



Universidade Estadual do Ceará- UECE
Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central
Curso: Licenciatura plena em Matemática

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS DAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES

Aluno: Vitor Araújo Damascena.
Orientado: Antonio Grangeiro Filho

Quixadá-CE, 05 de Agosto de 2010.

Índice

Sistema posicional.....	3
Operação aritmética (multiplicação) hindu.....	6
Operação aritmética (Divisão) suméria.....	13
Operação aritmética (Adição, subtração, multiplicação e Divisão) egípcia.....	18

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS DAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES.

Princípio posicional

O nosso sistema de numeração criado pelos hindus no século 5 a.C, é decimal – posicional. O que isto que significa?

Para entender melhor, sem muita complicação, tomemos o seguinte exemplo: contar e expressar o número de pessoas de Quixadá.

Inicialmente agrupemos todas as pessoas em pequenos grupos onde cada grupo seja equivalente numericamente aos dedos das duas mãos juntas, ou seja, que exista uma correspondência biunívoca entre os conjuntos. Teríamos então o seguinte:



Pode ser que ao final tenha sobrado pessoas com as quais não seja possível forma um grupo equivalente aos dedos das mãos. Chamemos estas de pessoas não agrupadas onde cada um não agrupado e cada um grupo de grupo de primeira ordem. Em seguida agrupemos novamente os grupos constituídos, como se cada grupo fosse um elemento, formando grupos equivalentes ao conjunto dos dedos das mãos. Para simplificar a notação representemos cada grupo de primeira ordem por um retângulo de lado 1cm e 1cm. Temos então o seguinte:



Cada grupo deste será dito grupo de segunda ordem e será representado por um retângulo de 1cm x 1,5cm. É provável também que sobrem grupos de primeira ordem que não podem ser agrupados, como na primeira vez que agrupamos. Prossequimos então como anteriormente, agrupando os grupos de segunda ordem, como se cada grupo fosse um elemento, em grupos equivalentes aos dedos da mão:

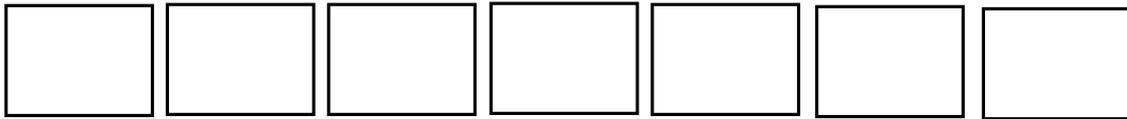


Repitamos novamente o processo agrupando os grupos de terceira ordem em equivalência numérica com os dedos da mão. Representemos estes grupos por retângulos de 1cm x 2cm, temos então:

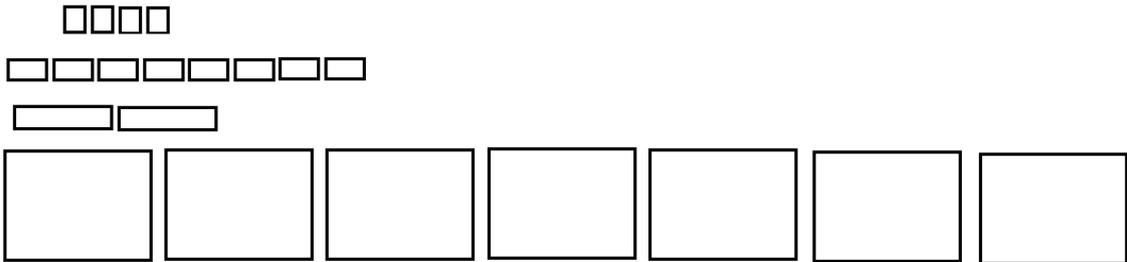


Vamos denominar estes grupos de quarta ordem e representar por retângulos de 1cm x 2,5cm prossequindo este processo repetidamente em algum momento chegaremos a grupos que não podem mais serem reagrupados em um novo grupo equivalente aos dedos da mão. Para expressara quantidade total de pessoas basta expressar as quantidades dos grupos das diferentes ordens.

Suponhamos, no nosso exemplo que já não seja possível reagrupamos grupos de quarta ordem e sua quantidade seja:



Alem disto suponhamos que sobraram em cada etapa de agrupamento o seguinte na ordem do processo:

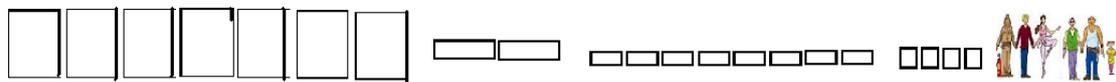


Onde cada agrupamento da esquerda equivale à quantidade de elementos da direita equivalentes numericamente aos dedos das mãos.

Fazemos então uma contagem perfeita das pessoas de Quixadá incluindo uma simbologia satisfatória. Outros povos poderiam usar outros símbolos distintos para representar os vários grupos, como fizeram os cretences, egípcios, chineses, gregos e outros. Além do mais poderíamos ter formados grupos equivalentes aos dedos de uma só mão ou, também, das mãos e dos pés juntos ou mesmo equivalente a quantidade de minutos de uma hora esta são apenas particularidades que em nada afeta o principio do agrupamento em base.

Inicialmente os povos de base decimal criaram símbolos para os grupos das distintas ordens e repetiam estes símbolos até não ser possível forma um grupo de ordem superior. Este fato resultou sempre em limitação para expressar números já que com uma quantidade de símbolos já mais poderíamos contar todos os números. A questão estava clara para expressar a quantidade de elementos de um conjunto basta expressar a quantidade dos grupos das distintas ordens. Alguém teve então a idéia de fazer correspondência da ordem do grupo a ordem da escrita. Por exemplo, poderíamos começar da esquerda para direita dos elementos não agrupados até o grupo de maior ordem ou da direita para a esquerda como fazemos agora.

