da sua divisão nos permitirão formalizar uma pequena teoria acerca dos múltiplos e divisores que será útil para compreender o Teorema da Decomposição em Fatores Primos (ou Teorema Fundamental da Aritmética), sobre o qual a referida estrutura dos números inteiros se assenta. Este teorema será desenvolvido no próximo capítulo. Dois conceitos correlatos serão estudados aqui: o de mínimo múltiplo comum (MMC) e o de máximo divisor comum (MDC), trabalhados já neste capítulo. Estes conceitos, por si só são importantes e têm uma grande gama de aplicações; algumas delas serão apresentadas com propostas concretas para a utilização em sala de aula.

7.1 Divisão com resto

Sabemos que a operação de adição de números inteiros pode ser desfeita pela operação de subtração; subtrair dois números nada mais é do que adicionar à primeira parcela o oposto da segunda e, na verdade, a adição e a subtração com números inteiros podem ser pensadas como uma única operação. Vimos esta ideia desenvolvida no Capítulo 3.

Exemplos:

$3 - 2 = 3 + (-2) = 1$

$- 4 - 5 = - 4 + (-5) = - 9$

$7 - 7 = 7 + (-7) = 0$

Este último exemplo pode ser generalizado, dizendo-se que um número somado ao seu oposto sempre resulta em 0 (propriedade do elemento oposto).

Sabemos também que a multiplicação pode ser realizada com dois números inteiros dados, e que ela generaliza a operação de multiplicação de números naturais em que o produto de dois números é uma soma feita repetidamente. Por exemplo, $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Entretanto, quando trabalhamos com números inteiros, devemos estar sempre atentos às regras de sinais. Já estudamos no Capítulo 5 que multiplicações com fatores de sinais opostos produzem números negativos e multiplicações com fatores de mesmos sinais produzem números positivos. Vamos recordar, observando alguns exemplos:

$(+2) \times (+7) = +14$

$(+2) \times (-7) = -14$

$(-2) \times (+7) = -14$

$(-2) \times (-7) = +14$

No Capítulo 5, trabalhamos também a seguinte questão: “Seria possível inverter a operação de multiplicação de números inteiros?”, ou melhor, “é possível dividir números inteiros?”

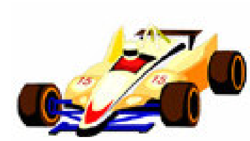
Ao tentarmos dividir números inteiros, podemos ter sorte e o resultado ser ainda um número inteiro, como nos exemplos:

$6 : (-3) = (-2)$, já que $(-3) \times (-2) = 6$.

$(-6) : (-3) = (+2)$, já que $(-3) \times (+2) = (-6)$.

É claro, nestes casos, que o resultado da divisão é um número inteiro, pois o primeiro número é um múltiplo inteiro do segundo número. Analisemos, entretanto, o seguinte problema:

Problema: Um carro de competição tem combustível para correr exatamente 700 Km. Uma volta completa no circuito onde a corrida será realizada mede 55 km.



Quantas voltas o carro poderá completar?

Ao final, o carro realizará uma última volta completa ou parará na pista sem conseguir chegar?

Ora, quando dividimos 700 por 55 obtemos 12 com resto 40. Isto significa que o carro realizará 12 voltas completas, mas na última volta ele só andará 40 km. Observe:

$$700 = 12 \times 55 + 40$$

O que fizemos foi verificar, através da divisão, quantas vezes 55 cabe dentro de 700. E o que aconteceu? A divisão de 700 por 55 não foi exata, isto é, a divisão desses dois números inteiros não é um inteiro, ela deixa resto.

Esta situação é descrita, de um modo geral pelo algoritmo da divisão:

ALGORITMO DA DIVISÃO: Dados dois números inteiros **a** e **b**, é sempre possível encontrar outros dois inteiros **q** e **r** tais que

$$\mathbf{a = q \times b + r},$$

com $\mathbf{0 \leq r < |b|}$.

O número q é chamado *quociente* e o número *r* é o *resto* da divisão do *dividendo* **a** pelo *divisor* **b.** A divisão pode ser indicada pelo diagrama:

$$\begin{array}{r|l} a & \underline{\;b\;\;} \\ r & q \end{array}$$

Observe que a exigência do resto r ser menor do que o valor absoluto de b é muito plausível. Para facilitar o raciocínio, pensemos, por um instante, o que acontece quando a e b são inteiros positivos. A divisão, neste caso, sendo a inversa da multiplicação – que é uma soma de parcelas iguais – deve ser então uma subtração de parcelas iguais. Caso o resto fosse maior do que b, acrescentaríamos 1 ao quociente pois b caberia em a mais uma vez, e isto faria o resto diminuir. Continuando repetidamente este processo chegamos a uma situação em que de fato $r < b$.

Quando a divisão envolve números inteiros com sinal, consideramos $r < |b|$, com raciocínio semelhante. Por exemplo, consideremos a divisão de 77 por -15. Se considerássemos o quociente como (-4), teremos a situação:

$77 = (-4) \times (-15) + 17$, mas $17 > |-15|$.

Porém, podemos escrever 17 como:

$17 = (-1) \times (-15) + 2$.

Assim, $77 = (-4) \times (-15) + [(-1) \times (-15) + 2] = (-5) \times (-15) + 2$, e neste caso podemos tomar o resto como sendo igual a 2 pois $2 < |-15|$. O que ocorreu? Somamos (- 1) ao quociente para obter o resto menor que o valor absoluto de –15.

O algoritmo da divisão permite entender a verdadeira estrutura dos números inteiros. Através dele podemos estabelecer importantes relações entre tais números.

Antes de prosseguirmos, chamamos atenção ao fato que o Algoritmo da Divisão aponta para a natureza do resto de uma **divisão não exata**:

$$\text{Se } a = b.q + r \text{ então } \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

A “razão” que o resto tem em relação ao divisor implica na possibilidade de estudar números de natureza totalmente diferente dos números inteiros, que são uma extensão natural dos processos de contagem. Tais números possuem significado bastante claro nos problemas contextualizados e representam um outro campo de estudo muito importante no Ensino Fundamental: os Números Racionais, que devem ser tratados num outro curso.

Múltiplos

Neste capítulo iremos enfatizar dois conceitos centrais: o de divisor e o de múltiplo, já introduzidos no Capítulo 6, e que agora exercem papel fundamental no desenvolvimento do conteúdo.

Dados dois números inteiros a e b, podem existir muitas relações entre eles. Uma relação importante é a de múltiplo. Dizemos que a é um *múltiplo* de b se o resto da divisão de a por b for igual a zero. Isto quer dizer que existe um número q (o quociente de a por b) tal que a = q $\times$ b.

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array}$$

O número 0 é múltiplo de qualquer número, pois 0 dividido por qualquer número (não nulo!) é sempre zero (com resto zero) e os múltiplos podem ser positivos ou negativos. É claro que 0 é múltiplo também de 0.

Por exemplo, o conjunto dos múltiplos de 3 incluem 0, 3, 6, 9, 12, ... e também seus opostos –3, -6, -9, ... ; assim, podemos escrever o conjunto de todos os múltiplos de 3 da seguinte maneira:

$$M(3) = \{ \ldots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Qual será então o conjunto dos múltiplos do número –3? Um instante de reflexão mostrará que os múltiplos de –3 são precisamente os múltiplos de 3, isto é M(-3) = M(3). Isto é verdade em geral: os múltiplos de um número n são também múltiplos de seu oposto (-n). Indicamos isto escrevendo M(-n) = M(n).

