V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

A RAZÃO ÁUREA E A SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI

Thiago Yukio Tanaka *

1 Breve introdução, fi e bonacci

A razão áurea ou "fi" é um número admirado pela sua aparência estranha combinado com uma forma surpreendente de aparecer nos lugares mais diferentes. Temos sua presença nas pirâmides do Egito, no Pathernon, num pentágono regular, em obras renascentistas, nas espirais da concha de um molusco e de um girassol, no corpo humano, nas ondas do mar e em diversos outros lugares. Pela sua constante presença na natureza, ela foi conhecida como proporção divina, sendo algo como um número que servia como instrumento da criação de Deus. O "fi" é um numero irracional cuja aproximação com poucos dígitos é $\phi = 1,6180339887498948482O4$.

Construída por Leonardo Pisano, também conhecido como Fibonacci (uma abreviação referente a "filho de Bonacci"), uma sequência aparentemente inocente é tão surpreendente quanto o "fi", é a seqüência: $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots, a_{n+2}, \ldots\}$ com $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ e sua relação como número áureo é bem estreito. Temos a aparição desses números em espirais, sejam elas a concha de um molusco, em ondas, em uma orelha ou em galáxias, em crescimentos de plantas, em colméias e em tantos outros lugares.

2 Construindo as ferramentas

2.1 Demonstrações

Sobre certo conjunto de proposições, as demonstrações com lógicas corretas são verdades absolutas, demonstrar é diferente de verificar. Uma verificação pode ser verdadeira até certo ponto, mas uma vez demonstrada, a sentença será verdadeira sempre, nas condições estabelecidas pelas proposições. As demonstrações são ferramentas importantes para a validação de sentenças, estas geralmente contam com duas partes, a hipótese e a tese. A hipótese é o que julgamos ser verdadeiro e a tese é o que temos incerteza e vamos verificar sua qualidade se é verdadeira ou falsa.

2.1.1 Demonstração por redução ao absurdo.

Consiste em negar a premissa verdadeira, a hipótese, ou seja, considerá-la como falsa e no final chegar a um absurdo em relação à tese.

Exemplo: Prove que $\sqrt{2}$ é um numero irracional.

2.1.2 Demonstração pelo princípio da indução finita.

Consiste em demonstrar que uma premissa "$P(n)$" chamada de hipótese de indução é verdadeira com uma série de passos. São eles:

- $P(n_0)$ é verdadeira, em que n_0 é o primeiro número natural que podemos usar para determinada expressão.
- Supondo que $P(k)$ é valido, com $k \geq n_0$, $P(k+1)$ também deve ser válido.

*Universidade Federal de Pernambuco , DMAT, PE, Brasil, t.y.tanaka@hotmail.com.br

Se essas duas condições forem satisfeitas teremos que $P(n)$ será valido sempre que $n \geq n_0$, com n, n_0 e k pertencendo aos naturais. *Exempl:o* Prove que $2^{2n} - 1$ e $2^{2n+1} + 1$ são ambos divisíveis por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 0$.

2.1.3 Demonstração por construção ou exaustão.

Consiste em montar situações concretas e verificar que são verdadeiras. Exemplo: Prove que $x^3 + x^2 - 4x - 4$ é divisível por $x^2 - 4$ para todo $x \neq \pm 2$.

2.1.4 Limites

Quando estudamos limites, estamos verificando, a partir de uma função pré-estabelecida, o comportamento da sua imagem nas redondezas de algum ponto determinado, pode esse ponto pertencer ou não ao nosso intervalo em que a função está determinada. Dizemos que: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Exemplo: Determine se existe o limite de $\lim_{x \to 2} x^2 - 2$.

2.1.5 Teorema

Esses são teoremas que vamos usar nas últimas atividades do minicurso.

1. Se uma sequência (X_n) nos reais é monótona e não decrescente, ou seja, $X_{n+1} \geq X_n$ (o termo posterior é sempre maior ou igual ao anterior) e, além disso, ela é limitada superiormente, ou seja, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(X_n) \leq M$ (qualquer termo da seqüência é sempre menor ou igual a M), então ela é convergente, ou seja, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que: $L = \lim_{x \to \infty} X_n$

2. Se uma sequência (X_n) nos reais é monótona e não crescente, ou seja, $X_{n+1} \leq X_n$ (o termo posterior é sempre menor ou igual ao anterior) e, além disso, ela é limitada inferiormente, ou seja, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $(X_n) \geq m$ (qualquer termo da seqüência é sempre maior ou igual a m), então ela é convergente, ou seja, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que: $L = \lim_{x \to \infty} X_n$

3. Para uma sequência (X_n), se as subsequências de ordem par e as subseqüências de ordem ímpar convergem para o mesmo valor L, então (X_n) converge também para L.