De tal forma que a quantidade de pessoas de Quixadá pode ser:



Ou usando os símbolos modernos temos:

72846

Em certas regiões da África ocidental já se usava este artifício, os pastores tinham um costume bem prático de enumerar um rebanho. Faziam desfilar os animais, um atrás dos outros. Na passagem do primeiro, enfiava-se uma concha numa correia branca, outra concha na segunda e assim por diante. Na passagem do décimo animal, desfazia-se o colar e enfiava-se uma concha numa correia azul, associada as dezenas. Depois recomeçava-se a enfiar as conchas na correia branca até a passagem do vigésimo animal, ocasião em que se enfiava uma segunda concha na correia branca. Quando esta continha, por sua vez, dez conchas, com

animais tendo então sido contados, desfazia-se o colar das dezenas e enfiava se uma concha numa correia vermelha , reservada desta vez para às centenas.E assim sucessivamente até o final da contagem.

Nos dias atuais podemos ver um exemplo pratico de base no hôdometro dos veículos. Constituído por seis retângulos cujo primeiro é o do quilometro, segundo hectômetro, terceiro decâmetro, quarto metro, quinto decímetro por ultimo o centímetro da esquerda para a direita.

Funciona da seguinte forma a cada 10 centímetro rodado o ultimo retângulo zera e aumenta 1 no quinto retângulo quando chega a 10 decímetro, zera e aumenta uma casa 1 no quarto retângulo e assim sucessivamente.

Portanto nosso sistema de numeração usamos os símbolos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 para representar quantidades de elementos (os grupos de varias ordens)que não são equivalentes aos dedos da mão e a ordem de cada símbolo da esquerda para direita indica a ordem do grupo começando dos elementos não agrupados por justa posição.

O que significa, por exemplo, a quantidade 142328?

Significa 1 grupo de quinta ordem, 4 grupo de quarta ordem, 2 grupos de terceira ordem, 3 grupos de segunda ordem, 2 grupos de primeira ordem e 8 não agrupados.

Exemplos:

365- 5 não agrupados, 6 grupos de ordem 1,3 grupos de ordem 2.

2356- 6 não agrupados, 5 grupos de ordem 1,3 grupos de ordem 2, 2 grupos de ordem 3

Adição

Adicionar significa juntar. Então adicionar dois números (ou quantidades) a resultante é dito soma. Vamos simbolizar adição pelo símbolo alemão (+) criado em 489 d.C.

Para os exemplos a seguir utilizaremos os desenhos I para as unidades,□ para o

grupo de 1° ordem ,  para os grupo de 2° ordem e  para os grupos de 3° ordem.

Exemplos:

$$7 + 8 = \text{IIIIII} + \text{IIIIII} = \square \text{IIII} = 15$$

Multiplicação

Dados os números m e n naturais definimos o produto de m por n , simbolizado por $m \times n$, sendo a soma de n com ele mesmo repetindo m vezes.

O símbolo da multiplicação (\times) foi criado na Inglaterra no século XVII.

Exemplos:

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

Tomemos agora como exemplo o produto 7×678 temos que

$$7 \times 678 = 678 + 678 + 678 + 678 + 678 + 678 + 678$$

Vemos que ao repetir o número 678 os elementos não agrupados (8), grupos de primeira ordem (7) e o grupos de segunda ordem (6), ficam repetidos todos 7 vezes. Temos portanto que;

$$678 + 678 + 678 + 678 + 678 + 678 + 678 = (6+6+6+6+6+6+6)(7+7+7+7+7+7+7)(8+8+8+8+8+8+8) = (7 \times 6)(7 \times 7)(7 \times 8) = (42)(49)(56)$$

Usando os parentes para os grupos de varias ordens e o fato que 10 grupos de uma ordem equivale a 1 grupo de ordem superior temos:

$$(42)(49)(56) = (42)(49)_{+5}(6) = (42)(54)(6) = (42)_{+5}(4)(6) = (47)(4)(6) = (0)_{+4}(7)(4)(6) = 4746$$

Vemos que para multiplicar uma unidade qualquer por um número qualquer basta multiplicar esta unidades pelas unidades do número e depois usar o principio posicional. vejamos mais um exemplo;

$$5 \times 2347 = (5 \times 2)(5 \times 3)(5 \times 4)(5 \times 7) = (10)(15)(20)(35) = (10)(15)(20)_{+3}(5) = (10)(15)(23)(5) = (10)(15)_{+2}(3)(5) = (10)(17)(3)(5) = (10)_{+1}(7)(3)(5) = (11)(7)(3)(5) = (0)_{+1}(1)(1)(7)(3)(5) = (1)(1)(7)(3)(5) = 11735$$

2347

x 5

(5x2)(5x3)(5x4)(5x7)

O processo fica simplificado ao fazemos $(5 \times 2)(5 \times 3)(5 \times 4)(5 \times 7)$ ou já operando mentalmente a multiplicação o principio posicional.

1 2 3

2347

x 5

11735

Como multiplicar por 10? Vejamos o exemplo 10×8742 temos que

$$10 \times 8742 = (10 \times 8)(10 \times 7)(10 \times 4)(10 \times 2) = (80)(70)(40)(20) = (8)(7)(4)(2)(0) = 87420$$

Vemos que então para multiplicar um número por 10 basta acrescentar um zero a este número. Semelhantemente fazemos para a multiplicação por 100 acrescenta dois zeros pois $100 = 10 \times 10$. De forma geral um número multiplicado por 1 seguido de

m zeros será acrescido de m zeros. Exemplo:

$$100000 \times 671 = 67100000$$

Como multiplicar 30 por 772?