Antes de iniciarmos o estudo dos divisores, vamos apresentar um pequeno artigo da Revista do Professor de Matemática no. 14:

"Como escolher namorada pelos horários do trem de subúrbio"

Manoel Henrique Campos Botelho

João amava Lúcia que amava João. Só que João além de amar Lúcia também amava Leticia e tentava namorar as duas ao mesmo tempo. Durante a semana, até que dava, mas quando chegava o sábado à noite era terrível. As duas queriam João e este não possuía o dom da presença ao mesmo tempo em dois lugares. Assim alternadamente ou Lúcia ou Leticia ficavam sem sair com João, nos embalos de sábado à noite. João decidiu contar a Lúcia a existência de Leticia e a Leticia sobre Lúcia. Claro que houve choros e lamúrias de todos os lados. E João continuou dividido, sem saber como escolher entre as duas. Aqui um detalhe, João morava próximo a uma estação ferroviária de um subúrbio. Para visitar Lúcia, João pegava trens que iam no sentido da direita cada meia hora, e para visitar Leticia, João pegava trens que iam a esquerda cada meia hora também. Quanto a horários não havia dúvidas. Trens para cada lado de meia em meia hora. Mas voltemos a dúvida existencial afetiva do nosso amigo João. Como escolher entre Lúcia e Leticia? A solução foi dada por Leticia que era professora de Matemática. Leticia propôs a João um critério justo, equânime, salomônico para escolher a quem ir namorar. A proposta foi: João sairia de casa sem saber com quem ir encontrar. Ao chegar na estação pegaria o primeiro trem que passasse, fosse para a direita, fosse para esquerda. Proposta aceita. João começou a usar esse critério aparentemente justo e aleatório. Depois de usar o critério por cerca de três meses, descobriu que visitara Leticia muito mais que Lúcia, e se a sorte quis assim ficou com Leticia e com ela se casou sem nunca haver entendido porque a sorte a privilegiara tanto. Só nas bodas de prata do seu casamento é que Leticia contou a João a razão do mistério, de o trem ter escolhido, ela preferencialmente à concorrente. Leticia estudara os horários dos trens e verificara que os horários eram:

Leticia	*Lúcia*
8h00	*8h05*
8h30	*8h35*
9h00	*9h35*
9h30	*9h05*
TRENS P/ ESQUERDA	*TRENS P/ DIREITA*

Ou seja:

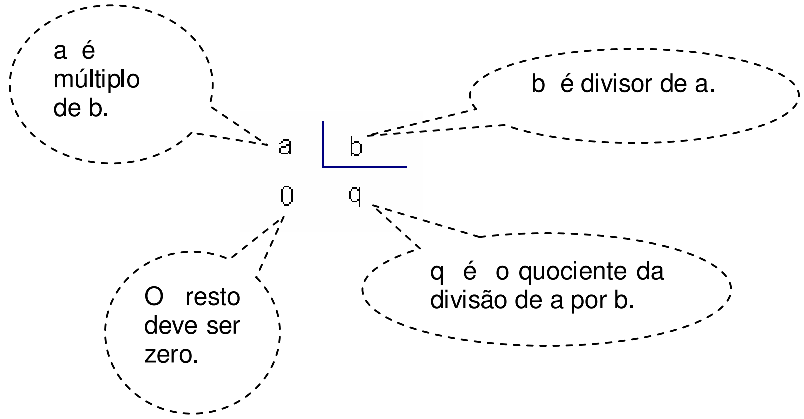
Para cada 25 min. de probabilidade de se pegar o trem que vai para a esquerda havia só 5 min. de probabilidade de se pegar o trem que ia para a direita.

Na guerra como no amor tudo vale..., até usar Matemática.

Você consegue vislumbrar o que esta história tem a ver com múltiplos? Desenhe os horários em uma reta orientada que representa o tempo e observe o que ocorre.

Divisores

Um outro conceito importante que surge entre dois números inteiros e que está intimamente ligada à noção de múltiplo é o de divisor. Dizemos que um número b é um divisor de um outro número a se a for um múltiplo de b! Ora, então o conceito de divisor é de certa forma o inverso do de múltiplo. Em outras palavras, se ao dividirmos a por b obtivermos resto 0, diremos que a é um múltiplo de b e que b é um divisor de a.



Vejamos alguns exemplos:

Quais são os divisores de 12? São os números pelos quais 12 pode ser dividido para que se obtenha zero como resto. Não é difícil de verificar que os números 1, 2, 3, 4, 6 e o próprio 12 têm esta propriedade, não é mesmo? Seriam estes então todos os divisores de 12? Não, pois teremos ainda os números negativos: -1, -2, -3, -4, -6 e –12. Assim o conjunto de todos os divisores de 12 é

D(12) = {-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Quais são os divisores de -7?
Verifique que os únicos divisores de 7 são -7, -1, 1 e 7.
E os divisores de (-7)? São os mesmos: -7, -1, 1 e 7. Isto é D(7) = D(-7).

Podemos aprender muito com esses exemplos:

1o. O conjunto dos divisores de um número n e o conjunto de divisores de seu oposto (-n) coincidem, isto é D(-n) = D(n). Lembra-se que isto também ocorria com o conjunto dos múltiplos?

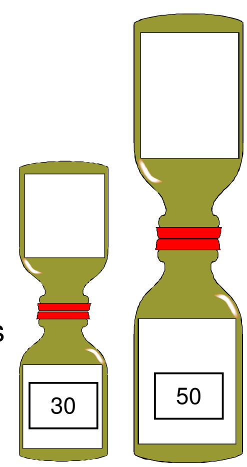
Isto simplifica um pouco nossos estudos, pois podemos nos concentrar apenas nos números inteiros positivos quando estamos estudando múltiplos e divisores.

2o. Você notou que o conjunto dos múltiplos de um número é um conjunto com infinitos elementos, enquanto que o conjunto dos divisores sempre é finito? Na verdade um divisor de um número não pode ser muito grande; ele não pode exceder em valor absoluto o valor absoluto do próprio número. Em outras palavras, se n é um número inteiro, o maior divisor de n é |n| e o menor divisor é -|n|. Todos os outros divisores estão entre esses dois extremos.

Se você tomar dois números inteiros, não é necessário que um deles seja um múltiplo do outro (e portanto, também que o outro seja um múltiplo do primeiro). Por exemplo, pense nos números -5 e 3. Nem 3 é múltiplo de -5, nem -5 é múltiplo de 3 porque o resto da divisão de um pelo outro em qualquer uma das duas situações não é zero.

Alguns fatos surpreendentes ocorrem quando entendemos o que os múltiplos e os divisores podem fazer na resolução de problemas com números inteiros, pois eles englobam a estrutura interna de tais números. É o que veremos a seguir ao manipularmos duas ampulhetas.

7.2 Atividades práticas com ampulhetas feitas com garrafas descartáveis



Para realizar este experimento vamos precisar de 4 garrafas PET com tampa, fita adesiva, tesoura e uma pequena quantidade de areia.

