V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

Folheações de grau um no plano projetivo e matrizes de traço nulo

Flaviano Bahia * & Vivana Ferrer †

1 Introdução

O estudo de folheações holomorfas tem tido um enorme avanço nos últimos tempos. Trabalhos de J.P. Jouanolou, D. Cerveau, A. Lins-Neto, J.V. Pereira, F. Cukierman, O. Calvo-Andrade, X. Gómez-Mont e outros focam o interesse em aspectos globais, estudando questões como a (não-)existência de soluções algébricas, descrição das componentes dos espaços de folheações de codimensão ≥ 1, etc.

Nosso ponto de vista segue o da geometria enumerativa clássica, onde são consideradas perguntas tais como: *Quantas curvas passam por uma quantidade apropriada de pontos em posição geral? Achar o grau do espaço de curvas planas tendo uma singularidade de odem dado, etc.* Em este trabalho consideramos perguntas similares para espaços de folheações .

Vamos nos centrar no caso de folheações (=campos vetoriais) de grau um no plano projetivo complexo. O espaço de campos vetoriais de grau um no plano projetivo forma um espaço projetivo de dimensão 7, $\mathbb{P}^7$. As singularidades de um campo vetorial são os pontos onde o campo se anula, i.e., nas singularidades não temos uma direção determinada. Existem vários tipos de singularidades, que definiremos no trabalho.

Queremos estudar que tipos de singularidades podem aparecer em uma folheação de grau um (campo vetorial de grau um), e os subespaços de $\mathbb{P}^7$ de campos vetoriais que apresentam alguma singularidade de cada um desses tipos. Fixado um tipo de singularidade, vamos descrever as folheações que apresentam esse tipo de singularidade assim como um espaço de parâmetros para campos apresentando tal tipo de singularidades, e calcular codimensão e grau deste espaço em $\mathbb{P}^7$.

O grau do espaço $M \subset \mathbb{P}^7$ de campos vetoriais com singularidade de tipo dado tem a seguinte interpretação geométrica: é o número de campos vetoriais $\mathcal{X}$ apresentando uma singularidade do tipo prefixado e que são tangentes a um número adequado (= cod$M$) de retas com um ponto marcado, i.e., o campo $\mathcal{X}(p)$ é paralelo a ℓ, para um número adequado de pares (ponto, reta) no conjunto $\{(p, \ell) \mid p \in \ell\}$.

O caso de campos vetoriais de grau um, se simplifica usando a correspondência existente (provada por Jouanoulou [5]) entre campos de grau um e matrizes 3×3 de trazo nulo. Mostraremos como é obtida esta correspondência e faremos um dicionário entre folheações de grau um e matrizes. Em particular, mostraremos os tipos de singularidades que correspondem com as possíveis formas de Jordan para matrizes.

Explorando esta correspondência, obteremos o grau dos espaços de campos vetoriais com singularidade de tipo prefixado, olhando para eles como espaços de matrizes com determinada forma de Jordan. O grau dos estratos determinados por forma de Jordan são conhecidos, mas nos casos mais simples mostraremos com é obtido esse grau.

Esperamos que este trabalho seja uma útil (e pela vez compreensível) introdução a problemas enumerativos, assim como ao estudo da geometria dos espaços de folheações.

No trabalho daremos todas as definições necessárias, num nível adequado para um aluno de final de graduação.

Serão necessarios conhecimentos básicos de álgebra linear, polinômios em várias variáveis, campos de vetores e 1-formas diferenciais.

*UFSJ, MG, Brasil, bahia_flaviano@yahoo.com.br
†IMPA, RJ, Brasil, vivisferrer@gmail.com

Referências para o estudo de folheações são as notas de Gómez-Mont e Ortíz Bobadilla [4] ou o livro de Lins-Neto e Scardua [6]. Para o estudo de folheações (de grau quaisquer) desde o ponto de vista enumerativo, ver a tese [2].

A seguir detalhamos o conteúdo de cada seção .

Na Seção 2 começaremos definindo o plano projetivo $\mathbb{P}^2$, o qual será o ambiente onde trabalharemos. Definiremos também campo de vetores em $\mathbb{P}^2$, discutiremos suas expressões globais e locais e como obter uma expressão a partir da outra. Isto motivará a definição de folheação holomorfa de dimensão um. Calcularemos a dimensão do espaço de campos de vetores de grau d em $\mathbb{P}^2$. Ainda no capítulo 2 serão estudados 1-formas diferenciáveis e como uma 1-forma pode estar relacionada com um campo de vetores. Assim definiremos também uma folheação holomorfa de dimensão um em $\mathbb{P}^2$ através de uma 1-forma. Dada uma folheação definida por um campo de vetores, mostraremos como encontrar a expressão de uma 1-forma que define a mesma folheação e também mostraremos o caminho inverso.

Na Seção 3 definiremos singularidade de um campo de vetores e de uma 1-forma, e mostraremos que um campo de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ genérico tem 3 singularidades. A partir daí classificaremos estas singularidades e apresentaremos exemplos de campos de vetores que apresentam cada um dos tipos de singularidades.

Na Seção 4 mostraremos o isomorfismo existente entre campos de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ e matrizes 3×3 de traço nulo. Exploraremos este isomorfismo para dar uma relação com a classificação de singularidades feitas no capítulo 3 com as possíveis formas de Jordan de uma matriz 3×3 de traço nulo.

Por fim, na Seção 5 calcularemos a dimensão e o grau de cada subvariedade do espaço das folheações que apresenta cada um dos tipos de singularidades.

2 Folheações em $\mathbb{P}^2$.

2.1 O plano projetivo.

Nesta seção vamos definir e estudar o plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{CP}^2$. Uma excelente referência para estudar o plano projetivo e curvas planas é o livro de Fulton [3].

Como motivação para definir o plano projetivo $\mathbb{P}^2$, vamos começar definindo o plano afim $\mathbb{A}^2 := \mathbb{C}^2$ e conhecendo um pouco de curvas algébricas.

Uma curva algébrica de grau k no plano afim é o conjunto de zeros de um polinômio $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ de grau k. A motivação para se definir o plano projetivo é que queremos que dadas duas curvas em 2 de grau k_1 e k_2 respectivamente, elas tenham k_1k_2 pontos de interseção. Observe no plano afim o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. *Sejam as curvas $x + y + 1 = 0$ e $x + y - 1 = 0$. Temos que em $\mathbb{A}^2$ a interseção entre elas é vazia, mas por outro lado ambas curvas são de grau 1, logo queremos que a interseção delas seja 1 ponto.*

Observando geometricamente, temos que as duas curvas citadas acima são duas retas paralelas. Então a ideia de definir o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ será a de compactificar o plano afim $\mathbb{A}^2$, adicionando um ponto para cada direção no plano afim (este ponto será a interseção das retas, o que elas tem em comum).

Definição de plano projetivo. Uma maneira de se fazer isso é definir $\mathbb{P}^2$ como sendo o conjunto de todas as retas passando pela origem em $\mathbb{C}^3$. Representaremos este conjunto como sendo o quociente de $\mathbb{C}^3\backslash\{0\}$ por uma relação de equivalência que identifica (z_0, z_1, z_2) com (w_0, w_1, w_2) se e só se existe $\lambda \neq 0$ tal que $(z_0, z_1, z_2) = \lambda(w_0, w_1, w_2)$. Vamos representar a classe de equivalência que contém (z_0, z_1, z_2) por $(z_0 : z_1 : z_2)$. Daí temos

$$\mathbb{P}^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2); (z_0, z_1, z_2) \neq (0, 0, 0)\}$$

Veremos $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (1 : x : y) \end{array}$$

Isto nos leva a perceber que $\mathbb{P}^2$ pode descrito como a união de 3 conjuntos que são isomorfos a $\mathbb{A}^2$, a saber:

$$U_i := \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2; z_i \neq 0\}$$

Temos $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ e os conjuntos U_i são chamados de abertos coordenados. Os isomorfismos entre U_i e $\mathbb{A}^2$ são dados da seguinte maneira:

Para $i = 0$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 : & U_0 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (z_0 : z_1 : z_2) & \mapsto & (\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}) \end{array}$$

Para $i = 1$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & U_1 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (z_0 : z_1 : z_2) & \mapsto & (\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}) \end{array}$$

Para $i = 2$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 : & U_2 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (z_0 : z_1 : z_2) & \mapsto & (\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) \end{array}$$

Quando denotamos um ponto $p \in U_i$ pelas coordenadas dadas por $\varphi_i(p)$ dizemos que p está escrito em coordenadas locais. No caso especial em que $i = 0$ escreveremos $p = (x, y)$.