Temos que $30 = 3 \times 10$ e usando a propriedade associativa teremos:

$$30 \times 772 = 3 \times (10 \times 772) = 3 \times 7720 = (3 \times 7)(3 \times 1)(3 \times 2)(3 \times 0) = (21)(3)(6)(0) = 21360$$

De forma geral para multiplicar um número qualquer acrescentado a este número m zeros e depois o multiplicamos pelo algarismo. Por exemplo:

$$40 \times 72 = 4 \times 720 = (4 \times 7)(4 \times 2)(4 \times 0) = (28)(8)(0) = 2880$$

Como multiplicar então o número 75 por 315?

Temos que $75=70+5$ e portanto repetir 315 em 75 vezes é repetir 70 vezes e depois 5 vezes. Ou seja
 $75 \times 315 = 70 \times 315 + 5 \times 315 = 7 \times 3150 + 5 \times 315 = 22050 + 5 \times 315 = 22050 + 1575 = 23625$
 Uma forma simplificar seria:

$$\begin{array}{r}
 315 \\
 \times 75 \\
 \hline
 (7 \times 3)(7 \times 1)(7 \times 5)0 \\
 (5 \times 3)(5 \times 1)(5 \times 5) \\
 \hline
 22050 \\
 + 1575 \\
 \hline
 23625
 \end{array}$$

Percebemos então que para multiplicar dois números quais quer, por exemplo $352 \times 6742 = (300+50+1) \times (6742) = 300 \times 6742 + 50 \times 6742 + 1 \times 6742 = 3 \times 674200 + 5 \times 67420 + 1 \times 6742$ ou

$$\begin{array}{r}
 6742 \\
 \times 351 \\
 \hline
 (1 \times 6)(1 \times 7)(1 \times 4)(1 \times 2) \\
 (5 \times 6)(5 \times 7)(5 \times 4)(5 \times 2)(5 \times 0) \\
 (3 \times 6)(3 \times 7)(3 \times 4)(3 \times 2)(3 \times 0)(3 \times 0) \\
 \hline
 (6)(7)(4)(2) \\
 + (30)(35)(20)(10)(0) \\
 (18)(21)(12)(6)(0)(0) \\
 \hline
 (18)(51)(53)(33)(14)(2) \\
 \text{temos então } 2366442
 \end{array}$$

Divisão

Dividir é repartir.

Dados os números naturais m e n dizemos que o quociente de m por n simbolizado por $m/n=q$ se $m=q \times n$.

O símbolo (/) para divisão foi pelos árabes no século XIII.

Tomemos como exemplo dividir 36 por 9, pensando que 9 representa 9 pessoas e 36 representa canetas. Começamos então entregando uma caneta pra cada pessoa. Quando todas as pessoas tiverem uma caneta, entreguemos uma segunda caneta e depois que todos tiverem duas canetas, entreguemos uma terceira caneta e assim sucessivamente, até esgotar as canetas. A conta é exata se todos ganharam a mesma quantidade

$$36/9=4 \quad \begin{array}{|l} \text{||||} \\ \text{||||} \\ \text{||||} \\ \text{||||} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \text{||||} \\ \text{||||} \\ \text{||||} \\ \text{||||} \end{array} \quad 4 \times 9 = 36$$

1746 por 9

Observe que $1746 = 17$ grupos de ordem 2, 4 grupos de ordem 1 e 6 unidades. Dividindo os 17 grupos para 9 dá um grupo de ordem 2 para cada e sobra 8 grupos de ordem 2, transformaremos estes 8 grupos em 80 grupos de ordem 1. Como tínhamos 4 grupos de ordem 1 temos agora 84 grupos de ordem 1. Dividindo pra 9 cada um ganhará 9 grupos de ordem 1 e sobra 3 grupos de ordem 1. Transformando 3 grupos de ordem 1 em 30 grupos de ordem 0 teremos 36 unidades no total. Dividindo os 36 grupos de ordem 0 por 9 tem-se 4 grupos de ordem 0. Somando cada resultado parcial obtemos o resultado final: $100 + 90 + 4 = 194$

Como dividir números maiores para compreender melhor tomemos o exemplo dividir 1746 por 9. Poderíamos dizer que este resultado é 194 pois $9 \times 194 = 1746$, mas teríamos que saber deste fato e estaríamos sempre dependente da multiplicação. Vejamos agora como fazemos:

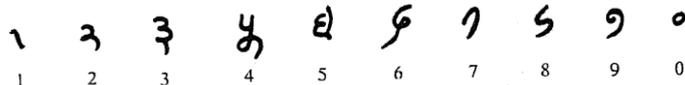
$$\begin{array}{r} 1746 \overline{) 9} \\ - 09 \quad 194 \\ \hline 84 \\ - 81 \\ \hline 036 \\ - 36 \\ \hline 00 \end{array}$$

Vemos que não é necessário neste algoritmo preocupar-se com a ordem dos algarismos do resultado, pois destes estará perfeitamente definida pela ordem do algarismo das unidades, o último a ser colocado. A ordem seguida deve ser obedecida já que o sistema é posicional. Quando não for possível dividir pelo fato do número ser menor que o divisor, deve ser colocado um zero no quociente para guarda posição. Desta forma o algoritmo faz todos os passos que fizemos de forma simplificada e eficiente.

Hindus (século VI)

A multiplicação hindu era operada através de um procedimento denominado “por quadriculagem ou per gelosia”.

Os hindus utilizavam os seguintes símbolos numéricos;



Para maior compreensão utilizaremos aqui os nossos símbolos numéricos

Multiplicaremos 24 por 12 através do método hindu:

Como o multiplicador tem dois algarismos e o multiplicando dois também, desenhe-se um quadro retângulo de duas colunas e duas linhas e escrever os números da seguinte forma no quadro retângulo.

