

SESSÕES ONLINE EM GRUPO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL UTILIZANDO O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA ‘TABULAE COLABORATIVO’

ULISSES DIAS^{*}; FRANCISCO R. P. MATTOS[†] & FILIPE HASCHE[‡]

Resumo

Neste minicurso apresentamos uma abordagem para o estudo de conteúdos ligados ao cálculo diferencial com base na resolução de problemas e no uso de tecnologias computacionais específicas para o trabalho de aprendizagem colaborativa. Em particular, utilizaremos um sistema de geometria dinâmica que permite que alunos conectados em rede (local ou Internet) realizem atividades em grupo, compartilhando suas construções de Geometria Dinâmica. Abordaremos importantes conteúdos do Cálculo, como: a noção de limite, a obtenção do coeficiente de inclinação de uma reta tangente ao gráfico de uma função real e função derivada. Com isso, desejamos que os cursistas se engajem em discussões e façam conjecturas na resolução dos problemas apresentados. A parte final do minicurso consiste na criação de atividades pelos cursistas, permitindo que eles ganhem autonomia para utilização posterior desta ferramenta em suas escolas/universidades.

Palavras-Chave: Geometria Dinâmica; Resolução de Problemas; Cálculo Diferencial; Colaboração Matemática.

1 Utilizando tecnologia computacional como ferramenta para aprimorar o Ensino de Matemática

Hoje podemos encontrar diversos programas e aplicativos computacionais planejados para o uso em atividades de ensino de matemática. No entanto, a aplicação destas ferramentas em escolas e universidades ainda se dá de modo tímido, sem uma efetiva integração com o contexto da sala de aula [1].

A utilização de ferramentas computacionais pode desempenhar um importante papel no desenvolvimento da Matemática e no seu ensino. Diversas áreas da Matemática, como a Probabilidade, a Geometria Diferencial, a Teoria dos Números e a Álgebra, têm recebido importantes contribuições do uso de programas de computador.

Existe grande variedade de ferramentas específicas para o ensino de Matemática, como sistemas de Computação Algébrica (e.g. *Maple*, *Maxima*, *Mathematica* e *Derive*), Ambientes de Geometria Dinâmica (e.g. *GeoGebra*, *Cabri-Géomètre* e *Tabulae Colaborativo*) e ferramentas para teste automático dos alunos (e.g. *Stack*). Estes tipos de ferramentas proporcionam estratégias de ensino que vem sendo testadas e utilizadas com resultados animadores há mais de uma década (e.g. [2,3,4]). No entanto, o uso de tais tecnologias em sala de aula ainda limita-se a eventos esporádicos, sem uma integração com o processo de ensino como um todo.

Ferramentas computacionais podem oferecer um espaço de efetiva aprendizagem de Matemática, permitindo o teste de hipóteses, a formulação de conjecturas e simulações do comportamento de objetos matemáticos. Estratégias como a resolução de problemas ([4,5]) podem ter resultados efetivos em sala de aula, aproximando o aluno do fazer-matemática, incentivando a descoberta e a argumentação. Segundo Polya [6],

Um professor de Matemática tem [na resolução de problemas] uma grande oportunidade. [...] Se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos

^{*}LIMC/UFRJ, RJ, Brasil, ulissessedias@limc.ufrj.br

[†]CAp-UERJ, RJ, Brasil, francisco.mattos@gmail.com

[‡]CEFET-RJ, RJ, Brasil, filipehasche@gmail.com

destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Neste trabalho, apresentamos algumas atividades de resolução de problemas nos conteúdos de pré-cálculo e cálculo diferencial. Nestas atividades, pretendemos apresentar aos cursistas a possibilidade de formular problemas onde a investigação e a elaboração de conjecturas pode contribuir para um melhor entendimento dos conceitos. Para isso, utilizaremos um software de geometria dinâmica (GD) que oferece ferramentas de comunicação em rede, muito familiares aos alunos nos usos que fazem do computadores em redes sociais e de comunicação. Fundamentamos nosso trabalho na resolução de problemas em grupos pequenos (até três integrantes), a partir de roteiros que busquem incentivar os participantes de cada grupo à discussão de conceitos que consideramos importantes para aprendizagem do conteúdo abordado.

Desta forma, desejamos evidenciar estratégias para o trabalho presencial ou à distância, permitindo que pesquisadores da mesma área ou alunos de um mesmo curso possam discutir problemas e resultados; propondo, eventualmente, soluções alternativas. Abordagens semelhantes a estas foram testadas em cursos em nível de graduação e educação básica, utilizando softwares que medeiam o compartilhamento de conteúdo matemático online em tempo real [7,8].