Associada a cada aberto U_i, em $\mathbb{P}^2$ temos sua correspodente *reta no infinito* ℓ_i definida pela equação $z_i = 0$. Assim $\mathbb{P}^2$ pode também ser pensado como a *completação* de U_i com a reta no infinito ℓ_i. Por exemplo completando o aberto U_0 obtemos

$$\mathbb{P}^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_0 \neq 0\} \cup \{(0 : z_1 : z_2)\} = U_0 \cup \ell_0.$$

Curvas algébricas em $\mathbb{P}^2$. Façamos a seguinte pergunta agora: como são as curvas algébricas em $\mathbb{P}^2$?

Baseados na ideia de curvas algébricas em $\mathbb{A}^2$ parece natural definir uma curva algébrica em $\mathbb{P}^2$ como sendo os zeros de um polinômio em $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$, mas observe que isto pode gerar algum problema, pois temos diferentes maneiras de representar um mesmo ponto. Por exemplo, seja $F(z_0, z_1, z_2) = z_1 + z_2 + 1$ e o ponto $(1 : 0 : -1) = (2 : 0 : -2)$, então temos $0 = F(1, 0, -1) \neq F(2, 0, -2) = -1$. Logo os zeros de este polinômio não definem um subconjunto em $\mathbb{P}^2$. A condição para que os zeros de um polinômio $F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ defina um subconjunto de $\mathbb{P}^2 = \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$ é que se um ponto anula F, todos os pontos equivalentes pela relação $\sim$ também anulem F i.e., $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ implica $F(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Para isso vamos definir polinômios homogêneos.

Definição 2.1. *Dizemos que um polinômio $F(z_0, z_1, z_2)$ é homogêneo de grau d se*

$$F(z_0, z_1, z_2) = \sum_{i+j+l=d} a_{ijl} z_0^i z_1^j z_2^l.$$

Isto implica que $\lambda^d F(z_0, z_1, z_2) = F(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2)$.

Assim se F é um polinômio homogêneo e F se anula em (z_0, z_1, z_2), então F se anula em qualquer representante do ponto $(z_0 : z_1 : z_2)$. Com isto podemos definir uma curva algébrica em $\mathbb{P}^2$ de grau k como sendo os zeros de um polinômio homogêneo de grau k em $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$.

Notaremos $Z(F) = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid F(z_0 : z_1 : z_2) = 0\}$ à curva definida por F.

Exercício 2.1. ***Relação de Euler:*** *Mostre que se $F(z_0, z_1, z_2)$ é um polinômio homogêneo de grau d então vale a igualdade:*

$$z_0 \frac{\partial F}{\partial z_0} + z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} = dF$$

Dica: *Mostre primeiro para o monômio $a_{ijl} z_0^i z_1^j z_2^l$.*

Notação. Em todo o trabalho, S_d denotará o conjunto de polinômios homogêneos de grau d em três variáveis.

Homogeneização. Dado um polinômio $f \in \mathbb{C}[x,y]$ de grau d, vamos dizer que $F \in \mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]$ é a homogeneização de f em z_0 quando $F = z_0^d f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$. Leitor, mostre que F é homogêneo.

Com este processo de homogeneização, estamos adicionando um ponto (completando) as curvas definidas em U_0. Por exemplo, voltando ao exemplo 2.1, consideremos as retas $\ell_1 = Z(x+y+1)$ e $\ell_2 = Z(x+y-1)$, homogeneizando obtemos curvas definidas pelos polinômios

$$F_1 := z_1 + z_2 + z_0 \text{ e } F_2 := z_1 + z_2 - z_0$$

Observe que agora estas curvas se intersectam no ponto $(0:1:-1)$, que representa a direção comum de ℓ_1 e ℓ_2. O ponto $(0:1:-1)$ não está na carta U_0, ele está de fato na reta no infinito correspondente a U_0 (i.e. $Z(z_0)$).

Exemplo 2.2. *Mais um exemplo, considere as curvas de grau dois definidas em U_0, por*

$$f_1 := x^2 - y^2 - x = 0$$

e

$$f_2 := x - y = 0,$$

queremos ter dois (= $grau(f_1)grau(f_2)$) pontos na interseção . Em principio só temos o ponto $(0,0)$ na interseção, leitor: verifique.

Homogeneizando obtemos $F_1 := z_1^2 - z_2^2 - z_1 z_0$ e $F_2 := z_1 - z_2$, estas duas curvas se intersetam nos pontos $(1:0:0) \in U_0$ (que já tinhamos) e $(0:1:1)$, que está na reta no infinito da carta U_0.

Dado um polinômio $F(z_0,z_1,z_2)$ homogêneo, dizemos que $f(x,y) := F(1,x,y)$ é a desomogeneização de F na variável z_0. Este é o processo inverso da homogeneização , e permite ver localmente as curvas definidas em $\mathbb{P}^2$.

Espaço tangente a $\mathbb{P}^2$. Definimos o espaço tangente a um ponto $p \in U_i$ como sendo $T_p\mathbb{P}^2 := T_{\varphi_i(p)}\mathbb{C}^2$.

Quando $p \in U_0$, denotaremos $\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p)\right\}$ uma base de $T_p\mathbb{P}^2$.

O espaço projetivo de dimensão n. Por fim, definimos $\mathbb{P}^n$ como sendo o conjuntos de todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{C}^{n+1}$. Igualmente a $\mathbb{P}^2$, representaremos $\mathbb{P}^n = \{(z_0 : z_1 : \cdots : z_n) \mid (z_0, z_1, \cdots, z_n) \neq 0\}$. Pode se encontrar uma cobertura de $\mathbb{P}^n$ por abertos coordenados, analogo ao feito para $\mathbb{P}^2$. Ver Fulton [3].

2.2 Campos vetoriais em $\mathbb{P}^2$.

Um campo de vetores é uma correspondência $\mathcal{X}$ que associa a cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$, uma direção tangente $\mathcal{X}(p) \in \mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$. Permitiremos que esta correspondência se anule em alguns pontos (em um conjunto finito de pontos).

Dependendo da regularidade (continua, diferenciável, holomorfa, polinomial, etc) desta correspondência o campo chama-se continuo, diferenciável, holomorfo, polinomial, etc.

Trabalharemos com campos que são polinomiais, e não escreveremos mais a palavra polinomial.

Em cada aberto coordenado, um campo é dado por dois polinômios b_1, b_2 nas coordenadas locais.

Se (x,y) são coordenadas locais de U_0 e notamos $\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p)\}$ uma base de $\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$ temos

$$\mathcal{X}(p) = b_1(p)\frac{\partial}{\partial x}(p) + b_2(p)\frac{\partial}{\partial y}(p).$$

Aceitaremos o fato de que esta base $\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p)\}$ varia regularmente com o ponto p, e escrevemos $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ desconsiderando o ponto p.

Se a reta no infinito da carta U_0 (i.e. $\ell_0 := Z(z_0)$) não é solucão de $\mathcal{X}$, então dizemos que o campo acima tem grau d, onde $d = \max_{i=1,2}\{grau(b_i)\} - 1$, este é o caso geral. Se a reta no infinito é solução, então o grau é $\max_{i=1,2}\{grau(b_i)\}$.

Descrição global de um campo. Note que a definição de campo de vetores acima é dada apenas em um aberto coordenado, isto nos motiva a perguntar se é possível dar uma descrição global de um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$. Veremos agora que isto é possível.