	2	4
2		
1		

Divide cada casa do quadrado em duas meias, traçando na diagonal. Depois se escrever em cada casa o produto dos dois números colocados no alto da linha e da coluna correspondente.

Escreve-se o algarismo de sua dezena na meia casa inferior e o de suas unidades na meia casa superior direita. Se falta um destas ordens de unidades, basta colocar um zero na meia casa correspondente.

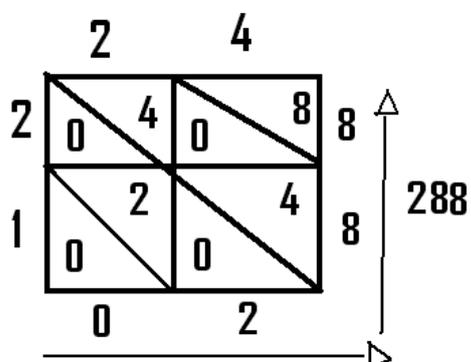
No primeiro quadrado de cima á direita ,escreve-se então o resultado da multiplicação de 4 por 2 ou seja 8 colocando o 0 na meia casa da esquerda e o 8 na da sua direita. E assim por diante:

	2	4
2	<div style="position: absolute; top: 0; right: 0;">8</div> <div style="position: absolute; bottom: 0; left: 0;">0</div>	<div style="position: absolute; top: 0; right: 0;">4</div> <div style="position: absolute; bottom: 0; left: 0;">0</div>
1	<div style="position: absolute; top: 0; right: 0;">2</div> <div style="position: absolute; bottom: 0; left: 0;">0</div>	<div style="position: absolute; top: 0; right: 0;">4</div> <div style="position: absolute; bottom: 0; left: 0;">0</div>

Somam-se depois os algarismo de cada diagonal , começando por aquela que é formada pelo algarismo 8 no alto e a direita do quadro Em seguida procede-se por diagonal partindo da direita para a esquerda e de cima para baixo.

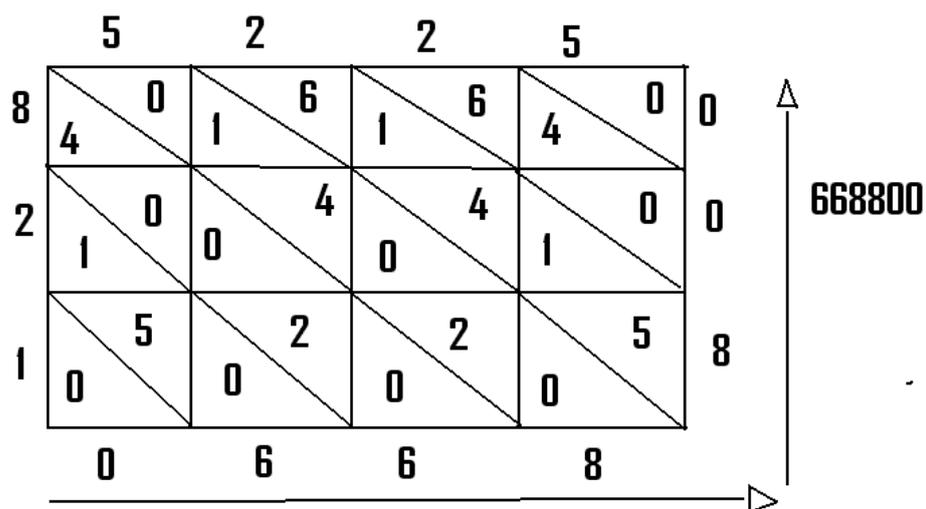
Se preciso ,guarda-se o resto de uma diagonal para a seguinte , obtendo-se assim, no exterior do quadro, um em seguida do outro, todos os algarismo do produto

final. A leitura do resultado é feita sem hesitação, da esquerda para a direita. Aqui, 288:



Exemplos:

5225x128=



Sumerios 2650 a.C

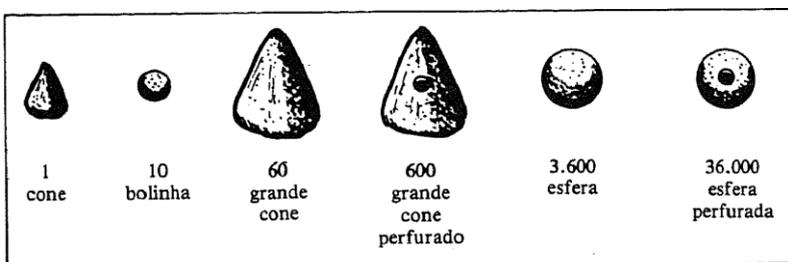
Para efetuar adições, subtrações, multiplicações ou divisões os mesopotâmicos ainda utilizam nesta época os velhos calculi de outrora, essas fichas de argilas cujo os tamanhos e formas geométricas simbolizam as diferentes ordens de unidade da numeração Suméria

Uma tabuleta Suméria encontrada no sítio iraquiano de Fará (Suruppak) remonta a cerca de 2650 a.C relata uma operação de distribuição de síla.

A operação de distribuição de dizia a respeito à repertição dos 152000 síla de cevada entre um certo número de pessoas, sendo que cada uma das quais devia receber 7 síla de cevada.

A operação se faz da seguinte maneira.