Faça um furo nas tampas das garrafas. As duas tampas devem ser unidas com fita adesiva e, posteriormente, ao serem colocadas nas garrafas, teremos montado nossas ampulhetas. Veja a figura ao lado.

Primeira parte: explorando múltiplos e divisores com as ampulhetas

Usando um relógio, coloque areia no interior das ampulhetas, retirando o excesso ou colocando um pouco mais de areia até que cada ampulheta tenha a quantidade de areia certa para medir 50 segundos (a maior) e 30 segundos (a menor), respectivamente. Pronto! Nossas experiências podem começar.

Manuseando as duas ampulhetas você conseguiria medir outros intervalos de tempo, além dos 50 e 30 que cada uma separadamente mede? Por exemplo, para medir 80 segundos, basta virar a ampulheta maior; quando a areia desta ampulheta terminar, viramos a ampulheta menor e, quando terminar a areia desta segunda ampulheta, passaram-se 80 segundos.

Atividade: Com o auxílio das duas ampulhetas, como se deve proceder para marcar a passagem de:

a) 100 segundos? ____

b) 90 segundos? ____

c) 80 segundos? ________________80 = 50 + 30____________________

d) 70 segundos? ____

e) 60 segundos? ____

f) 50 segundos? ____

g) 40 segundos? ____

h) 30 segundos? ____

i) 20 segundos? ____

j) 10 segundos? ____

Responda agora:

1. Quais são os múltiplos positivos de 30?________________________
2. Quais são os múltiplos positivos de 50?________________________
3. Existem números que são simultaneamente múltiplos positivos de 30 e de 50? Quais são eles?__________________________________
4. Qual é o menor destes múltiplos comuns?______________________
5. Existe um maior múltiplo comum? ____________________________

Definições do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum

Definição: O mínimo múltiplo comum de dois inteiros positivos a e b é o menor de todos os múltiplos positivos comuns de a e de b. O mínimo múltiplo comum é denotado por **mmc(a,b).**

Por exemplo, o mínimo múltiplo comum de 30 e 50 é 150, isto é mmc(30,50) = 150.

E quanto aos divisores?

Sabemos, por exemplo, que os divisores positivos de 30 são: 1, 3, 5, 6. 10, 15 e 30. Sabemos também que 1, 2, 5, 10, 25 e 50 são os divisores positivos de 50. Observando estas duas sucessões de divisores, vemos que 1 é um divisor comum (o menor deles) e isto é verdade em geral: o número 1 sempre é um divisor comum de quaisquer dois números inteiros dados (-1 também é, mas estamos no contexto dos inteiros positivos). Neste exemplo existem outros divisores comuns: 5 e 10. O maior deles é 10.

Definição: O máximo divisor comum de dois números inteiros positivos a e b é, como o próprio nome indica, o maior número que é simultaneamente um divisor de a e de b. Ele é denotado por **mdc(a,b).**

Assim mdc(30,50) = 10. Uma maneira direta de se obter o máximo divisor comum é listar todos os divisores positivos de cada um dos números, fazer a intersecção destes dois conjuntos, obtendo assim os múltiplos comuns e, dentre estes escolher o maior de todos, como fizemos acima. Posteriormente apresentaremos outras maneiras de se calcular o mdc(a,b), usando-se a álgebra e a geometria.

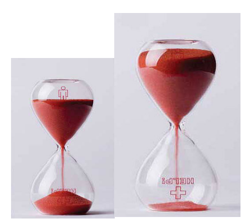
Um outro exemplo: mdc(4,15) = 1. Neste caso o único divisor comum positivo entre 4 e 15 é 1.

Definição: Se mdc(a,b) = 1 , dizemos que a e b são <u>primos entre si</u>.

Calcule o máximo divisor comum dos seguintes números, e indique quais deles são primos entre si:

1. a = 3, b = 6 ____
2. a = 2, b = 5____
3. a = 20, b = 5____
4. a = 2, b = 50____
5. a = 1, b = 2222____
6. a = 55, b = 55____
7. a = 77, b = 770____

Atividades com ampulhetas – segunda parte:



Nesta segunda parte as ampulhetas podem ser construídas, como fizemos antes, mas é indicado que os raciocínios envolvidos já não dependam do material concreto que está sendo utilizado.

Experimento 1: Imagine que você tenha à sua disposição duas ampulhetas: uma maior que marque 5 minutos e outra menor que marque 2 minutos. Seria possível obter, manuseando as duas ampulhetas, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 minutos?

Vamos dar uma ajuda:

Para se obter 7 minutos, basta virar a ampulheta maior (5 min) e, assim que a areia dela terminar, viramos a menor (2 min). Para se obter 3 minutos viramos simultaneamente as duas ampulhetas; quando a menor terminar, restarão na maior os 3 minutos desejados.

O que aprendemos com isto?

Com a ampulheta maior (5 min), virando-a sucessivas vezes, conseguiremos medir os seguintes múltiplos de 5: 5, 10, 15, ...

Com a ampulheta menor (2 min), virando-a sucessivas vezes, conseguiremos medir os seguintes múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Como 3 não é múltiplo nem de 2, nem de 5, necessitamos combinar as duas ampulhetas para obtê-lo. Como vimos, isto é feito devido ao fato de que $3 = 5 - 2$. O mesmo ocorre com 7, mas como $7 = 5 + 2$, não teremos problemas. Para se obter 9, podemos, por exemplo, usar que $9 = 5 + 2 + 2$, ou seja viramos primeiro a ampulheta maior e depois duas vezes a menor.

Com estas explicações podemos então medir facilmente os seguintes intervalos de tempo: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Resta somente explicar como medir 1 minuto.

Não é muito difícil medir 1 minuto: por exemplo, vire simultaneamente as duas ampulhetas, e quando a menor acabar, vire-a novamente; o que restar na maior depois disto será 1 minuto. O que fizemos foram as operações $1 = 5 - 2 - 2$, ou $1 = 5 - (2 \times 2)$.

Notemos que neste caso $mdc(2,5) = 1$.

Experimento 2: Vamos usar agora duas ampulhetas com outras marcações: 6 minutos (a maior) e 4 minutos (a menor). Será possível, usando essas duas ampulhetas, marcar todos os intervalos inteiros de tempo de 1 a 10?

Os alunos não terão dificuldade em medir os múltiplos de 4 como 4, 8, 12, etc, assim como os múltiplos de 6, como 6, 12, etc... Como medir os outros intervalos de tempo? Devemos, é claro, combinar as duas ampulhetas. Por exemplo, para medir 2 minutos, viramos simultaneamente as duas ampulhetas; quando a menor terminar, o que restar na maior será a medida para 2 minutos.

Entretanto, como medir instantes ímpares de tempo?

Esta é uma rica experiência a ser trabalhada em sala de aula. Os alunos tentam de todas as maneiras obter os intervalos de tempo de 1, 3, 5, 7 ou 9 minutos. Depois de muitas tentativas se convencem que algo deve estar errado e que talvez esta tarefa seja impossível. De fato ela é mesmo impossível. Vejamos o motivo: como 4 e 6 são números pares, as combinações usando-se soma e subtração sempre resultarão em números pares.

O que aprendemos com isto? Que relação tem este fato com o máximo divisor comum?