Para isto definimos $\left\{\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right\}$ a base de $T_0\mathbb{C}^3$, onde $0 = (0, 0, 0)$.

Um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ é dado por três polinômios homogêneos de igual grau (que denotaremos d) F_0, F_1, F_2, nas variáveis $\{z_0, z_1, z_2\}$:

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2} \tag{2.1}$$

Em princípio $\mathcal{X}$ define um campo em $\mathbb{C}^3$. Para obter um campo em $\mathbb{P}^2$ é relevante observar que na construção de $\mathbb{P}^2$ identificamos vetores de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ que se encontram na mesma reta pelo origem. Isto implica que o campo radial

$$R := z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

é o campo nulo em $\mathbb{P}^2$.

Logo a representação de um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ não é única, pois o campo (2.1) pode ser representado por $\mathcal{X} + GR$, onde G é quaisquer polinômio homogêneo de grau $d - 1$.

Uma forma de evitar esta falta de unicidade, é trabalhar com campos que tenham divergência zero, isto é, se escolhemos $\mathcal{X}$ como em (2.1) e com divergência zero este é único no conjunto $\{\mathcal{X} + GR \mid G \in S_{d-1}\}$.

A divergência de um campo como em (2.1) é por definição

$$\mathrm{Div}(\mathcal{X}) := \frac{\partial F_0}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}.$$

Lema 2.1. *Se $\mathcal{X}$ tem divergência zero, e $\mathcal{X}'$ é outro representante do mesmo campo em $\mathbb{P}^2$ com divergência nula, então $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$*

Prova: Suponha que $\mathcal{X}$ tem divergência nula, e $\mathcal{X} + GR$ é outro representante do mesmo campo em $\mathbb{P}^2$. Temos

$$\mathrm{Div}(\mathcal{X} + GR) = \mathrm{Div}(\mathcal{X}) + \mathrm{Div}(GR) = 0 + \frac{\partial G z_0}{\partial z_0} + \frac{\partial G z_1}{\partial z_1} + \frac{\partial G z_2}{\partial z_2} =$$

$$z_0\frac{\partial G}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial G}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial G}{\partial z_2} + 3G = (d + 2)G.$$

A última igualdade foi obtida da relação de Euler: Se G é um polinômio homogêneo de grau n, então vale

$$z_0\frac{\partial G}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial G}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial G}{\partial z_2} = nG.$$

Concluímos então que $\mathrm{Div}(\mathcal{X} + GR) = 0$ se e somente se $G = 0$, i.e., o único representante do campo em $\mathbb{P}^2$ com divergência zero é $\mathcal{X}$. ∎

Expressão local de um campo. Dado um campo em sua expressão global, como encontrar uma expressão local deste campo? Discutiremos agora este procceso.

Também veremos o processo inverso (i.e., dado um campo em sua forma local, como obter sua forma global) na seção 2.6. Se $\mathcal{X}$ é como em (2.1), podemos deduzir a forma local do campo em U_0 como segue. Sejam (x, y) as coordenadas locais de U_0, i.e., $x = \frac{z_1}{z_0}$ e $y = \frac{z_2}{z_0}$ e $(z_0 : z_1 : z_2) = (1 : x : y)$.

Lema 2.2. *A forma local do campo $\mathcal{X}$ em (2.1), é dada, nas coordenadas locais (x, y) por*

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Onde $f_i(x, y) := F_i(1, x, y)$.

Prova: Começamos por observar que esta forma local não depende do representante. De fato, se $\mathcal{X}+GR$ é outro representante, então a forma local seria

$$[(f_1+xg)-x(f_0+g)]\frac{\partial}{\partial x}+[(f_2+yg)-y(f_0+g)]\frac{\partial}{\partial y}=(f_1-xf_0)\frac{\partial}{\partial x}+(f_2-yf_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $g(x,y):=G(1,x,y)$.

Seja então $\mathcal{X}=F_0\frac{\partial}{\partial z_0}+F_1\frac{\partial}{\partial x}+F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$.

A expressão de $\mathcal{X}$ em U_0 é a mesma que a de $z_0\mathcal{X}$, e a mesma que a de

$$z_0\mathcal{X}-F_0R=(z_0F_1-z_1F_0)\frac{\partial}{\partial z_1}+(z_0F_2-z_2F_0)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

que é $(f_1-xf_0)\frac{\partial}{\partial x}+(f_2-yf_0)\frac{\partial}{\partial y}$ simplesmente trocando $(z_0:z_1:z_2)$ por $(1,x,y)$. ■

Quando trabalhamos com campos de vetores, estamos interessados nas direções tangentes determinadas pelo campo, e não no "comprimento" dos vetores $\mathcal{X}(p)$. Logo vamos a considerar dois campos que diferem em um múltiplo escalar como iguais: $\mathcal{X}\sim\lambda\mathcal{X}$ para todo $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Com todas as considerações anteriores podemos dar a definição de campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ com a que trabalharemos em estas notas.

Definição 2.2. *Um campo de vetores (folheação) em $\mathbb{P}^2$ é dado (a menos de multiplos não nulos) por um trio de polinômios homogêneos do mesmo grau (F_0,F_1,F_2) satisfazendo a seguinte relação*

$$\frac{\partial F_0}{\partial z_0}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}=0.$$

2.3 O espaço de campos vetoriais de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Se consideramos a definição acima, e consideramos bases para os espaços de polinômios homogêneos de grau d podemos contar o número de parâmetros necessários para obter um campo de vetores. Logo teremos um espaço vetorial onde "moram" os campos (sem desconsiderar ainda os múltiplos complexos).

Começamos calculando a dimensão de S_d.

Lema 2.3. *A dimensão do espaço vetorial formado pelos polinômios homogêneos de grau d em três variáveis é igual a $\binom{d+2}{2}=\frac{(d+2)(d+1)}{2}$.*

Prova: A afirmação é clara para $d=1$. Procedemos por indução em d, se H é um polinômio homogêneo de grau d nas variáveis z_0,z_1,z_2, então podemos escrever de forma única

$$H=z_0H_0+z_1H_1+\lambda z_2^d,$$

onde H_0 é um polinômio de grau $d-1$ nas variáveis z_0,z_1,z_2 e H_1 é um polinômio de grau $d-1$ nas variáveis z_1,z_2. Por indução o número de coeficientes de H_0 é $\binom{d+1}{2}$. Por outro lado é fácil mostrar que o número de coeficientes de H_2 é d. Logo o número de coeficientes de H é $\binom{d+1}{2}+d+1=\binom{d+2}{2}$. ■

Temos então que o número de parâmetros necessários para definir o trio de polinômios homogêneos de grau d, (F_0,F_1,F_2) (= à dimensão do espaço vetorial onde "mora" o trio) é $3\binom{d+2}{2}$.

Consideramos agora a condição da anulação da divergência no trio (F_0,F_1,F_2), i.e.,

$$\frac{\partial F_0}{\partial z_0}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}=0. \tag{2.2}$$

O número de equações que tem que satisfazer os coeficientes do trio e igual a dimensão do espaço de polinômios homogêneos de grau $d-1$. Pois satisfazer (2.2) equivale a zerar o polinômio homogêneo de grau $d-1$, $\frac{\partial F_0}{\partial z_0}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}$ de onde obtemos $\binom{d+1}{2}$ equações independentes.

Com estas considerações temos provado a seguinte proposição.

Proposição 2.1. *A dimensão do espaço vetorial V dos campos de grau d em $\mathbb{P}^2$ é*

$$3\binom{d+2}{2} - \binom{d+1}{2} = (d+1)(d+3).$$

$\blacksquare$

Como estamos interessados só na direção dos vetores definidos por um campo, desconsideramos múltiplos escalares. Esto é, consideramos agora a identificação de campos que diferem em um multiplo complexo não nulo e obtemos que o espaço de folheações de grau d se identifica ao espaço projetivo das retas que passam pela origem de V, i.e., $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$, onde $N = (d+1)(d+3) - 1$.