A técnica operatória para efetuar essa divisão faz se uso dos símbolos Sumérios:

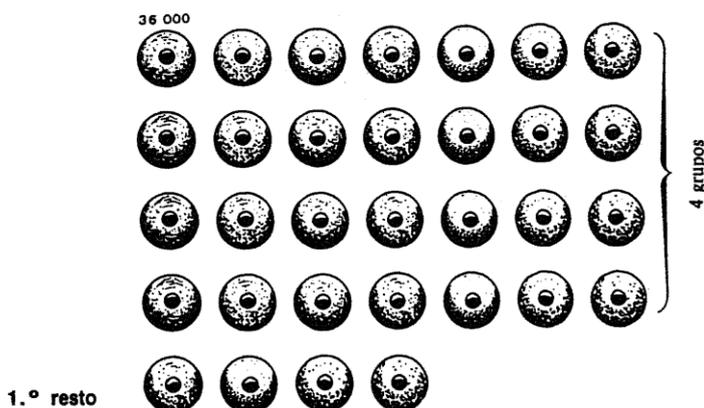


Basta então recorrer ao “cambio” dos objetos no fim de cada etapa, isto é, trocar os calculi por aqueles da ordem imediatamente inferior cada vez que seu agrupamento correspondente, a operação inferior ao divisor.

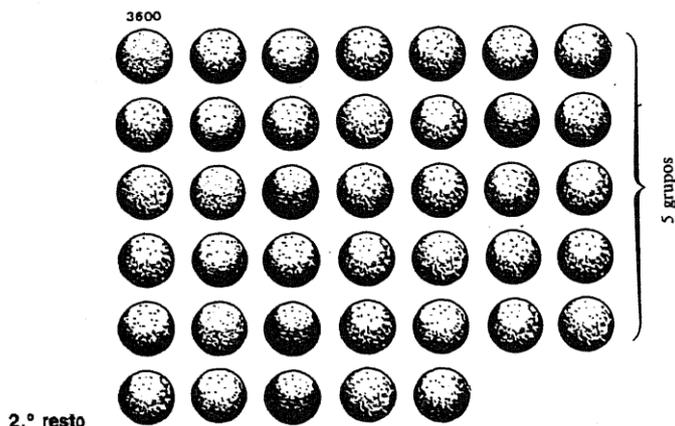
A mais alta unidade da numeração (da numeração do calculi) era 36000, convirá portanto exprimir esse dividendo em múltiplos dessa unidade, ou seja, mediante 32 esferas perfuradas simbolizando cada uma 36000 unidades.

$$1152000 = 32 \times 36000$$

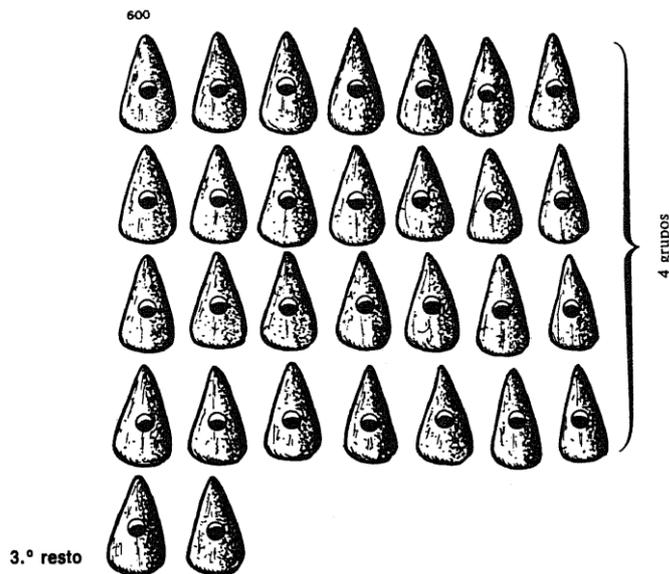
E já que trata de efetuar a divisão desse número por 7 repartimentos essas esferas por grupos de 7:



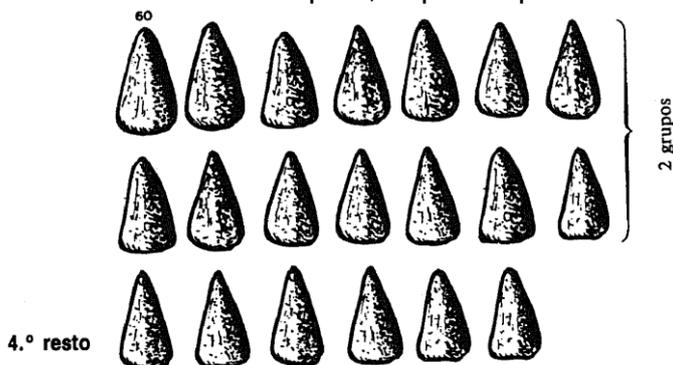
Para prosseguir, é preciso converte esse resto em múltiplo de 3600 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério), Equivale a 40 esferas, depois repartimos em grupos de 7.



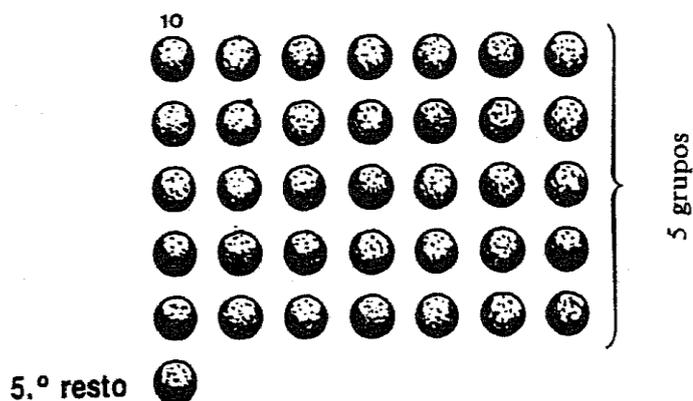
Para prosseguir, é preciso converte esse resto em múltiplo de 600 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério), Equivale a 30 cones perfurados, depois repartimos em grupos de 7.



Para prosseguir, é preciso converte esse resto em múltiplo de 60 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério), Equivale a 20 cones simples, depois repartimos em grupos de 7.