Observe que mdc(4,6) = 2 e que não foi possível escrever todos os números inteiros positivos como uma combinação, com somas e subtrações, de 4 e de 6.

Lembremos do Experimento 1: lá tínhamos mdc(2,5) = 1 e conseguimos escrever todos os inteiros positivos como uma combinação, com as operações de soma e subtração, de 2 e de 5.

Na verdade, através deste tipo de combinação, conseguimos produzir somente os múltiplos do máximo divisor comum.

Vamos ver isto com mais calma:

1) Como mdc(2,5) = 1, conseguimos gerar todos os múltiplos de 1, ou seja, qualquer número.
2) Como mdc(4,6) = 2, conseguimos gerar apenas os múltiplos de 2, ou seja, os pares.

Existe, por trás destes fatos, um resultado geral:

"O conjunto de todos os números inteiros obtidos operando-se dois números inteiros a e b, com somas e subtrações quantas vezes quisermos, coincide com o conjunto de todos os múltiplos do mdc(a,b)."

Tente resolver agora o problema abaixo e observe se ele tem conexões com as atividades já estudadas com o uso das ampulhetas.

Problema: Suponha que todas as notas de 1 real e todas as moedas tenham sumido do mercado, restando somente notas de 2 e de 5 reais.

a) Quais são os trocos que podemos fazer com somente notas de 2 e de 5 reais?
b) Se apenas notas de 5 e 10 circularem, quais são os possíveis trocos?

7.3 Como obter o mdc e o mmc por métodos geométricos – três artigos da RPM

7.3.1 UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MDC - RPM 29

Zelci Clasen de Oliveira
Ribeirão Preto, SP

Um dia desses, uma colega trouxe-me uma questão que havia visto num concurso. Era mais ou menos assim:

> *Um terreno retangular* de 221 m *por* 117m *será cercado. Em toda* a volta *desse cercado,* serão *plantadas árvores igualmente espaçadas. Qual o maior espaço possível?*

Respondi logo: — Ora, é um problema de MDC (subentendendo que uma árvore deve ser plantada em cada canto do terreno e o espaço entre as árvores deve ter um número inteiro de metros).

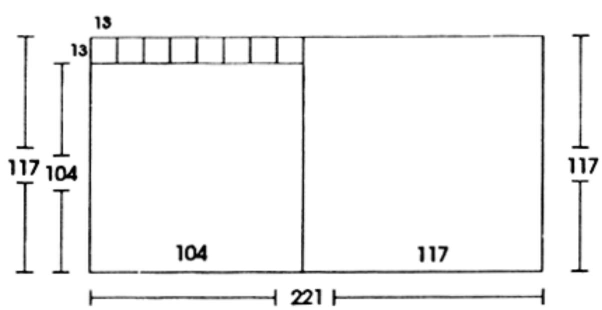
Calculei logo o valor pelo método das divisões sucessivas e obtive o resultado: 13 m.

	1	1	8
221	117	104	13
104	13	0	

A colega disse então que havia proposto o mesmo problema ao pai de um amigo, e que ele havia chegado mentalmente à resposta sem que soubesse explicar como. Na tentativa de adivinhar seu raciocínio, desenhei um retângulo e coloquei suas medidas: 221 e 117.

— Quem sabe ele não pensou: 117 não divide 221. Fazendo a diferença 221 menos 117, encontramos 104. Porém, 104 não divide 117. Fazendo então a diferença 117 menos 104, encontramos 13, que divide 104 e é a resposta do problema.

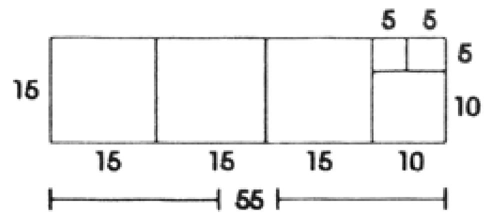
A figura que fiz enquanto falava, mostrava o retângulo original dividido em quadrados: um de lado 117, outro de lado 104 e mais oito quadradinhos de lado 13. Ela ficou assim:



Percebi imediatamente que ali estava o princípio das divisões sucessivas, visto através de uma imagem geométrica. Procurei então enunciar o "método" de encontrar o MDC de dois números que a figura me sugeria e, depois de algumas tentativas, o enunciado que mais me agradou foi o seguinte:

> *Dados dois números naturais* a e b, *construímos um retângulo com essas dimensões. Cobrindo esse retângulo com os maiores quadrados possíveis, o lado do menor quadrado será o* MDC *entre* a *e* b.

Para que todos entendam bem esse enunciado, vou dar mais um exemplo. Observe, na figura ao lado, o retângulo de dimensões 55 e 15. Vamos cobrir esse retângulo com os maiores quadrados possíveis. São três quadrados de lado 15, um quadrado de lado 10 e dois quadrados de lado 5. Isso quer dizer que o MDC entre 5 e 15 é 5.



Simples, não? Foi gratificante encontrar uma forma de ilustrar um procedimento aritmético *usando áreas, mostrando mais uma vez a importância do relacionamento de assuntos diversos da Matemática elementar.*

Dias depois do que acabo de relatar, lendo a História da Matemática, de Carl Boyer, encontro, na página 84, uma referência ao livro dos Elementos de Euclides, que contém, essencialmente, o "método" que imaginei. Diz o seguinte:

> *Dados dois números diferentes, subtrai-se o menor* a *do maior* b *repetidamente até que se obtenha um resto* r_1 *menor do que o menor número; então subtrai-se repetidamente esse resto* r_1 *de a até resultar um resto* r_2 *menor do que* r_1 *então subtrai-se repetidamente* r_2 *de* r_1 *e assim por diante, finalmente, o processo leva a um resto* r_n *que mede* [(2)] r_{n-1} *portanto todos os restos precedentes, bem como a e* b*; esse número* r_n *será o máximo divisor comum de* a *e* b.

Apesar do "achado", considero ainda importante a maneira de abordar a questão através da visualização geométrica, proporcionando a professores e alunos uma interessante alternativa de tratar o assunto.

7.3.2 UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MMC - RPM 32

Mário Lúcio Cardoso
e ***Otânio Alves Gonçalves***
Os autores são analistas da Secretaria da Educação do Estado de Minas Gerais

Após a leitura do artigo do professor *Zelci Clasen de Oliveira*, na **RPM 29**, sobre uma interpretação geométrica do MDC, ficamos pensando sobre a possibilidade de uma interpretação geométrica também para o MMC.

Após algumas tentativas encontramos uma maneira de achar o MMC de dois números naturais *m* e *n*, sem efetuar operações e utilizando apenas a contagem. O método é o seguinte:

1) Tomemos um retângulo *ABCD* de lados *m* e *n*. O retângulo deverá estar subdividido em quadrados unitários.

2) Partindo de um dos vértices do retângulo, traçamos as diagonais dos quadrados unitários observando a seguinte ordem:

a) traçamos a diagonal do quadrado que tem o vértice coincidente com o vértice escolhido do retângulo.

b) traçamos, a partir do vértice no qual paramos, as diagonais dos quadrados que têm um ângulo oposto pelo vértice com o quadrado anterior ou, na ausência desse quadrado, traçamos a diagonal do quadrado ao lado e a partir do vértice onde paramos.

c) As diagonais dos quadrados unitários devem ser traçadas até que se chegue a um dos outros vértices do retângulo *ABCD*.

d) Contamos quantos quadrados tiveram suas diagonais traçadas. O número encontrado é o MMC de *m* e *n*.