Esta estratégia, chamada Aprendizagem Colaborativa apoiada por Computador, tem sido a base para trabalhos recentes de ensino de matemática mediado por tecnologia (e.g. [7]). Os ambientes computacionais projetados para a aprendizagem colaborativa permitem que os participantes do processo de aprendizagem construam seu conhecimento pela discussão e reflexão, produzindo elaborações a partir da geração de conflitos, comparações e avaliações de discursos.

A utilização de um ambiente de GD neste minicurso tem como finalidade aproveitar as características destes ambientes. Segundo [10],

Em certas situações, figuras estáticas em papel têm capacidade relativamente limitada para prover habilidades matemáticas, pois a estrutura matemática da situação não está suficientemente aparente nestas – no máximo mostram um estágio particular do processo.

Os sistemas de GD permitem manipulação direta dos objetos matemáticos em estudo e oferece facilidade de geração de movimento preservando propriedades geométricas da construção. Com isso, os alunos podem observar invariantes, conjecturar, abandonar hipóteses criando condições para possíveis generalizações de resultados; processo este, importante na aprendizagem de matemática.

Um sistema de geometria dinâmica permite que certas propriedades geométricas das construções fiquem auto-evidentes ou que o aluno seja surpreendido em relação a suas expectativas iniciais, o que pode ser utilizado para evidenciar a necessidade de demonstrar e estabelecer rigorosamente os resultados conjecturados. Assim, este tipo de ambiente pode ter um papel relevante nas diversas situações de ensino em que é possível modelar problemas matemáticos.

Para realizar estas atividades, utilizaremos o software de geometria dinâmica Tabulae Colaborativo (TC); um programa que, além de possuir as funcionalidades de um sistema de Geometria Dinâmica, é dotado de uma interface para comunicação remota (tanto da imagem das construções, quanto de texto em modo *chat*). Estas funcionalidades serão utilizadas para desenvolver atividades em grupos pequenos, em um primeiro momento. A seguir, os cursistas criarão suas próprias atividades, permitindo que, posteriormente, possam desenvolver projetos semelhantes em suas escolas ou universidades.

2 Desenvolvimento de Atividades Colaborativas

Muitas ideias e problemas do Cálculo Diferencial envolvem noções de variação e variabilidade, de difícil exploração em um ambiente estático, como a lousa ou a folha de papel. Assim, propomos atividades que ajudem os alunos

a compreender a variabilidade dos objetos no estudo inicial desta disciplina, considerando os obstáculos de compreensão advindos desta inexperiência. Acreditamos que o contato com construções em ambiente dinâmico pode contribuir para o desenvolvimento desta habilidade necessária para uma compreensão significativa do Cálculo. A seguir, apresentamos algumas atividades a serem realizadas a partir de construções no TC:

2.1 Parte I: Pré-Cálculo

As atividades desta parte servirão para a familiarização dos cursistas com as ferramentas do software Tabulae Colaborativo e com conceitos iniciais do cálculo.

Atividade 1

Esta atividade terá como meta o estudo de algumas propriedades da função: $y(x) = -x^3 + 4x$. A partir de uma tela pré-preparada (ilustrada na Figura 1), pergunta-se:

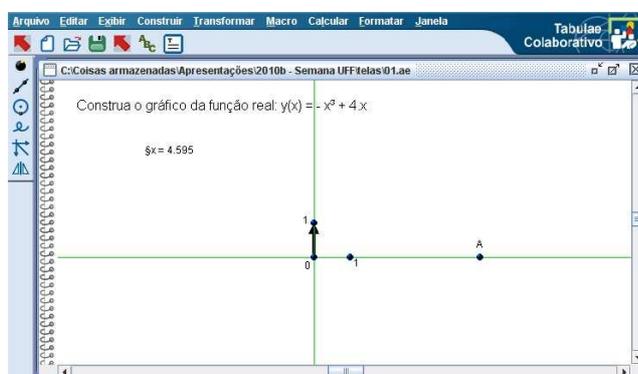


Figura 1: Atividade 1

- É possível determinar precisamente os zeros desta função?
- É possível determinar precisamente os pontos extremos (locais) desta função?

Acreditamos que alunos que ainda não tiveram contato com as ferramentas do Cálculo Diferencial, pensem na viabilidade de responder o item (b), alegando que a abscissa de um ponto extremo pode ser obtida pela média aritmética de duas raízes. Esta consideração é plenamente compreensível; pois no estudo das funções quadráticas, tal procedimento era realizado com sucesso devido à simetria de seu gráfico.

Também é possível que argumentem que o gráfico obtido é composto por dois segmentos de parábola. Esta consideração (falsa) também é compreensível, devido à ênfase dada no estudo de funções quadráticas em detrimento do estudo das outras funções polinomiais. Assim, esta atividade pode ser produtiva no sentido de apresentar aos alunos a demanda de um estudo mais aprofundado sobre funções reais.