No caso em que estamos interessados em este trabalho $d = 1$, obtemos que o espaço de folheações de grau um em $\mathbb{P}^2$ é um espaço projetivo de dimensão 7, $\mathbb{P}^7$.

2.4 1-formas em $\mathbb{P}^2$

Até agora definimos folheações através de campos de vetores. Nosso objetivo agora é definir folheações holomorfas através de 1-formas diferenciáveis. Para isso vamos relembrar conceitos de álgebra linear.

Espaço Dual. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$, vamos definir o espaço vetorial dual a V como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares de V e denotaremos de $V^\vee$.

$$V^\vee = \{\omega : V \to \mathbb{C}; w \text{ é linear}\}.$$

Leitor, verifique que $V^\vee$ é um espaço vetorial.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, chama-se base dual de $\mathcal{B}$ à base do espaço vetorial $V^\vee$ formada pelos funcionales lineares $\omega_i : V \to \mathbb{C}$ tais que $\omega_i(v_j) = \delta_{i,j}$. Isto é

$$\omega_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i =\neq j \end{cases}$$

Assim, se um vetor $v \in V$ se expressa na base $\mathcal{B}$ como

$$v = \sum_i a_i v_i$$

temos que $a_j = \omega_j(v)$. Leitor: verifique este fato!

Observe que se para cada elemento $\omega \in V^\vee$, consireramos $\ker \omega \subset V$, obtemos que cada elemento $\omega \in V^\vee$ define um subespaço linear de codimensão um (i.e. um hiperplano de V).

Espaço Cotangente. Definimos o espaço cotangente a $\mathbb{P}^2$ em um ponto $p \in \mathbb{P}^2$, como o espaço vetorial dual do tangente e vamos denotar

$$\Omega_p := (\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2)^\vee$$

No aberto coordenada U_0 com as coordenadas locais (x, y) de $\mathbb{P}^2$, e denotando como antes

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p)\right\}$$

a base de $\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$, denotaremos

$$\{d_p x, d_p y\}$$

a correspondente base dual, i.e., os funcionais lineares definidos por

$$\begin{cases} d_px(\frac{\partial}{\partial x}(p)) = 1, \\ d_px(\frac{\partial}{\partial y}(p)) = 0, \\ d_py(\frac{\partial}{\partial y}(p)) = 1, \\ d_py(\frac{\partial}{\partial x}(p)) = 0, \end{cases}$$

Também esta base varia regularmente com $p \in \mathbb{P}^2$, e notaremos $\{dx, dy\}$ a base que em cada ponto p é $\{d_px, d_py\}$.

1-formas. Análogo à definição de campo de vetores, definimos uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ como uma correspondência ω que associa a cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$, um funcional $\omega(p) \in \Omega_p$. Trabalharemos com 1-formas polinomiais, i.e., a correspondência acima depende polinomialmente de p.

Como no caso de campos de vetores vemos como representar uma 1-forma no aberto U_0 utilizando as coordenadas locais (x, y). Neste aberto uma 1-forma é dada por dois polinômios $a_1(x, y), a_2(x, y)$:

$$\omega = a_1dx + a_2dy$$

Descrição global de uma 1-forma. Vamos agora estender uma 1-forma dada em sua expressão local, a uma forma global em $\mathbb{P}^2$.

Começaremos definindo $\Omega_0\mathbb{C}^3 := (\mathcal{T}_0\mathbb{C}^3)^\vee$ e denotemos $\{dz_0, dz_1, dz_2\}$ a base de $\Omega_0\mathbb{C}^3$ dual da base $\{\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\}$ de $\mathcal{T}_0\mathbb{C}^3$.

Observe que $x = \frac{z_1}{z_0}$ e $y = \frac{z_2}{z_0}$, daí $dx = \frac{z_0dz_1 - z_1dz_0}{z_0^2}$ e $dy = \frac{z_0dz_2 - z_2dz_0}{z_0^2}$.

Mudando de variáveis temos a igualdade

$$\omega = a_1dx + a_2dy = \frac{1}{z_0}\left[\left(-\frac{z_1}{z_0}a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right)dz_0 + a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)dz_1 + a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)dz_2\right]$$

desconsiderando o múltiplo $\frac{1}{z_0}$ temos a 1-forma

$$\left(-\frac{z_1}{z_0}a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right)dz_0 + a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)dz_1 + a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)dz_2$$

Seja $d = \max_{i=1,2}\{\text{grau}(a_i)\}$. Definimos

$$A_0 := z_0^{d+1}\left(-\frac{z_1}{z_0}a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right)$$
$$A_1 := z_0^{d+1}a_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$$
$$A_2 := z_0^{d+1}a_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$$

Veja que A_0, A_1 e A_2 são polinômios homogêneos nas variáveis $\{z_0, z_1, z_2\}$ e de mesmo grau $d+1$. Ainda temos que A_0, A_1 e A_2 satisfazem a relação $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$.

Assim uma 1-forma polinomial (de grau d) em $\mathbb{P}^2$ é dada por três polinômios homogêneos de grau $d+1$ nas variáveis $\{z_0, z_1, z_2\}$ que denotaremos A_0, A_1, A_2.

$$\omega := A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2 \tag{2.3}$$

que satisfazem a seguinte relação

$$z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0. \tag{2.4}$$

Veremos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.3. *Dada a* 1*-forma* $\omega = xdx + ydy$ *definida em* U_0*, queremos encontrar uma expressão global para esta forma em* $\mathbb{P}^2$*. Temos que* $a_1(x,y) = x$ *e* $a_2(x,y) = y$*, daí temos*

$$A_0 = z_0^2\left(-\frac{z_1}{z_0}a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) - \frac{z_2}{z_0}a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right)\right) = z_0^2\left(-\frac{z_1}{z_0}\frac{z_1}{z_0} - \frac{z_2}{z_0}\frac{z_2}{z_0}\right) = -z_1^2 - z_2^2$$

$$A_1 = z_0^2 a_1\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) = z_0 z_1$$

$$A_2 = z_0^2 a_2\left(\frac{z_1}{z_0},\frac{z_2}{z_0}\right) = z_0 z_2$$

Daí uma expressão global para ω *é*

$$\omega = (-z_1^2 - z_2^2)dz_0 + z_0z_1dz_1 + z_0z_2dz_2$$

Expressão local de uma 1-forma. Vamos fazer agora o processo inverso, isto é, dado uma 1-forma na sua expressão global em $\mathbb{P}^2$, queremos encontrar sua expressão local em U_0.

Se ω é como em (2.3), fazendo a mudança de variáveis $(z_0 : z_1 : z_2) = (1 : x : y)$ no aberto coordenado U_0, obtemos a forma local da 1-forma em U_0.

Lema 2.4. *A forma local do campo* ω *em (2.3), é dada, nas coordenadas locais* (x, y) *de* U_0*, por*

$$\omega_{U_0} = a_1dx + a_2dy.$$

Onde $a_i(x,y) := A_i(1,x,y)$*.*

Prova: Fazemos a mudança de variáveis $x = \frac{z_1}{z_0}$ e $y = \frac{z_2}{z_0}$. Usando as regras de derivação obtemos

$$\begin{cases} dz_1 = z_0dx + xdz_0, \\ dz_2 = z_0dy + ydz_0 \end{cases}$$

Substituindo estas identidades em (2.3) obtemos:

$$\omega_{U_0} = z_0A_1dx + z_0A_2dy + (A_0 + xA_1 + yA_2)dz_0.$$

Agora, pela condição (2.4), os polinômios A_0, A_1, A_2 satisfazem $A_0 + xA_1 + yA_2 = 0$ o que prova a afirmação.
■

1-formas como distribução de direções. Lembrando que se ω é uma 1-forma e $p \in \mathbb{P}^2$, então $\omega(p)$ é um funcional linear em $\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$:

$$\omega(p) : \mathcal{T}_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{C}$$

Temos que o núcleo deste funcional linear $\mathrm{Ker}(\omega(p))$, será uma reta de $\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$ passando pela origem. Deste modo obtemos uma correspondência $p \mapsto \mathrm{Ker}(\omega(p))$, que associa a cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$ uma reta em $\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$. Uma correspondência deste tipo chama-se distribuição de subespaços tangentes, em este caso trata-se de uma distribuição de retas tangentes.