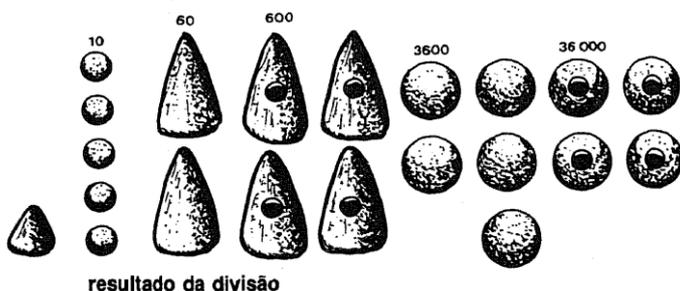
Para prosseguir, é preciso converte esse resto em múltiplo de 10 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério), Equivale a 60 cones simples, depois repartimos em grupos de 7.



E por ultimo, resta-lhes converte esta bolinha em 10 pequenos cones com valor de unidades, e subtrair 7 por 10, para acabar a operação:



Ao final da desta sexta divisão parcial, a ultima pessoa atingida pela operação recebeu sua parte sendo o quociente correspondente igual a 1) , sobraram 3 sílas de cevada , que não foi mais possivel distribuir. Concretamente , o número procurado foi obtido guardando 4 esfera perfurada na na primeira divisão parcial, 5 esferas na segunda, 4 cones perfurados na terceira, 3 cones na quarta, 5 bolinhas na quinta e um pequeno cone na ultima. Tendo como resultado final.

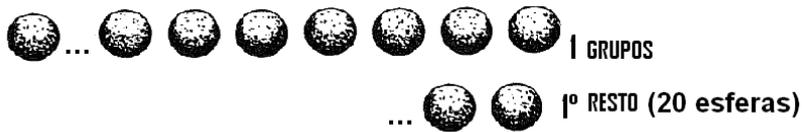


O quociente final da divisão (isto é, o número total de pessoas da divisão tendo recebido 7 síla de cevada a parti de 115200 síla) foi obtido somando sucessivamente :

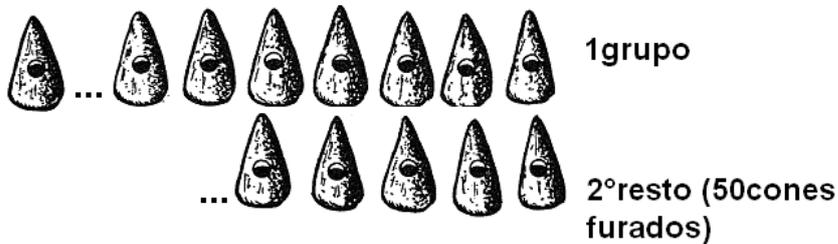
- os 4x36000 encontrados na primeira etapa;
- os 5x3600 encontrados na segunda;
- os 4x600 encontrados na terceira;
- os 2x60 encontrados na quarta;
- os 5x10 encontrados na quinta
- 1 na ultima com resto 3

Exemplos:

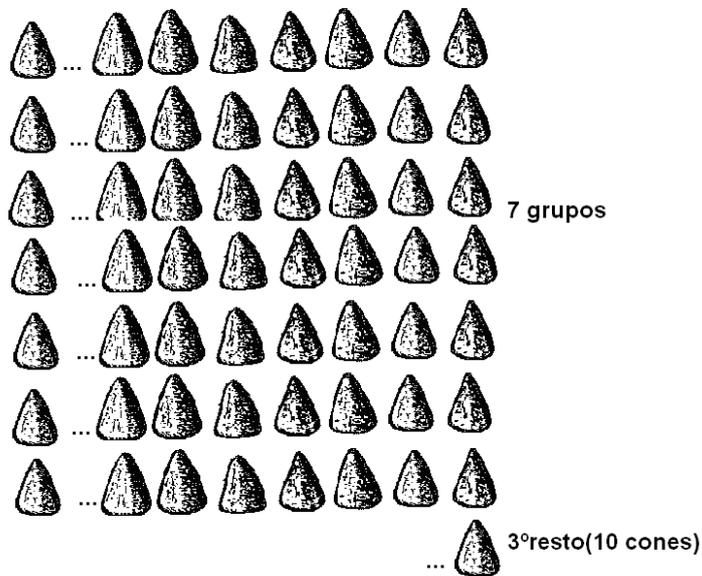
Dividir 324000 por 70
 90X3600 são 9 esferas.



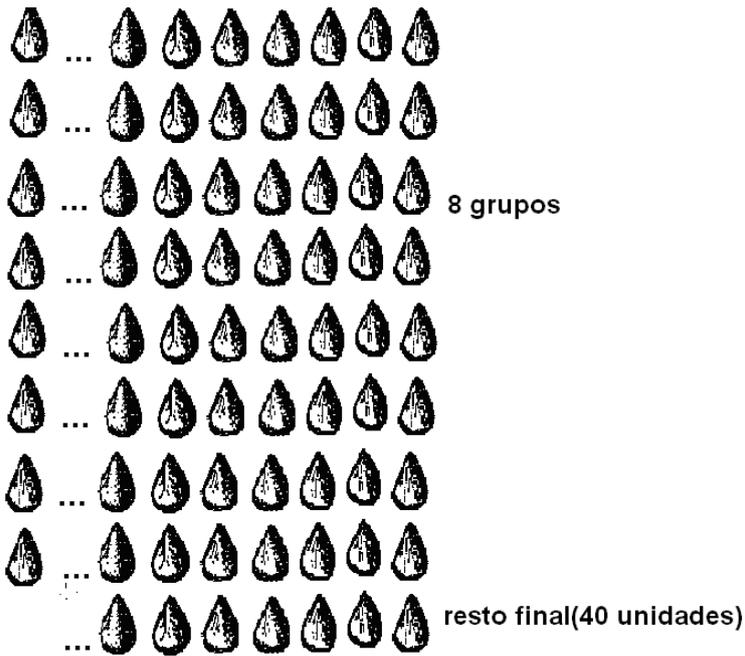
Converte esse resto em múltiplo de 600 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério),
 Equivale a 120 cones furados ,depois repartimos em grupos de 70.