Atividade 2

Para esta atividade, propomos o seguinte problema:

Problema 1: Utilizando uma folha retangular de papelão medindo 30cm x 50cm, construiremos uma caixa sem tampa cortando quadrados iguais em seus quatro cantos e dobrando as abas. Determine o tamanho do corte que maximiza o volume da caixa.

A figura 2 é uma simulação do processo, feita no TC. No caso, relaciona-se o volume da caixa com as dimensões da mesma.

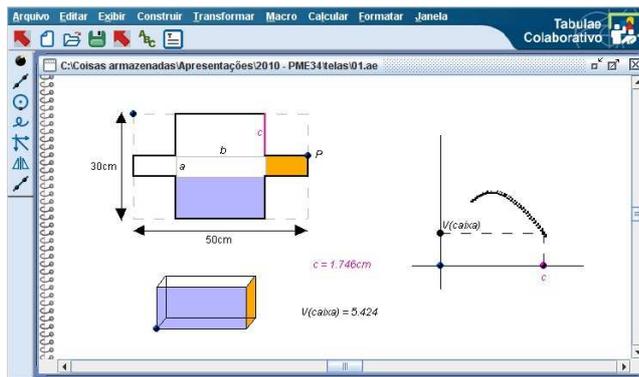


Figura 2: Atividade 2

Ao obter a expressão que relaciona o tamanho do corte com o volume da caixa, é interessante observar a restrição do domínio da função. Não é incomum acontecer de o aluno não compreender a necessidade de tal restrição, achando que basta apenas dizer que o tamanho do corte deve ser positivo. Ao fazermos isso, damos espaço para que o aluno observe a necessidade de uma restrição de movimento a fim de obtermos uma construção robusta. Novamente, perguntaremos aos cursistas:

- (a) É possível determinar precisamente o tamanho do corte que maximiza o volume da caixa?

2.2 Parte II: Cálculo Diferencial

As atividades da seção anterior, se aplicadas a alunos que ainda não tiveram contato com as ferramentas do cálculo diferencial, podem suscitar o questionamento: como determinar precisamente as coordenadas de pontos extremos de uma função real? Nas atividades propostas nesta parte, trataremos do método de construção de uma reta tangente ao gráfico de uma função para responder às questões das atividades da seção anterior.

Atividade 3

Nesta atividade, trabalharemos com a função real: $f(x) = 0,1x^3 - x - 1$. O objetivo inicial é construir a reta tangente ao gráfico de f em um ponto qualquer $(x, f(x))$.

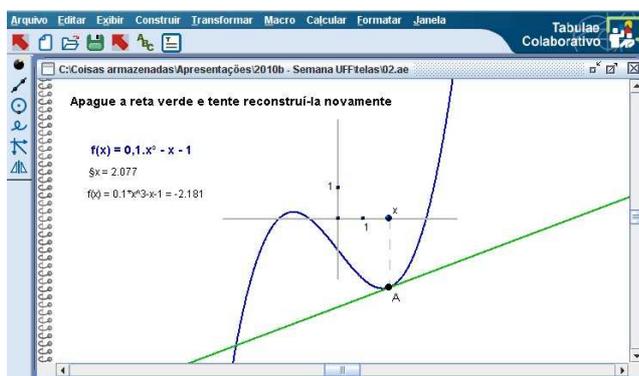


Figura 3: Atividade 3

Para os alunos que não tem conhecimento do cálculo da derivada de uma função, esta atividade pode ser realizada fazendo a construção de uma reta secante ao gráfico e aproximar sua vizinhança o máximo possível. Com

isso, podemos apresentar a definição de derivada utilizando o conceito de limite (e de reta tangente) ainda de forma intuitiva.

Ao fim da construção e da definição de derivada, podemos explorar algumas questões relativas à *Atividade 1*:

- Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $P = (1, y(1))$.
- Pela resposta encontrada no item (a), o ponto P é extremo da função?
- Como determinar precisamente os pontos de extremo de y ?

Já para alunos que conhecem o cálculo diferencial, pode-se tentar outra abordagem, vinculando o valor da derivada da função em um ponto com o coeficiente de inclinação da reta tangente pedida.

Uma vez construída a reta tangente pedida, podemos ir adiante na exploração da relação entre a função dada e sua função derivada; como ilustrado na Figura 4:

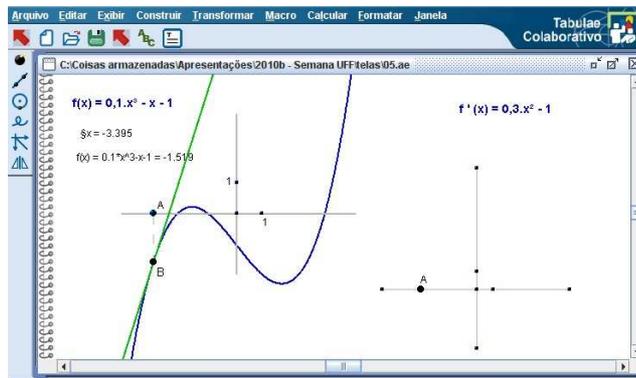


Figura 4: Atividade 3 (continuação)

(a) Com respeito à função f , construa o gráfico de sua função derivada no Sistema de Coordenadas Cartesianas à direita da Figura 4.