Logo uma distribução polinomial de vetores tangentes a $\mathbb{P}^2$ pode ser dada tanto por um campo, como na seção anterior, como por uma 1-forma. Explicitamente, para cada $p \in \mathbb{P}^2$, podemos definir um vetor de $\mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$ como a direção $\mathcal{X}(p)$ ou como um vetor em $\mathrm{Ker}(\omega(p))$. Assim se um campo de vetores e uma 1-forma definem a mesma distribução de vetores devemos ter que para cada $p \in \mathbb{P}^2$ então $\mathcal{X}(p) \in \mathrm{Ker}(\omega(p))$, isto é:

$$\omega(p)(\mathcal{X}(p)) = 0 \ \ \forall p \in U_0.$$

Se escrevemos em coordenadas locais $\mathcal{X} = b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y}$ e $\omega = a_1 dx + a_2 dy$. Da definição de bases duais obtemos a relação

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0. \tag{2.5}$$

Verifique.

Analogamente ao caso de campos, quando trabalhamos com 1-formas, estamos interessados em $\mathrm{Ker}(\omega) = \mathrm{Ker}(\lambda\omega)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Assim obtemos a definição correta de folheação definida por uma 1-forma.

Definição 2.3. *Uma folheação de grau d, definida por uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ é dada (a menos de múltiplos não nulos) por um trio de polinômios homogêneos de grau $d+1$, A_0, A_1, A_2 satisfazendo a relação (2.4)*

$$z_0 A_0 + z_1 A_1 + z_2 A_2 = 0.$$

2.5 O espaço de 1-formas de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Usando a definição anterior, voltamos a calcular a dimensão do espaço vetorial de folheações de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Lembrando que a dimensão do espaço dos polinômios homogêneos de grau d em 3 variáveis é $\binom{d+2}{2}$. Daí o número de parâmetros necessários para se definir um trio de polinômios homogêneos de grau $d+1$ em 3 variáveis é $3\binom{d+3}{2}$. Pedir a condição de que $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$ é pedir que um polinômio de grau $d+2$ se anule, ou seja, é pedir $\binom{d+4}{2}$ condições lineares. Daí a dimensão do espaço das 1-formas de grau d satisfazendo a condição $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$ é

$$3\binom{d+3}{2} - \binom{d+4}{2} = (d+3)(d+1).$$

2.6 Campos vs 1-formas.

Já vimos a relação existente entre as formas locais de um campo e de uma 1-forma definindo a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$ (ver equação (2.5)). Estudamos agora a relação entre as expressões globais de um campo e uma 1-forma definindo a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$. Ou seja, dado um campo em sua expressão global $\mathcal{X}(p) = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ tal que $\mathrm{Div}(\mathcal{X}) = 0$, como encontrar uma 1-forma $\omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ que define a mesma folheação que $\mathcal{X}$, e *vice-versa.*

Campo$\rightsquigarrow$1-forma. Dada a expressão local para o campo $\mathcal{X}$ em U_0 temos que $\mathcal{X}(\omega(p)) = 0$, $\forall p \in U_0$, nosso objetivo será encontrar uma expressão local para ω, e finalmente encontrar uma expressão global para ω.

Seja $\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ um campo de vetores de grau d tal que $\mathrm{Div}(\mathcal{X}) = 0$, daí uma expressão para $\mathcal{X}$ no aberto coordenada U_0 é $(f_1 - xf_0)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y}$, onde f_0, f_1 e f_2 são as desomogeneizações de F_0, F_1 e F_2.

Agora utilizando $\mathcal{X}(\omega) \equiv 0$ em U_0, temos que uma expressão local para a 1-forma ω que define a mesma folheção que $\mathcal{X}$ será $\omega = (f_2 - yf_0)dx - (f_1 - xf_0)dy$.

Queremos agora uma expressão global para ω. Esta expressão será $\omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$, onde

$$\begin{aligned}
A_0 &= z_0^{d+1}\left(-\tfrac{z_1}{z_0}(f_2 - \tfrac{z_2}{z_0}f_0)\left(\tfrac{z_1}{z_0}, \tfrac{z_2}{z_0}\right) + \tfrac{z_2}{z_0}(f_1 - \tfrac{z_1}{z_0}f_0)\left(\tfrac{z_1}{z_0}, \tfrac{z_2}{z_0}\right)\right)\\
&= -z_1F_2 + z_1z_2F_0 + z_2F_1 - z_2z_1F_0\\
&= z_2F_1 - z_1F_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= z_0^{d+1}(f_2 - \tfrac{z_2}{z_0}f_0)\left(\tfrac{z_1}{z_0}, \tfrac{z_2}{z_0}\right)\\
&= z_0F_2 - z_2F_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -z_0^{d+1}(f_1 - \tfrac{z_1}{z_0}f_0)\left(\tfrac{z_1}{z_0}, \tfrac{z_2}{z_0}\right)\\
&= z_1F_0 - z_0F_1
\end{aligned}$$

Concluímos então que a expressão global da forma que define a mesma folheação de $\mathcal{X}$ é

$$\omega = (z_2F_1 - z_1F_2)dz_0 + (z_0F_2 - z_2F_0)dz_1 + (z_1F_0 - z_0F_1)dz_2.$$

1-forma$\rightsquigarrow$Campo. Reciprocamente, podemos obter os coeficientes da expressão global do campo, a partir dos coeficientes da expressão global da forma.

Lema 2.5. *Se A_0, A_1, A_2 são polinômios homogêneos de grau $d+1$ satisfazendo a relação $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$, então existem polinômios homogêneos F_0, F_1, F_2 de grau d tais que*

$$\begin{cases} A_0 = z_2F_1 - z_1F_2 \\ A_1 = z_0F_2 - z_2F_0 \\ A_2 = z_1F_0 - z_0F_1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Prova: Da relação $z_0A_0 + z_1A_1 + z_2A_2 = 0$ podemos escrever

$$z_0A_0 = -z_1A_1 - z_2A_2 \tag{2.7}$$

escrevendo $A_0 = z_1G_2 + z_2G_1 + \lambda z_0^{d+1}$ e substituindo em (2.7) obtemos $\lambda = 0$.
Logo $A_0 = z_1G_2 + z_2G_1$. Substituindo em (2.7) esta igualdade e reagrupando obtemos

$$z_1(z_0G_2 + A_1) = -z_2(z_0G_1 + A_2) \tag{2.8}$$

de onde deduzimos que z_1 divide a $z_0G_1 + A_2$ e z_2 divide $z_0G_2 + A_1$.

$$\begin{cases} z_0G_1 + A_2 = z_1G_0 \\ z_0G_2 + A_1 = z_2G_3 \end{cases}$$

Sustituindo estas relações em (2.8), deducimos que $G_3 = -G_0$. Então $A_2 = z_1G_0 - z_0G_1$ e $A_1 = -z_2G_0 - z_0G_2$.
Definindo $F_0 := -G_0$, $F_1 := G_1$ e $F_2 := -G_2$, obtemos as relações procuradas. ∎
Veremos um exemplo a seguir:

Exemplo 2.4. *Seja o campo de vetores dado por:*

$$\mathcal{X} = z_2\frac{\partial}{\partial z_1} - z_1\frac{\partial}{\partial z_2},$$

então a 1-forma ω que define a mesma folheação que $\mathcal{X}$ é dada por

$$\omega = (z_1^2 + z_2^2)dz_0 - z_0z_1dz_1 - z_0z_2dz_2$$

Estas relações podem ser usadas para calcular a expressão global de um campo dado em sua forma local, i.e., dado um campo em sua forma local

$$\mathcal{X} = b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y}$$

onde b_1, b_2 são polinômios com $d+1 = \max_{i=1,2}\{\text{grau}(b_i)\}$

A forma local da 1-forma associada é $b_2dx - b_1dy$. Pelo visto anteriormente a expressão global de esta forma é: $\omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ onde

$$A_0 = z_0^{d+1}\left(-\frac{z_1}{z_0}b_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) + \frac{z_2}{z_0}b_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right)$$
$$A_1 = z_0^{d+1}b_2\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$$
$$A_2 = -z_0^{d+1}b_1\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$$

E daqui podemos obter F_0, F_1, F_2 como no Lema 2.5. Veamos um exemplo:

Exemplo 2.5. *Seja o campo de vetores em* U_0 *dado por* $\mathcal{X}(x,y) = y^2\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

Queremos encontrar uma expressão global para este campo em $\mathbb{P}^2$ *tal que o divergente seja nulo.*

Neste caso $b_1(x,y) = y^2$ *e* $b_2(x,y) = -x$. *Logo*

$$\begin{aligned} A_0 = z_0^3\left(\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_0}\right)^3\right) &= z_1^2 z_0 + z_2^3 \\ A_1 = -z_0^3\frac{z_1}{z_0} &= -z_0^2 z_1 \\ A_2 = -z_0^3\left(\frac{z_2}{z_0}\right)^2 &= -z_2^2 z_0 \end{aligned}$$

Logo as coordendas do campo são $F_0 = 0$, $F_1 = z_2^2$ *e* $F_2 = -z_1 z_0$.

Observe que $\mathrm{Div}(\mathcal{X}) = 0$. *Com isto concluímos que uma expressão global para o campo é*

$$\mathcal{X} = z_2^2\frac{\partial}{\partial z_1} - z_0 z_1\frac{\partial}{\partial z_2}$$

Exercício 2.2. *Seja o campo de vetores em* U_0 *dado por* $\mathcal{X}(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

Encontre uma expressão global para este campo em $\mathbb{P}^2$ *tal que o divergente seja nulo.*

3 Singularidades

Um dos focos no estudo de folheações holomorfas é o estudo de singularidades das folheações. Há uma tentativa de classificar o tipo de singularidades que pode presentar uma folheação e também de calcular o grau do subconjunto de folheações que apresentam um certo tipo de singularidades.

Para folhеções de grau $d > 1$, resultados de Campillo e Olivares [1] mostram que uma folheação queda determinada pelas suas singularidades (considerando multiplicidades). Neste sentido este trabalho é o complementar de este resultado, veremos que uma folheação de grau um **não** é determinada pelas suas singularidades e estudaremos o espaço das folheações que apresentam cada tipo de singularidade.

Nesta seção vamos definir singularidade de um campo de vetores e singularidade de uma 1-forma, e depois definiremos os tipos de singularidades que nos interessam (e que, como veremos logo são as únicas possíveis).

3.1 Singularidades em campos de vetores e em 1-formas

Começaremos definindo singularidade em um campo de vetores.

Definição 3.1. *Dado um campo de vetores* $\mathcal{X}$, *dizemos que um ponto* p *é singularidade de* $\mathcal{X}$ *se o vetor* $\mathcal{X}(p) \in \mathcal{T}_p\mathbb{P}^2$ *for nulo. Se* $p \in U_i$, *então* p *é uma singularidade de* $\mathcal{X}$ *se anula a expressão local de* $\mathcal{X}$ *no aberto* U_i.

Analogamente definimos singularidades em 1-formas.

Definição 3.2. *Dado uma 1-forma* ω, *um ponto* $p \in U_i$, *é uma singularidade de* ω *se* p *anula a expressão local de* ω *em* p.

Exercício 3.1. *Se* $\omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$ *é a expressão global de* ω, *então, as singularidades de* ω *são exatamente os zeros comuns de* A_0, A_1, A_2.

Exercício 3.2. *Usando o exercício anterior prove que as singularidades de um campo*

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

é o conjunto de zeros dos menores dois por dois da matriz $\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$.

Dica: *use a relação entre as expressões globais do campo e da forma.*

Deduza que $p \in \mathbb{P}^2$ *é uma singularidade de* $\mathcal{X}$ *se e só se* $\mathcal{X}(p) = \lambda R(p)$ *para algúm* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Podemos nos perguntar se é possível contar as singularidades de um campo de vetores de grau d em $\mathbb{P}^2$. E a resposta é que um campo de vetores de grau d onde o conjunto de singularidades for um conjunto discreto tem $d^2 + d + 1$ singularidades contando com multiplicidades. Para se mostrar isto é necessário utilizar técnicas de teoria de interseção, que não é o foco deste curso. Mas daremos uma demonstração para o caso onde $d = 1$.

Teorema 3.1. *Um campo de vetores genérico em* $\mathbb{P}^2$ *de grau* 1, *tem* 3 *singularidades. "Genérico" aqui quer dizer que existe um aberto do espaço* $\mathbb{P}^7$ *de folheações ao qual o campo pertece.*

Prova: A expressão global para um campo de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ é dada por

$$\mathcal{X} = (a_{11}z_0 + a_{12}z_1 + a_{13}z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + (a_{21}z_0 + a_{22}z_1 + a_{23}z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{31}z_0 + a_{32}z_1 + a_{33}z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

Um ponto $p = (z_0 : z_1 : z_2)$ é singularidade de $\mathcal{X}$ se $\mathcal{X}(p) = \lambda R(p)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ e R é o campo radial. Daí teremos

$$\begin{aligned} a_{11}z_0 + a_{12}z_1 + a_{13}z_2 &= \lambda z_0 \\ a_{21}z_0 + a_{22}z_1 + a_{23}z_2 &= \lambda z_1 \\ a_{31}z_0 + a_{32}z_1 + a_{33}z_2 &= \lambda z_2 \end{aligned}$$

Tomando a matriz de coeficiente desde sistema $B = [a_{ij}]$, das igualdades acima vemos que $p = (z_0 : z_1 : z_2)$ é uma singularidade de $\mathcal{X}$ se e somente se $v = (z_0, z_1, z_2)$ é um autovetor de B. A hipóteses de o campo ser genérico implica que a matriz de coeficientes B é genérica, logo tem 3 autovalores distintos (o polinômio característico não tem raízes repetidas), de onde obtemos 3 autovetores independentes. ∎

3.2 Tipos de Singularidades

Nosso objetivos agora é distinguir diferentes tipos de singularidades que se apresentam em um campo de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$.

Degenerações. Estudaremos os seguintes tipos de degenerações nas singularidades. Veremos na seguinte seção que estas degenerações são as únicas possíveis.

Definição 3.3. *Se* $p \in U_0$ *é uma singularidade de um campo* $\mathcal{X}$, *e* $b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y}$ *é a expressão local de* $\mathcal{X}$, *definimos o jacobiano de* $\mathcal{X}$ *como a matriz* $\mathbf{J}_p\mathcal{X} := \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial b_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial b_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial b_2}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$.

Consideraremos os seguintes tipos de degenerações nas singularidades:

1. **Tipo 1.** $\det \mathbf{J}_p\mathcal{X} = 0$.
2. **Tipo 2.** $\det \mathbf{J}_p\mathcal{X} = \mathrm{tr}(\mathbf{J}_p\mathcal{X}) = 0$ i.e. a matriz $\mathbf{J}_p\mathcal{X}$ é nilpotente.
3. **Tipo 3.** $\mathbf{J}_p(\mathcal{X}) \in \mathbb{C}Id$; neste caso se diz que p é uma singularidade radial.
4. **Tipo 4.** $\mathbf{J}_p\mathcal{X} = 0$. Singularidade de ordem maior que um.

Exemplo 3.1. *Observe os diferentes exemplos de campos de vetores a seguir:*

- $\mathcal{X}_1 = -3z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$.

  $\mathcal{X}_1$ é um campo onde os pontos $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ e $(0:0:1)$ são singularidades.