Converte esse resto em múltiplo de 60 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério),
 Equivale a 500 cones, depois repartimos em grupos de 70.



Converte esse resto em múltiplo de 1 (ordem de unidade imediatamente inferior no sistema sumério),
 Equivale a 600 cones pequenos, depois repartimos em grupos de 70.

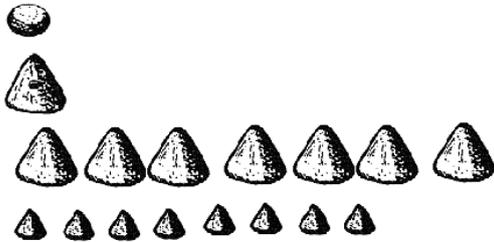


O número de grupos de 7 pequenos cones que resulta da quinta divisão é igual a 8 (quociente) e restam 40 pequenos cones.

O quociente final obtém-se fazendo a adição dos quocientes obtidos nas várias divisões, com efeito:

$$1 \times 3600 + 1 \times 600 + 7 \times 60 + 8 \times 1 = 4628 \text{ (quociente da divisão de 324000 por 70)}$$

Resultado final



Egípcios 2000 a.C

Os Egípcios já aprenderam há muito tempo a fazer operações aritméticas por meio de seus algarismos. A adição e subtração não apresentam nenhuma dificuldade: para a primeira, por exemplo, basta justapor ou superpor as representações dos números a somar, em seguida reunir (mentalmente) os números idênticos, substituindo a cada vez dez signos de uma categoria pelo algarismo da classe decimal imediatamente superior.

Utilizaremos os seguintes símbolos egípcios:

1	
10	∩
100	∩∩∩
1 000	∩∩∩∩∩
10 000	∩∩∩∩∩∩
100 000	∩∩∩∩∩∩∩
1 000 000	∩∩∩∩∩∩∩∩

Exemplo:

$$\begin{array}{r}
 1729 \\
 + 696 \\
 \hline
 = 2425
 \end{array}$$

The image shows the Egyptian numeral representation for the above addition. The numbers are written in columns, with symbols for 1, 10, 100, 1000, 10000, and 100000. Below the symbols, the values are labeled: 9, 20, 700, 1000 for 1729; 6, 90, 600 for 696; and 5, 20, 400, 2000 for 2425.

Tomemos um exemplo de subtração como:

$$\begin{array}{r}
 \text{IIIIII} \\
 \text{IIIIII} \\
 \text{III} \\
 \text{∩∩} \\
 33
 \end{array}
 -
 \begin{array}{r}
 \text{IIIIII} \\
 5
 \end{array}
 =
 \begin{array}{r}
 \text{IIIIII} \\
 \text{III} \\
 \text{∩∩} \\
 28
 \end{array}$$

Basta apenas juntar os símbolos e fazer a transformação de 10 grupos de ordem de uma ordem num grupo de ordem maior:



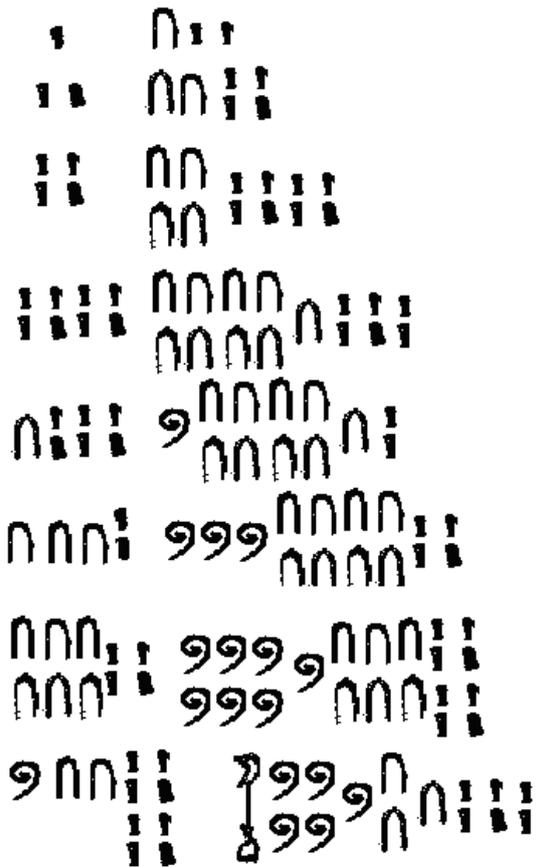
$$1580/10=158$$

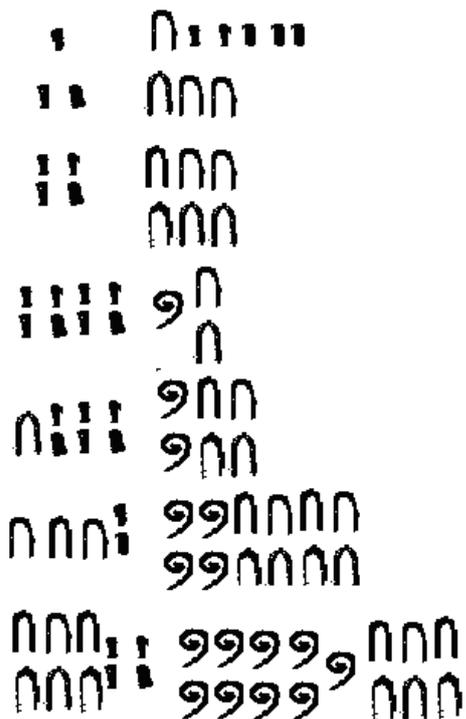


Substituindo cada símbolo pelo de ordem inferior, pois se trata do décimo do símbolo temos então.