(b) Observando atentamente o gráfico de f' , analise o comportamento (crescimento e concavidade) da função f original.

Vários outros conceitos podem ser trabalhados desta forma; como limites e comportamento assintótico, por exemplo. Neste minicurso, apresentaremos uma quantidade suficiente para que não haja repetição de atividades entre os grupos participantes e para adequar a atividade ao nível de cada grupo.

3 Planejamento e Criação de Atividades

A parte final do minicurso consiste em aprender a cadastrar, criar e disponibilizar atividades de sessões colaborativas com o Tabulae. As atividades realizadas com o TC necessitam de um sistema que gere as informações trocadas pelos usuários e sua forma de organização.

Para isso, foi desenvolvido um ambiente, chamado Portal de Colaboração Matemática. Neste ambiente são criadas e cadastradas atividades e é feito todo o gerenciamento do trabalho dos alunos. Nesta página foram agregados elementos para possibilitar o uso de professores e acompanhamento dos alunos.

3.1 O Portal de Colaboração Matemática

Cada atividade do TC possui um professor responsável pela sua criação, descrição, e cadastramento dos participantes. Todo o conteúdo produzido por estas ações fica disponível para acesso dos participantes (alunos e professores) cadastrados na atividade. O Portal de Colaboração Matemática (www.tabulae.net) fornece suporte

para todas as etapas da realização de atividades à distância pelo TC. No Portal, um usuário pode criar uma atividade, participar daquelas em que estiver vinculado, rever o que foi feito em atividades anteriores e publicar suas construções geométricas.

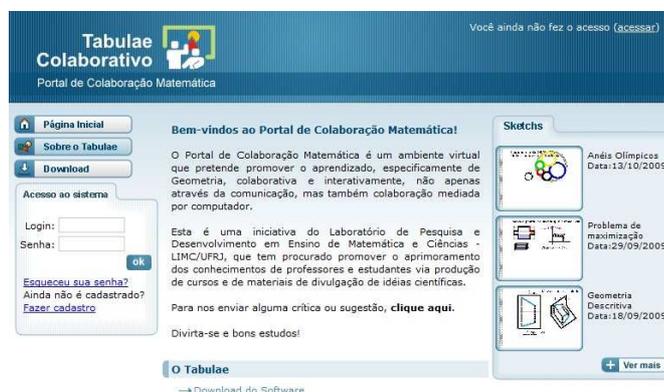


Figura 5: O Portal do Colaboração Matemática

O objetivo principal de conhecer e utilizar o portal é dotar os participantes do minicurso de autonomia para a criação de atividades futuras. Desta forma, desejamos motivar a utilização de ambientes de aprendizagem colaborativa para o ensino de matemática.

Referências

- [1] HASCHE, F. - *Geometria Dinâmica na Formação de Professores*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2010.
- [2] GOOS, M.; GALBRAITH, P.; RENSHAW, P.; GEIGER, V. - Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, No.22, pp. 73-89, 2003.
- [3] POLLANEN, M. - A Interactive Web-Based Mathematics Communication. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, Vol. 6, October, 2006.
- [4] SANGWIN, C. J. - Assessing higher skills with computer algebra marking. *JISC Technology and Standards Watch*, Vol. 6, October, 2006.
- [5] KRULIK, S.; REYS, R. (org.) - *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*, São Paulo: Atual, 1997.
- [6] POLYA, G. - *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
- [7] GUIMARÃES, L. C., MORAES, T. G. & MATTOS, F. Cooperative distance learning in Mathematics. In 3rd International Conference on multimedia and Information & Communication Technologies in Education. *US-China Education Review*, Vol. 2, No. 9, pp. 42-45, 2005.
- [8] MATTOS, F.R.P. - *Roteiros de Colaboração para o Software Tabulae: Estratégias didáticas para um modelo de aprendizagem colaborativa apoiada por computador à distância em geometria*. Tese D. Sc., COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 289p., 2007.
- [9] TALL D.O.; & VINNER S. - Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169, 1981.
- [10] YERUSHALMY, M. - Generalization in geometry. In SCHWARTZ, J. L., YERUSHALMY, M., WILSON, B. (EDS) - *The Geometric Supposer, What is it a Case of?*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 57-84, 1993.