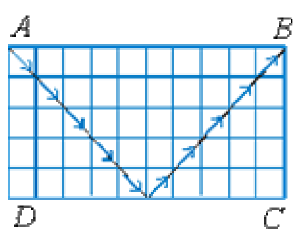
Exemplos:

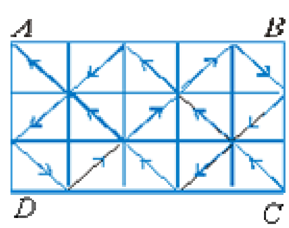
- MMC de 5 e 10 (iniciando, por exemplo, em A).

Observe que 10 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.

- MMC de 3 e 5 (iniciando, por exemplo, em C).

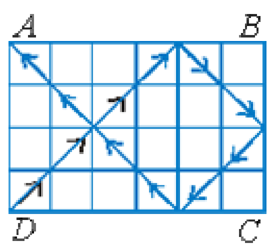
Observe que 15 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.





- MMC de 4 e 6 (iniciando, por exemplo, em D).

Observe que 12 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.



O método se baseia nos fatos: ao partirmos de um vértice do retângulo e chegarmos a um outro vértice desse mesmo retângulo, traçamos diagonais de um número de quadrados que corresponde a um múltiplo tanto de *m* quanto de *n*; parando no primeiro outro vértice do retângulo *ABCD*, estamos determinando o mínimo dentre os múltiplos comuns de *m* e *n*.

7.3.3 COMO OBTER O MDC E O MMC SEM FAZER CONTAS - RPM 51

Marcelo Polezzi
UEMS, MS
mpolezzi@terra.com.br

Há algum tempo atrás tive a oportunidade de ler dois artigos interessantes na **RPM** (ver [1] e [2]), os quais tratam de encontrar métodos geométricos para calcular o MDC e o MMC entre dois números. Fiquei entusiamado e percebi que poderia produzir um novo método, espantosamente simples, que permitisse obter, quase ao mesmo tempo, o MDC e o MMC.

O método baseia-se essencialmente em um artigo que publiquei (ver [3]), que traz uma fórmula explícita para o MDC e o MMC entre dois números. Meu objetivo agora é mostrar como se obtém o MDC e o MMC usando apenas contagem.

O método

1. Considere um retângulo de lados com medidas inteiras *a* e *b*, dividido em quadradinhos unitários.

2. Trace uma das diagonais do retângulo marcando-a nos pontos que são vértices de algum quadradinho unitário.

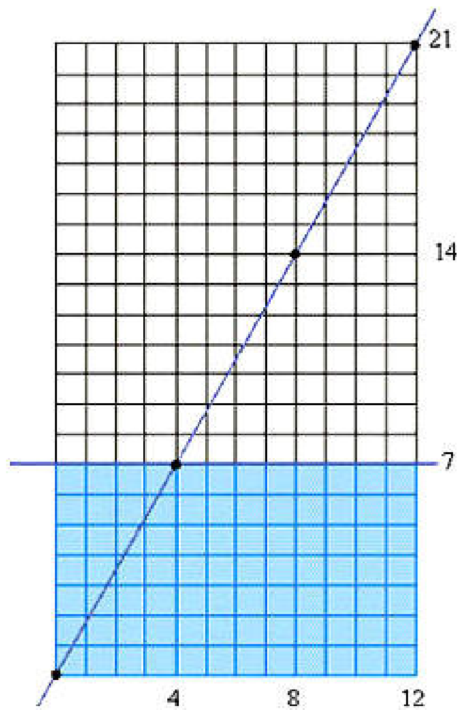
3. Conte em quantas partes esses pontos dividem a diagonal: esse número ***d*** é o MDC(*a*,*b*).

4. Trace linhas verticais (horizontais) passando por cada um dos pontos que você marcou, unindo dois lados opostos do retângulo. Conte o número de quadradinhos unitários existentes em qualquer um dos ***d*** retângulos determinados por essas linhas verticais (horizontais): esse número ***m*** é o MMC(*a*,*b*).

A figura a seguir ilustra o procedimento para $a = 12$ e $b = 21$.

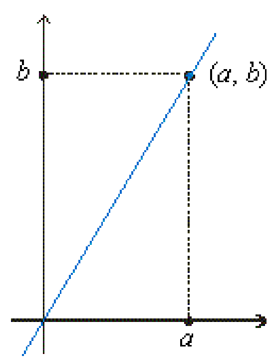
A diagonal está dividida em três partes iguais, logo, 3 = MDC(12,21).

O número de quadradinhos existentes em qualquer um dos três retângulos é 7 x 12, logo 84=MMC(12,21).



Justificativa

Se d = MDC (a,b), existem inteiros u e v tais que $a = du$ e $b = dv$, com u e v primos entre si.



Considerando um sistema de eixos ortogonais com a origem num dos vértices do retângulo, como na figura, a equação da reta que contém a diagonal considerada é $y = \frac{b}{a}x$.

Logo pertencem à diagonal de pontos: $(0,0)$; (u,v) pois $\frac{b}{a} = \frac{v}{u}$; $(2u,2v)$; $\cdots$ $(du,dv) = (a,b)$, ou seja, $d + 1$ pontos de coordenadas inteiras, igualmente espaçados.

Para verificar que são apenas esses os pontos da diagonal com coordenadas inteiras,

suponha que (p,q) pertença a diagonal e tenha coordenadas inteiras. Então, $q = \frac{b}{a}p = \frac{v}{u}p$, o que implica *qu* **=** *vp* e, sendo mdc(*u*, *v*) = 1, vem que *q* = *rv e p* = *ru*, com $0 \le r \le d$.

Logo, a diagonal fica dividida em ***d*** pedaços iguais.

Como os *d* + 1 pontos são igualmente espaçados, os *d* retângulos obtidos no item **4** têm a mesma área ***m***. Logo, ***md*** = ***ab***, o que mostra que *m* = MMC(*a*, *b*), e *m* é também o número de quadradinhos contido nos retângulos.

> **Observação:** Se o interesse for calcular apenas o MMC, basta traçar uma linha vertical passando pelo ponto descrito no item **2** que seja o mais próximo do vértice superior atingido pela diagonal e contar os quadradinhos existentes no menor retângulo determinado por essa linha vertical.

Referências bibliográficas

[1] CARDOSO, M.L.GONÇALVES, O.A. *Uma interpretação geométrica do MMC.* **RPM** 32, p. 27-28.

[2] OLIVEIRA, Z.C. *Uma interpretação geométrica do MDC.* RPM 29, p. 24-26.

[3] POLEZZI, M. *A geometrical method for finding an explicit formula for the greatest common divisor,* The American Mathematical Monthly, vol 104, N5, p. 445-446, 1997.

8. NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Como entender
a estrutura interna
dos números inteiros

Este capítulo é continuação do Capítulo anterior, em que iniciamos o estudo da estrutura do conjunto de números inteiros, desenvolvendo a teoria a partir do Algoritmo da Divisão. Aqui, trabalhamos ainda atividades com MMC e MDC, e o conceito de números primos, culminando com o Teorema Fundamental da Aritmética. O estudo do Algoritmo da Divisão é essencial para motivar a necessidade de se ampliar o campo dos números inteiros para um novo tipo de número, os números racionais e as atividades e os problemas que ilustram o desenvolvimento da teoria deste capítulo são fundamentais para a compreensão de tais números.

8.1 Os Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética

Dentre os números inteiros, existem números especiais. São os números que possuem um mínimo de divisores. Vejamos alguns exemplos:

1. O conjunto dos divisores de 5 é D(5) = { -1, 1, -5, 5}

2. O conjunto dos divisores de 11 é D(11) = { -1, 1, -11, 11}

3. Será que o mesmo ocorre com todos os inteiros? Não, por exemplo, o conjunto dos divisores de 15 é D(15) = { -1, 1, -3, 3, -5, 5, -15, 15}.

É claro que o conjunto dos divisores de um número **a** sempre inclui os quatro números: -1, 1, **-a**, **a**. Quando estes elementos esgotarem o conjunto D(a), diremos que **a** é um **número primo**. Nos exemplos acima, 5 e 11 são primos, mas 15 não é. Embora 15 não seja um número primo, ele pode ser escrito como um produto de dois primos, pois $15 = 3 \times 5$ e os números 3 e 5 são claramente dois números primos.

Um resultado geral que enunciaremos abaixo é conhecido como o Teorema Fundamental da Aritmética ou Teorema da Decomposição Única em Fatores Primos:

Teorema: Todo número inteiro positivo pode ser escrito como um produto de fatores primos, e esta decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.

Ora, se um número for primo, então ele já está "fatorado", isto é, sua decomposição é constituída de um único fator (o próprio número). Se ele não for primo, ele tem divisores diferentes dele mesmo e de 1. Estes divisores são menores do que o próprio número, e cada um deles pode ser primo ou não. Se todos os divisores forem primos, conseguimos a decomposição; se algum divisor não for primo, repetimos o processo para ele, obtendo divisores ainda menores. Este processo sempre termina, pois estamos trabalhando com números inteiros positivos. Isto dá uma ideia de como podemos demonstrar a existência da decomposição em fatores primos.

Para a unicidade da decomposição, procedemos do seguinte modo: se um mesmo número admitir duas decomposições, igualamo-las. Todo fator primo da primeira decomposição deve ser um fator da outra decomposição e, como todos os fatores envolvidos são primos, ele deve coincidir com algum primo da segunda decomposição. Podemos cancelá-los e repetir o mesmo argumento até mostrar que os primos da primeira decomposição são exatamente os primos da segunda.

Exemplos:

1. Quais são os fatores primos positivos de 45?

Como $45 = 9 \times 5$, e $9 = 3 \times 3$, podemos escrever $45 = 3 \times 3 \times 5$. Assim a decomposição em fatores primos de 45 é: $3 \times 3 \times 5$.

2. Qual a decomposição em fatores primos de 13? Como 13 é um número primo sua fatoração é formada por apenas um número: 13.

O esquema abaixo mostra um método usual de se decompor um número em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & \end{array}$$

Neste esquema, o número a ser fatorado (24) é colocado no topo, à esquerda de uma barra vertical. No topo à direita da barra, é colocado o menor número primo (diferente de 1) que seja divisor do número dado. O quociente da primeira divisão é colocado abaixo do primeiro número. No exemplo, temos 12. Repetimos o raciocínio, agora para este quociente, colocando ao lado direito da barra, o menor divisor primo dele. E assim sucessivamente, continuamos o processo até que o último divisor seja, ele mesmo, um número primo. A coluna à direita contém todos os divisores primos do número inicial, e portanto, temos a decomposição em fatores primos.

Como calcular o mdc e o mmc usando decomposição em fatores primos

O Teorema Fundamental da Aritmética permite que usemos decomposições em fatores primos de números inteiros para o cálculo do mmc e do mdc destes números. Como isto pode ser feito?

Comecemos com alguns exemplos:

Exemplo 1: Se a = 45 e b = 20, podemos decompô-los em fatores primos:

$$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$$
$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$$

Vamos usar essas decomposições para calcular o mdc(45, 20) e o mmc(45,20). Vejamos primeiramente o mdc:

Quais são os divisores positivos de 45? São 1, 3, 5, 9, 15 e 45. Se quisermos utilizar potências, esses divisores podem ser escritos como: 1, 3, 5, 3^2, 3×5 e $3^2 \times 5$.

Quais são os divisores positivos de 20? São 1, 2, 4, 5, 10 e 20. Se quisermos utilizar potências, esses divisores podem ser escritos como: 1, 2, 2^2, 5, 2×5 e $2^2 \times 5$.

Quais são os divisores comuns? O número 1 sempre é divisor comum (e se for o único divisor positivo, os números eram chamados de primos entre si, lembra-se?), como 5 é um divisor comum e não existem outros, então mdc(45,20) = 5.

Vamos ainda estudar outro exemplo de mdc:

Exemplo 2: Se a = 54 e b = 63, como:

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$$
$$63 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7,$$

os divisores positivos de 54 são: 1, 2, 3, 3^2, 3^3, 2×3, 2×3^2, 2×3^3 ou seja 1, 2, 3, 9, 27, 6, 18 e 54 e os divisores de 63 são:1, 3, 3^2, 7, 3×7 e $3^2 \times 7$, ou seja 1, 3, 9, 7, 21 e 63.

Os divisores comuns são: 1, 3 e 9. Logo o mdc(54,27) = 9.

Observando estes exemplos vemos que existe uma regra que nos permite encontrar o mdc de dois números, conhecendo-se a suas decomposições em fatores primos.

Regra para o cálculo do máximo divisor comum:

O mdc(a,b) é o produto dos fatores primos que efetivamente aparecem tanto na decomposição de a quanto na de b, cada um deles elevado ao menor dos dois expoentes com que aí aparece.

Usando este método calcule o mdc dos seguintes pares de números:

a) a = 2100 e b = 198

b) $a = 3^2 \times 5^5 \times 7^3$, $b = 3^5 \times 5^3 \times 7^9 \times 11$

Passemos agora ao cálculo do mmc de dois números, utilizando-se a decomposição em fatores primos oferecida pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Vamos utilizar os dois exemplos vistos anteriormente:

Exemplo: $45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

Qualquer múltiplo comum desses dois números deve ter como fatores primos: 2 com expoente 2 ou mais, 3 com expoente 2 ou mais, e 5 com expoente 1 ou mais. Logo o menor dos múltiplos comuns é

$$\text{mmc}(45,20) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 900$$

Exemplo: $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$

$63 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7$

É claro que 2, 3 e 7 devem comparecer como fatores de qualquer múltiplo comum desses dois números, mas com quais expoentes? Não é difícil ver que qualquer múltiplo de 54 e 63, o expoente de 2 dever ser maior ou igual a 1, o expoente de 3 deve ser maior ou igual a 3, e o expoente de 7 deve ser maior ou igual a 1. Assim mmc(54,63) = $2 \times 3^3 \times 7 = 378$.

Existe também uma regra que nos permite encontrar o mmc de dois números, conhecendo-se a suas decomposições em fatores primos.