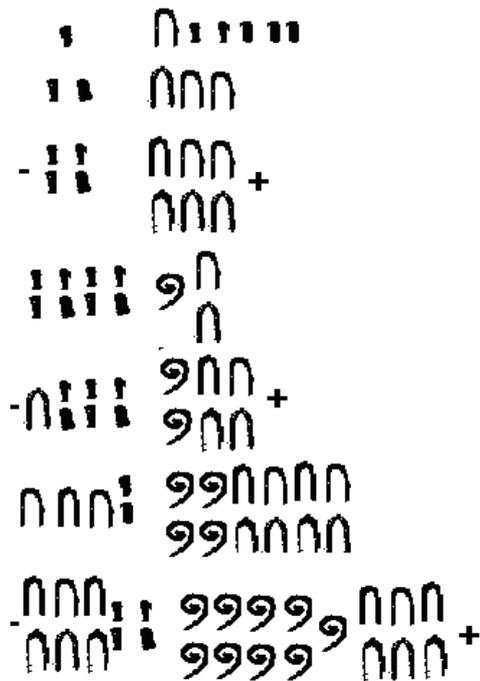


Mas para a multiplicação ou a divisão de outros números eles procedem de outra forma: sabendo apenas multiplicar ou dividir diretamente por 2, eles geralmente fazem para tanto duplicações sucessivas, isto é, séries de multiplicações por 2. Tomemos 128 multiplicado por 12 para resolver esta questão os egípcios procedem da seguinte maneira:





Como o multiplicando 84 não aparece desta vez na coluna da esquerda, ele prossegue a duplicação até obter o maior número contido neste multiplicando. No número 64, Pará na coluna da esquerda, procurando nela os números cujo o total seja igual a 84. Em seguida, marca com um pequeno traço esses números (aqui os números 64, 16 e 4) e, com uma barra oblíqua, os números correspondentes na coluna da direita (isto é, 960, 240, 60).



A somar os números marcados com traço oblíquo, obtemos o seguinte resultado;
 $84 \times 15 = 960 + 240 + 60 = 1260$

$$\begin{array}{r} \text{nnn} + \text{9nn} + \text{9999} \\ \text{nnn} + \text{9nn} + \text{9999} \end{array} \text{9nnn} = \begin{array}{r} \text{9nnn} \\ \text{9nnn} \end{array}$$

Divisão egípcia se procede quase do mesmo modo que a multiplicação:
Temos 1476 dividido por 12 para resolver esta questão os egípcios procedem da seguinte maneira:

Ele programa sua operação como se fosse fazer uma multiplicação por 12, escrevendo o número 1 na coluna da esquerda e 12, o divisor, na coluna da direita. Em seguida dobra sucessivamente cada um dos números:

$$\begin{array}{r} + \text{1} \quad \text{nn} \text{---} \\ + \text{12} \quad \text{nn} \text{|||} \text{---} \\ \quad \text{||} \quad \text{nn} \text{ ||||} \\ \quad \text{nn} \text{ ||||} \\ + \text{|||} \quad \text{nnnn} \text{ ||||} \text{---} \\ \quad \text{nnnn} \text{ ||||} \text{---} \\ + \text{nn} \quad \text{9nnnn} \text{ ||} \text{---} \\ \quad \text{nnnn} \text{ ||} \text{---} \\ + \text{nnn} \quad \text{999nnnn} \text{ |||} \text{---} \\ \quad \text{nnnn} \text{ |||} \text{---} \\ + \text{nnnn} \quad \text{9999nnnn} \text{ ||||} \text{---} \\ \quad \text{nnnn} \text{ ||||} \text{---} \end{array}$$

Aí pára em 768 na coluna da direita, pois a duplicação seguinte forneceria um número superior ao dividendo 1476.

Neste estagio busca, operando várias tentativas na coluna da direita (e não mais da esquerda) os números que, adicionamos, dão esse dividendo. Retém os números 768, 384, 192, 96, 24 e 24(cuja a soma é justamente 1476) e risca cada um com um pequeno traço horizontal. Ao adicionar os números correspondentes da coluna da esquerda (ou seja ,64, 32, 16, 8, 2,1), obtem facilmente o resultado de sua divisão: $147/12=64+32+16+8+2+1=123$.

$$\text{1} + \text{12} + \text{|||} + \text{nn} + \text{nnn} + \text{nnnn} = \text{9nn}$$

Exemplos:
12 x 27=

$$\begin{array}{r}
 - 1 \quad 111 + \\
 - 11 \quad 11111 + \\
 11 \quad 111111 \\
 - 11111 \quad 111111111111 + \\
 - 111111 \quad 1111111111111111 +
 \end{array}$$

$$12 \times 27 = 12 + 24 + 96 + 192 = 324$$

$$111 + 11111 + \frac{111111}{111111} 111111111111 + \frac{111111111111}{111111111111} 1111111111111111 = \frac{111111111111}{111111111111} \frac{111111111111}{111111111111}$$

$$184/8$$

$$\begin{array}{r}
 + 1 \quad 111111111111 - \\
 + 11 \quad 11111111111 - \\
 + 111 \quad 1111111111 - \\
 111111 \quad 111111111111 \\
 + 1111111 \quad 1111111111111111 -
 \end{array}$$

$$184/8 = 1 + 2 + 4 + 16 = 23$$

$$1 + 111 + 11 + 111111 = 111111$$