  Exercício 3.3. *Observe que os autovalores $-3, 2, 1$ (com autovetores $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$) da matriz B_1 da prova do teorema 3.1, tem multiplicidade algébrica e geométrica igual a 1.*

- $\mathcal{X}_2 = (z_1 + z_0)\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$.

  $\mathcal{X}_2$ é um campo com singularidades nos pontos $(1:0:0)$ e $(0:0:1)$.

  Exercício 3.4. *Prove que como autovalor da matriz B_2 da prova do teorema 3.1, 1 tem multiplicidade algébrica igual a 2, e geométrica igual a 1, e -2 tem multiplicidade algébrica(=multiplicidade geométrica) igual a 1. Identifique este tipo de campo com alguma das degenerações da definição acima.*

- $\mathcal{X}_3 = z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1}$.

  $\mathcal{X}_3$ é um campo onde $(1:0:0)$ é a única singularidade.

  Exercício 3.5. *Prove que como autovalor de B_3 da prova do teorema 3.1, 0 tem multiplicidade algébrica igual a 3 e geométrica igual a 1. Identifique este tipo de campo com alguma das degenerações da definição acima.*

- $\mathcal{X}_4 = -2z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$.

  $\mathcal{X}_4$ é um campo onde o ponto $(1:0:0)$ é singular e todos os pontos da forma $(0:a:b)$, com $a, b \in \mathbb{C}$ também são singulares. Este é um campo que tem infinitas singularidades pois tem a reta $z_0 = 0$ singular.

  Exercício 3.6. *Prove que como autovalor da matriz B_4 da prova do teorema 3.1, -2 tem multiplicidade algébrica (e geométrica) igual a 1, e 1tem multiplicidade algébrica igual a 1 e geométrica igual a 2. O que podemos dizer da matriz B_4? Identifique este tipo de campo com alguma das degenerações da definição acima.*

- $\mathcal{X}_5 = z_2\frac{\partial}{\partial z_0}$.

  $\mathcal{X}_5$ é um campo onde os pontos da forma $(a:b:0)$ onde $a, b \in \mathbb{C}$ são singulares.

  Exercício 3.7. *O que podemos dizer da matriz B_5? Identifique este tipo de campo com alguma das degenerações da definição acima.*

4 Folheações de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ vs Matrizes 3×3 de traço nulo

Na seção anterior apresentamos 5 tipos de singularidades dos campos de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$. Nosso objetivo agora é descrever o espaço das folheações que apresenta cada um dos tipos de singularidades através de matrizes de traço nulo. Associaremos a cada tipo de singularidade, um tipo de forma canônica Jordan nas matrizes. Em particular obteremos que os quatro tipos de degenerações nas singularidades apresentados anteriormente são todos os possíveis.

Primeiramente, motivados pela prova do teorema 3.1, vamos exibir uma bijeção entre campos de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ e matrizes 3×3 de traço nulo.

A expressão global de um campo de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ é

$$\mathcal{X} = (a_{11}z_0 + a_{12}z_1 + a_{13}z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + (a_{21}z_0 + a_{22}z_1 + a_{23}z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{31}z_0 + a_{32}z_1 + a_{33}z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Exercício 4.1. *Prove que* $\mathrm{Div}\mathcal{X} = 0$ *se é somente se* $\mathrm{tr}(B) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

Daí temos uma bijeção do espaços dos campos de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ no espaço das matrizes 3×3 de traço nulo definida por $\mathcal{X} \mapsto B = [a_{ij}]$. Dizemos que a matriz B é a matriz associada ao campo $\mathcal{X}$.

Notação. $sl_3(\mathbb{C})$ denota o espaço vetorial de matrizes 3×3 de trazo nulo.

$Gl_3(\mathbb{C})$ denota o grupo de matrizes 3×3 inversíveis.

Teorema 4.1. *Existe uma bijeção*

$$\theta : V \to sl_3(\mathbb{C})$$

que faz corresponder a cada campo sua matriz associada.

Além disso, se considerarmos a ação de $Gl_3(\mathbb{C})$ por mudança de coordenadas lineares em V, então o mapa θ é $Gl_3(\mathbb{C})-$equivariante, para a seguinte ação em de $Gl_3(\mathbb{C})$ em sl_3:

$$(g, B) \mapsto \det(g) g^{-1} B g.$$

Isto significa que se $g \in GL_3(\mathbb{C})$ e $\mathcal{X}'$ é o campo $\mathcal{X}$ onde fizemos a mudanca de variáveis definida por g, então $\theta(\mathcal{X}') = \det(g) g^{-1} \theta(\mathcal{X}) g$.

Prova: O único que falta provar é a afirmação da equivariância, esta prova não é difícil (se reduz a uma mudança de variáveis e muitas contas) e se encontra em Jouanolou [5]. ■

Como importante consequência deste Teorema obtemos que a clasificação de campos a menos de mudança de coordenadas lineares é equivalente à clasificação de matrizes de trazo nulo pela sua forma de Jordan, i.e. pelos tipos de órbitas (classes de equivalência) que aparecem quando consideremos a ação de $Gl_3(\mathbb{C})$ em $sl_3(\mathbb{C})$ como no Teorema acima.

Logo, se conhecemos todos os tipos de formas de Jordan, e fazemos corresponder a cada um destos tipos, campos com um tipo de singularidade, os tipos de singularidades que obtemos por este processo serão as únicos possíveis.

Mãos à obra: Começamos relembrando algun fatos sobre formas de Jordan.

Reelembrando um pouco sobre formas canônicas de Jordan. A forma canônica de Jordan é uma forma de representar uma matriz através de uma outra matriz semelhante à original que é uma matriz diagonal somada a uma matriz nilpotente (possivelmente nula). Dizemos que uma matriz A é semelhante a uma matriz B se existe uma matriz invertível $g \in GL_3(\mathbb{C})$ tal que $B = gAg^{-1}$.

Se A é uma matriz, na sua forma canônica de Jordan a diagonal é preenchida pelos autovalores da matriz. Escrevemos $A = D + N$, onde D é uma matriz diagonal com os autovetores da matriz, e N é uma matriz nilpotente.

No caso que nos ocupa, i.e., de matrizes 3×3 as possíveis matrizes nilpotentes são :
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde as duas últimas são equivalentes (tem igual forma de Jordan).

Lembramos que o traço de uma matriz é igual a soma de seus autovalores. Daí as possíveis formas canônicas de Jordan de uma matriz 3×3 de traço nulo são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ e } A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \neq 0$.

Para maior conhecimento sobre o assunto consulte o livro Linear Algebra de Hoffman e Kunze [7] ou seu livro de Algebra Linear favorito.

Correspondência entre formas de Jordan e degenerações . A seguir associamos a cada tipo de degeneração um tipo de forma de Jordan.

Proposição 4.1. *A correspondência entre degenerações e formas de Jordan é como segue:*

1. *Degeneração de tipo 1. forma de Jordan* $= \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}$, *com* $\alpha \neq 0$.

2. *Degeneração de tipo 2. forma de Jordan* $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. *Degeneração de tipo 3. forma de Jordan* $= \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, *com* $\alpha \neq 0$.

4. *Degeneração de tipo 4. forma de Jordan* $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Prova: Suponahmos que $p = (1 : 0 : 0)$. Começamos observando que se

$$\mathcal{X} = (a_{11}z_0 + a_{12}z_1 + a_{13}z_2)\frac{\partial}{\partial z_0} + (a_{21}z_0 + a_{22}z_1 + a_{23}z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (a_{31}z_0 + a_{32}z_1 + a_{33}z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

a forma local de $\mathcal{X}$ em U_0 tem coordenadas

$$b_1 = (a_{21} + a_{22}x + a_{23}y) - x(a_{11} + a_{12}x + a_{13}y)$$

e

$$b_2 = (a_{31} + a_{32}x + a_{33}y) - y(a_{11} + a_{12}x + a_{13}y).$$

O fato de que $p = (1 : 0 : 0)$ é um autovetor da matriz B associada ao campo implica que a_{11} é um autovalor de B é que $a_{21} = a_{31} = 0$. Leitor: verifique! Logo $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Observe agora que $\mathbf{J}_p\mathcal{X} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{11}Id$.