Regra para o cálculo do mínimo múltiplo comum:
O mmc(a,b) é o produto de todos os fatores primos que efetivamente aparecem na decomposição de a **ou** na de b, cada um deles elevado ao maior expoente com que aí aparece.

Usando esta regra calcule o mmc dos seguintes pares de números:

a) a= 2100 e b= 198

b) a= $3^2 \times 5^5 \times 7^3$, b= $3^5 \times 5^3 \times 7^9 \times 11$

Relação entre o mmc e o mdc

Baseados no que vimos acima é fácil observar que a $\times$ b = mmc(a,b) $\times$ mdc(a,b).

Isto é visto diretamente na decomposição em fatores primos de a e de b. Logo

mmc(a,b) = a $\times$ b / mdc (a,b)

8.2 Atividades que auxiliam no cálculo do mdc e mmc

Divisores, Múltiplos e Decomposição em Fatores Primos – RPM 20

Paulo Argolo
Rio de Janeiro, RJ

E muito comum o aluno chegar à 5.ª série do 1.° grau (6º. ano atualmente) apresentando inúmeras deficiências na aprendizagem de conteúdos básicos de Matemática.

Procuraremos abordar uma dessas deficiências : saber determinar o maior divisor comum (mdc) e o menor múltiplo comum (mmc) de dois ou mais números naturais, não sabendo, entretanto, o que é um divisor nem o que é um múltiplo de um número natural.

Os conceitos de divisor, número primo e múltiplo podem ser bem fundamentados no primeiro segmento do ensino do 1.° grau (fundamental), particularmente na 4.ª série (5º. ano). Parece-nos, contudo, que nessa fase de aprendizagem é ainda cedo para a apresentação de regrinhas práticas para a obtenção do mdc ou do mmc. O essencial nesse momento é uma boa fixação dos conceitos introduzidos; o uso de tais regras acaba impedindo que isso aconteça, transformando o aluno num mero repetidor de processos, completamente mágicos para quem nem de longe desconfia por que razão funcionam. Aliás, as próprias abreviações mdc e mmc, a nosso ver, não deveriam ser utilizadas num primeiro estudo sobre divisores e múltiplos. Nesse estágio inicial são absolutamente desnecessárias e inconvenientes.

Quanto à decomposição em fatores primos, temos observado frequentemente, a ocorrência de um fato interessante:

O aluno costuma aprender na 4.ª série (ou mesmo na 5.ª) que na decomposição, feita pela regra prática, os fatores primos devem surgir necessariamente em ordem crescente. Assim, por exemplo, o número 90 deve ser fatorado como em (1).

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 90 & 3 \\ 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 90 & 5 \\ 18 & 3 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

(1) (2) (3)

Geralmente isso ocorre quando o próprio professor que ensinou o assunto ao aluno desconhece (e não é raro) um relevante teorema de Aritmética: *Todo número natural composto pode ser decomposto de forma única,* a *menos da ordem dos fatores, em produto de fatores primos.*

Portanto, não há nada que impeça decomposições como as feitas em (2) ou (3). O importante é que o aluno saiba que à direita do traço vertical só pode escrever números primos.

Um método para o cálculo do mdc e do mmc – RPM 13

Roberto Ribeiro Paterlini
Universidade Federal de São Carlos

Introdução

Antes de apresentarmos um novo método para o cálculo do **mdc** e do **mmc** de dois números, vamos recordar algumas *definições:* dados os números naturais *a* e *b,* seu **mdc** (= *máximo divisor comum)* é, como o próprio nome indica, o maior dos números que dividem tanto *a* quando *b.* Enquanto seu **mmc** (= *mínimo múltiplo comum)* é o menor dentre todos os números positivos que sejam, simultaneamente, múltiplos de *a* e de *b.* O número 1 é divisor de qualquer número e, se os números *a* e *b* não admitem outro divisor comum, tem-se que **mdc** (a, *b)* = 1 e diz-se, então, que *a* e *b* são *primos entre si.*

O **mdc** e o **mmc** aparecem em vários resultados teóricos e na resolução de problemas, mas, nos nossos cursos, sua mais comum aplicação é no cálculo com frações ordinárias. Embora nesse contexto sua utilização seja dispensável, ao preço de trabalharmos, às vezes, com números maiores, é na hora de simplificar frações que os textos didáticos usam o **mdc** e é na hora de comparar, somar ou subtrair frações, que aparece o **mmc.**

Cálculo de mdc e de mmc

Se os números *a* e *b* estão decompostos em fatores primos, é fácil encontrar a decomposição em fatores primos de seu **mdc** e seu **mmc.** Como exemplo, consideremos os números 2 100 e 198. Ora, como

$$2\,100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \text{e} \quad 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11,$$

qualquer divisor comum a 2100 e 198 só pode ter 2 e 3 como fatores primos e somente com expoentes 0 ou 1. O maior de todos será, então, 2 x 3, isto é

mdc (2 100, 198) = 2 x 3 = 6.

Daí, a regra já conhecida: o **mdc** é o produto dos fatores primos que aparecem tanto na decomposição de *a* quanto na de *b*, cada um deles elevado ao *menor* dos dois expoentes com que aí aparece.

Analogamente, qualquer múltiplo comum a 2 100 e 198 deve ter, como fatores primos: 2 (com expoente $\geqslant$2), 3 (com expoente ente $\geqslant$2), 5 (com expoente $\geqslant$2), 7 (com expoente $\geqslant$1) e 11 (com expoente $\geqslant$deles deve ser 2^2 x 3^2 x 5^2 x 7 x 11, isto é,

$$\textbf{mmc}\ (2\ 100,\ 198) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69\ 300.$$

Daí, a regra: o **mmc** é o produto de todos os fatores primos que aparecem na decomposição de *a* ou na de *b,* cada um deles elevado ao *maior* expoente com que aparece.

2 100	198	2
1 050	99	2
525	99	3
175	33	3
175	11	5
35	11	5
7	11	7
1	11	11
1	1	

O método mais conhecido para o cálculo do *mmc* de dois ou mais números naturais utiliza a decomposição simultânea em números primos. O método é, geralmente, implementado mediante a disposição exemplificada ao lado. E daí, novamente, tem-se **mmc** (2 100, 198) = 2^2 x 3^2 x 5^2 x 7 x 11 = 69 300.

O outro método

Uma variação deste método simplifica os cálculos e fornece, ao mesmo tempo, o **mmc** e o **mdc** dos números. Exemplificamos calculando o **mmc** e o **mdc** dos mesmos números 2 100 e 198:

		2	100	198		2		
		1	050	99		3		
			350	33				
Tem-se **mdc**	(2	100,	198)	**= x**	**2**	3 =	6	e
mmc	(2	100,	198)	=>	6	: 350	**X**	33 = 69 300.

Descrição do novo método

Nesta disposição, um número primo comparece na coluna da direita apenas quando divide *ambos* os números à sua esquerda, na mesma linha. As divisões terminam quando isto não mais for possível, o que significa que encontramos dois números primos entre si nas duas colunas da esquerda.

O **mdc** é o produto dos primos que estão na coluna da direita e o mmc, o produto deste **mdc** pelo dos números primos entre si que restaram na última linha à esquerda.