3 Atividades

3.1 Atividades 1 - razão áurea

"ode ser demonstrado experimentalmente que a altura de uma pessoa, quando comparada a distancia entre seus pés e seu umbigo, obedece à mesma relação" (Sautoy, 2003)

3.1.1 Razão média e extrema

Um segmento de reta AB de tamanho "$a + b$" e sendo C um ponto no interior de AB tal que $AC = a$ e $BC = b$ e considere $a > b$, sem perda de generalização, temos que esses segmentos estão numa relação áurea se:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Demonstre por construção que $\frac{a}{b} = \phi$

Curiosidades: O retângulo e o triângulo de ouro.

As duas figuras planas conhecidas como retângulo de ouro e triângulo de ouro são formas recorrentes da razão média e extrema, no caso acima poderíamos construir um retângulo de ouro se ele tiver a base medindo "$a + b$" e a altura medindo "a". Já o triângulo de ouro é obtido quando temos um triangulo isósceles de base igual a "a" e os outros dois lados iguais a "$a + b$". Podemos encontrar triângulos de ouro nos triângulos formados em um decágono regular ligando o centro e dois vértices consecutivos. Estudiosos das artes dizem que essas figuras determinam proporções de beleza sem igual, quadros famosos como a Monalisa de Leonardo da Vinci ou edificações como o Pathernon na Grécia foram ambos desenvolvidos em proporções de retângulos áureos.

3.1.2 Séries de frações e de raízes

a) Calcule o valor de

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

b) De modo semelhante, encontre o valor de

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

c) As equações que obtemos acima para encontrar a razão áurea podem ser escritas da forma $x^2 - x - 1 = 0$, cujas soluções são: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Essa primeira raiz nós conhecemos como ϕ, a segunda em termos de ϕ será igual a $-\frac{1}{\phi}$.

Construa a solução para esse fato. Dica: Lembre das relações de Girard de soma e produto para equações do segundo grau.

3.1.3 O pentágono regular

Dado um pentágono regular de lado igual a "a", determine:

a) O tamanho de sua diagonal

b) Mostre que o lado e a diagonal do pentágono são grandezas incomensuráveis (ser, ou seja, nunca encontraremos uma unidade, o tão pequena quanto desejarmos que forme esses dois números)

c) (Desafio) Calcule a área desse pentágono regular de lado "a"

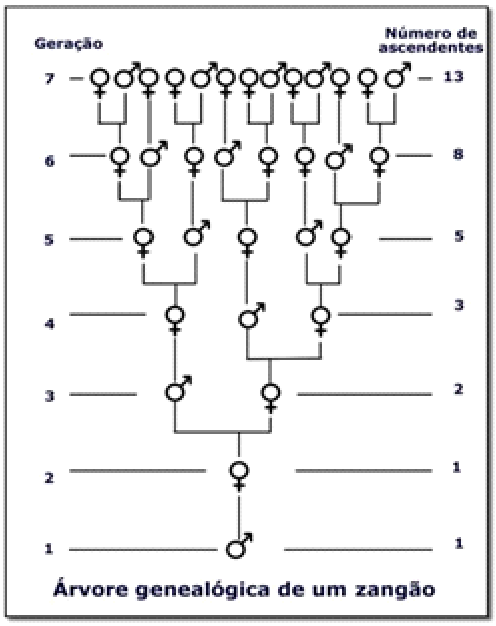
3.2 Atividades 2 - sequência de fibonacci

Coelhos e agora abelhas.