1. Pelo provado acima a condição $\det(\mathbf{J}_p\mathcal{X}) = 0$ impõe que a_{11} seja um autovalor de $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

   Ou seja, a matriz B tem um autovalor repetido, a forma de Jordan mais geral de este tipo de matrizes é $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}$.

2. Em este caso a condição impõe, além do anterior, $a_{22} - a_{11} + a_{33} - a_{11} = 0$, e como $\mathrm{tr}B = 0$, temos $a_{11} = 0$ (Verifique!). A forma de Jordan mais geral para matrizes com único autovalor zero é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Neste caso a condição impõe: $\begin{bmatrix} a_{22}-a_{11} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-a_{11} \end{bmatrix} = \lambda Id$, logo $a_{22}=a_{33}$, $a_{23}=a_{32}=0$ i.e. a matriz B é diagonalizável, com um autovalor repetido. A forma de Jordan para esta matriz é $\begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

4. Neste caso condição impõe: $a_{11}=a_{22}=a_{33}$ (que como o traço de B é zero, implica $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$), e $a_{23}=a_{32}=0$. Logo B tem um único autovalor que é 0 com multiplicidade geométrica 2 (i.e. o autoespaço associado tem dimensão 2). A forma de Jordan mais geral para matrizes desta maneira é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Exercício 4.2. *Verifique os detalhes da demostração anterior.*

5 Espaço de parâmetros para folheações com cada tipo de singularidade

Nesta seção queremos dar a forma explícita de um campo representando cada um dos tipos de singularidades e calcular a dimensão e o grau das subvariedades M_i de $\mathbb{P}^7$ formadas por campos com singularidade de tipo i.

Para estes cálculos usamos a correspondência com os tipos de forma de Jordan.

Alguns graus são fáceis de calcular, para os restantes damos referências dos resultados.

Observe que a forma canônica de Jordan genérica é $\begin{bmatrix} -\alpha-\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$. Logo o campo genérico em $\mathbb{P}^7$ tem três singularidades distintas e estes campos são da forma

$$(-\alpha-\beta)z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + \alpha z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \beta z_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Teorema 5.1. *A dimensão d_i e o grau g_i de M_i é:*

1. *$d_1 = 6$ e $g_1 = 6$. Um elemento típico de M_1 é da forma*

$$\mathcal{X} = (\alpha z_0 + z_1)\frac{\partial}{\partial z_0} + \alpha z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2\alpha z_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

2. *$d_2 = 5$ e $g_2 = 6$. Um elemento típico de M_2 é da forma*

$$\mathcal{X} = z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1}.$$

3. *$d_3 = 4$ e $g_3 = 6$. Um elemento típico de M_3 é da forma*

$$\mathcal{X} = -2\alpha z_0\frac{\partial}{\partial z_0} + \alpha z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \alpha z_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

4. *$d_4 = 3$ e $g_4 = 6$. Um elemento típico de M_4 é da forma*

$$\mathcal{X} = z_2\frac{\partial}{\partial z_0}.$$

Prova: Em uma matriz B, 3×3 temos que o polinômio característico, é da forma

$$\mathcal{X}_B(t) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

onde $a_1 = -\operatorname{tr}(B), a_2 = \operatorname{tr}(\wedge^2 B)$ e $a_3 = -\det(B)$. Onde $\wedge^2 B$ é a matriz formada pelos menores 2×2 de B.

Logo a_i é um polinômio de grau i nos coeficiente da matriz B.

Em nosso caso, como $\operatorname{tr}(B) = 0$ temos $a_1 = 0$.

1. Pela Proposição 4.1, as matrizes correspondentes a degenerações de tipo 1 se caracterizam por ter um autovalor repetido, logo esta subvariedade é definida simplesmente pelo discriminante do polinômio característico. Este discriminante é
$$\Delta = 27a_3^2 + 4a_3a_1^3 + 4a_2^3 - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_2$$
em nosso caso $a_1 = 0$ temos
$$\Delta = 27a_3^2 + 4a_2^3$$
que é um polinômio de grau 6 nos coeficientes da matriz B. Deduzimos então que M_1 é uma hipersuperfície de grau 6 em $\mathbb{P}^7$.

2. Pela Proposição 4.1, as matrizes correspondentes a degenerações de tipo 2 se caracterizam por ser ter todos os autovalores nulos, daí seu polinômio característico é t^3, logo esta subvariedade é definida pela interseção de duas hipersuperfícies em $\mathbb{P}^7$, a saber $a_2 = a_3 = 0$, onde a_2 é um polinomio de grau 2 nos coeficientes da matriz B e a_3 é um polinomio de grau 3 nos coeficientes da matriz B. Logo $\dim M_2 = 7 - 2 = 5$ e o grau de M_2 é $2 \times 3 = 6$.

3. Os casos 3 e 4 serão tratados juntos.

   As matrizes B cuja forma de Jordan é $\begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, se caracterizam por ter um subespaço invariante de dimensão dois, i.e. existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $B - \alpha Id$ tem núcleo de dimensão pelo menos dois. Equivalentemente, o posto de $B - \alpha Id$ é ≤ 1.

   Por outro lado as matrizes correspondentes a degenerações de tipo 4 se caracterizam por ser de posto ≤ 1. É claro que a dimensão de M_4 é 3, se consideramos a condição de traço nulo.

   Uma forma clássica de descrever este tipo de matrizes é como sendo a imagem do morfismo de Segre
$$\sigma : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^8$$
   dado por
$$\sigma((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1 : y_2)) = \begin{bmatrix} y_0x_0 & y_0x_1 & y_0x_2 \\ y_1x_0 & y_1x_1 & y_1x_2 \\ y_2x_0 & y_2x_1 & y_2x_2 \end{bmatrix}$$
   (Leitor, mostre que este mapa é injetivo).

   É conhecido o fato de que este morfismo é uma isomorfismo com sua imagem, que são justamente as matrizes de posto 1. O grau desta variedade dentro de $\mathbb{P}^8$ é 6. Se impormos a condição de traço nulo nada muda, pois estamos intersetando com um hiperplano de $\mathbb{P}^8$ (uma equação linear nos coeficientes de matriz). Daí temos que o grau de M_4 é 6.

   Estas mesmas ideias podem ser usadas para calcular dimensão e grau de M_3. Encontrándose que a dimensão de M_3 é 4 e o grau é 6. Estes cálculos requerem um conhecimento de técnicas Teoría de Interseção que não é o objetivo deste curso.

Deixamos ao leitor a tarefa de achar a "cara" dos campos com cada tipo de singularidade. ■

Exercício 5.1. *Para cada tipo de singularidade encontre a 1-forma típica que presenta esse tipo de singularidade.*

Referências

[1]CAMPILLO, A. AND OLIVARES, J. *A plane foliation of degree different from 1 is determined by its singular scheme.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics Volume 328, Issue 10, 15 May 1999, Pages 877-882.

[2] FERRER, V. - *Aspectos enumerativos de Folheações Holomorfas.* http://www.mat.ufmg.br/ pgmat/teses/Tese024.pdf. Doctoral Thesis, UFMG. 2010.

[3] FULTON, W. - *Algebraic Curves.* W. A. Benjamin, new York, 1969.

[4] GÓMEZ MONT, X. E ORTÍZ BOBADILLA, L. - *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies.* Sociedad Matemática Mexicana, México City, 1989.

[5] JOUANOLOU, J. P. - *Equations de Pfaff algébriques.* Lectures Notes in Mathematics, **708**. Springer-Verlag, 1979.

[6] LINS NETO, A. E SCARDUA, B. - *Folheações Algébricas Complexas.* 21 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1997.

[7] HOFFMAN, K. M. E KUNZE, R. - *Linear Algebra.* Editora Prentice Hall, 1971.