Justificativa do novo método

Colocando na coluna da direita só os primos que dividem ambos os números da esquerda, estamos, certamente, relacionando fatores primos do mdc. Levando o processo até chegarmos a 2 números primos entre si (que não admitem mais nenhum divisor comum a não ser o 1), teremos esgotado os fatores primos do **mdc.** Assim, o produto 2 x 3 = 6 dos primos da coluna da direita é o **mdc** dos números dados inicialmente. Por outro lado, devido à maneira como se chegou aos números primos entre si, 350 e 33, tem-se que 2 100 = 6 x 350 e 198 = 6 x 33. Então, qualquer múltiplo de 2 100 deve conter os fatores 6 e 350 e qualquer múltiplo de 198 deve conter os fatores 6 e 33; logo, o menor de todos os múltiplos comuns é aquele que se obtém do produto dos fatores 6, 350 e 33. (O leitor observa que é, nesse ponto, que entra o fato de 350 e 33 serem primos entre si, pois se houvesse, ainda, um número diferente de 1, dividindo 6, 350 e 33, então o produto dos três não seria o menor dos múltiplos comuns.)

Observações

1. Os argumentos acima, para justificar o método, no caso particular estudado do cálculo do **mdc** e do **mmc** de 2 100 e 198, se transportam ao caso geral de dois números quaisquer *a* e *b,* sem mudanças significativas, mas sob uma notação muito carregada, a partir da decomposição em fatores primos de *a* e de *b.*

Por isso, deixamos de apresentá-la aqui.

2. Este método se aplica, também, ao cálculo do **mdc** e do **mmc** de mais do que dois números. Deixamos ao leitor a tarefa de fazer as devidas (e poucas) adaptações nos argumentos apresentados.

3. A justificativa exposta acima põe à mostra uma relação importante entre o **mdc,** o **mmc** e o produto de dois números. Com efeito, revendo o processo apresentado, o leitor deduzirá que

$$a \times b = \textbf{mmc}\ (a, b)\ X\ \textbf{mdc}\ (a, b),$$

ou, na forma como é mais utilizada,

$$\text{mmc}(a,b) = \frac{a \times b}{\text{mdc}(a,b)}$$

Uma disposição simplificada do novo método

Uma outra disposição de utilização desse mesmo processo é a seguinte: forma-se uma fração com os dois números dos quais se pretende calcular o **mdc** e o **mmc.** Vai-se simplificando a fração (por divisão pelos fatores primos comuns, de preferência na ordem, para que não se deixe escapar algum) até chegarmos a uma fração irredutível (isto é, com numerador e denominador primos entre si), tendo o cuidado de, a cada passo, anotar (por exemplo, abaixo do sinal de =) o número pelo qual foram divididos os termos da fração. No final do processo, o **mdc** é o produto dos números anotados abaixo do sinal de = , e o **mmc** é o produto deste **mdc** pelo numerador e pelo denominador da fração irredutível. Ou seja,

$$\frac{2\,100}{198} \underset{2}{=} \frac{1\,050}{99} \underset{3}{=} \frac{350}{33}$$

donde **mdc** (2 100, 198) = 2x3 = 6 e **mmc** (2 100, 198) = 6 x 33 x 350 = 69 300.

É claro que o processo acima se torna redundante se estamos procurando o **mdc** entre numerador e denominador de uma fração para efeito de simplificá-la. Isto só reforça, entretanto, a idéia de que não é nesse contexto que o **mdc** apresenta sua força como ferramenta matemática.

Bibliografia

[1] *Arithmetic Teacher,* volume 12, número 4, dezembro de 1984.

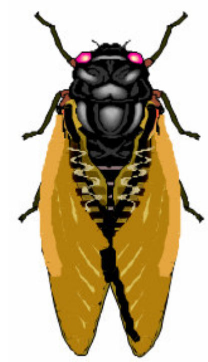
[2] *Elementos de álgebra,* Monteiro, L. H. J. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1969. [3] *Introdução à teoria dos números,* Sidki, S. 10? Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1975.

8.3 Curiosidade acerca dos números primos

Vamos apresentar agora uma bonita aplicação a respeito da relação dos números primos com a natureza:

Cigarra usa número primo para sobreviver

Onde moram as cigarras antes de se fixarem nas árvores e começarem a cantar? Você sabe a resposta?



As cigarras passam quase toda a sua vida debaixo da terra, saindo apenas por duas semanas para se reproduzirem; nesta época elas cantam e depois morrem. Duas espécies de cigarras que vivem nos Estados Unidos estão sendo muito estudadas por cientistas porque elas aparecem simultaneamente depois de treze e dezessete anos respectivamente, provocando destruição e é claro, fazendo um barulho ensurdecedor.

É curioso saber que elas vivem 13 ou 17 anos sob a terra e, de repente surgem todas ao mesmo tempo. Os números 13 e 17 devem guardar algum mistério.

Quando as cigarras saem do solo, elas colocam seus ovos nas árvores, que caem no solo e novas cigarras nascem, agora na forma de ninfas. Estas ninfas entram no solo e vão lentamente se desenvolvendo por mais treze ou dezessete anos e é por isto que ninguém as vê neste período.

Porque será que as cigarras demoram tanto tempo para aparecer? E por que elas saem todas ao mesmo tempo? Uma tentativa de responder a estas questões é a seguinte: quando as cigarras saem do solo, os pássaros se alimentam delas, e se as cigarras aparecessem sempre, o número de pássaros cresceria bastante e as cigarras correriam risco de extinção.

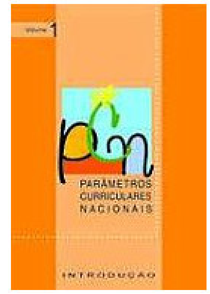
Como as cigarras demoram para sair do chão, os passarinhos não podem contar com elas para sobreviver. É lógico que quando as cigarras saem os pássaros fazem um belo banquete, mas eles não conseguem comer muito de uma única vez, e muitas cigarras sobrevivem. Acontece que a vida dos pássaros é, em geral, menor do que 13 ou 17 anos e eles não têm como se programarem para se saciarem de cigarras, e as chances de sobrevivência das mesmas aumentam muito. Em termos mais detalhados, os predadores de cigarra vivem em ciclos de 2 a 5 anos. Se as cigarras viessem à superfície, por exemplo a cada 15 anos, elas poderiam ser abatidas por um pico populacional de predadores, que ajustariam seus ciclos de vida aos das cigarras, mas como o ciclo de vida das cigarras é um número primo grande, as coincidências são raras.

Embora esta seja uma explicação simplista do que acontece com as cigarras, alguns estudos mostram que de fato, a "escolha" das cigarras por números primos garante sua sobrevivência.

Bem, aqui encerramos nosso Curso. Esperamos que você tenha aprendido bastante e que os materiais apresentados sirvam para motivar e enriquecer a aprendizagem de seus alunos.

Bom trabalho!

REFERÊNCIAS



Baldin, Y., Malagutti, P. – *Os Números Inteiros no Ensino Fundamental* manuscritos LIMC – UFRJ, 2006.

Caetano, P. e Sampaio, J. – *Introdução à Teoria dos Números* – EDUFScar, 2008.

Experimentoteca CDCC USP São Carlos.

Brasil, (1998), *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Matemática, MEC/SEF, Brasília.

Revista do Professor de Matemática.