A relação da propagação de coelhos, dentre todas as relação que envolvem a sequência de Fibonacci, é de fato a mais conhecida e, possivelmente, a mais apresentada. Explicação: No inicio existe um coelho novo e fêmea que cresce depois de dois e da origem a outro coelho fêmea. Este por sua vez, depois de dois meses cresce e da origem a outro coelho fêmea e assim por diante, lembrando que os coelhos já adultos sempre terão filhos durante o crescimento dos coelhos novos. Considere "c" e "C" coelhos novos e adultos respectivamente, traduzindo as etapas num esquema de símbolos teremos:

$$c = 1,\ C = 1,\ Cc = 2,\ CCc = 3,\ CCCcc = 5,\ CCCCCccc = 8, \ldots$$

Essa relação pode ser vista de forma impressionante na "arvore genealógica"de um zangão. Explicação: O zangão e as abelhas operárias diferem um do outro devido ao fato de que uma abelha provém de um óvulo fecundado, já o zangão provém de um óvulo não fecundado.



Nos seres humanos é como se uma mulher engravidasse sem que houvesse presença do espermatozóide, é um fenômeno chamado de *Partenogênese*. Voltando a explicação, um zangão só possui uma mãe, já uma abelha operária possui uma mãe e um pai e isso resulta na tabela ao lado.

3.2.1 Soma relâmpago

Some termos consecutivos da sequência de Fibonacci até certo número, me diga esse número e direi qual o valor da soma. *Demonstre por construção ou por indução finita que:*$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n = a_{n+2} - 1$.

3.2.2 Ternas pitagóricas

Escolha quatro termos consecutivos quaisquer da sequência de Fibonacci.

a) Tome o primeiro e o último termo e multiplique-os, guarde o resultado numa incógnita "x".

b) Tome o dobro do produto do segundo pelo terceiro termo e reserve numa variável "y".

c) Tome o a soma dos quadrados do segundo e do terceiro termo e reserve numa variável "z".

Agora verifique que: $x^2 + y^2 = z^2$, e, além disso, demonstre esse fato por construção ou por indução finita.

3.2.3 Um quadrado de retângulos

A soma dos produtos consecutivos dois a dois de termos consecutivos em quantidade ímpar da sequência de Fibonacci é igual ao quadrado do último número.

Exemplo: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 9 = 3^2$ ou $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 64 = 8^2$.

Demonstre esse fato por construção ou por indução finita.

3.3 Atividade 3 - relação entre os dois temas

3.3.1 O fi e a sequência

Existe uma fórmula que nos da de maneira surpreendente qualquer termo da sequência de Fibonacci, é dita a formula de Binet, que é dada pela fórmula:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq 1.$$

a) Escolha um termo qualquer dos anexos, verifique a sua posição, substitua o valor de n e verifique que o a_n é o número que você escolheu.

b) Verifique que a sequência (a_{n+1}/a_n) é monótona não decrescente e é limitada superiormente se $n = 2k+1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq 0$ e que ela é monótona não crescente e limitada inferiormente se $n = 2k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq 0$.

c) Agora em posse da fórmula do termo geral e do dado do "item b)"mostre que:

$$\phi = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

.

4 A sequência de fibonacci em uma abordagem diferente

Já vimos que a sequência de Fibonacci é aquela que possui a recorrência: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ e que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ e a partir daí temos todo e qualquer termo dessa sequência. Perceba que sempre estudamos o caso em que os índices "n"crescem, mas podemos também fazer os índices decrescerem. Não existe nenhum problema em tentar descobrir a_{-2} ou a_{-10}, mas esse fato quase nunca é abordado. Por exemplo, vamos tentar encontrar a_{-1}, pela recorrência teremos que $a_{(-1)+2} = a_{(-1)+1} + a_{-1}$, daí $a_1 = a_0 + a_{-1}$ e assim $a_{-1} = a_1 - a_0 = 1$, da mesma maneira podemos descobrir todos os outros elementos para índices inteiros e não apenas naturais.

Vamos estudar agora um caso mais geral da sequência do tipo de Fibonacci. Seja uma sequência em que vale a recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, mas agora considere que $a_0 = u$ e $a_1 = v$ e ainda mais, $u, v \in \mathbb{R}$. A partir daí vamos obter alguns resultados.

1. Mostre que a soma de duas sequência do tipo de Fibonacci também é uma sequência do tipo de Fibonacci.

2. Mostre por indução que se duas sequências do tipo de Fibonacci possuem dois elementos consecutivos iguais então elas representam a mesma sequência.

Vamos estudar agora essa sequência do tipo de Fibonacci como uma progressão geométrica e chegar a resultados bastante satisfatórios. Se uma sequência do tipo de Fibonacci fosse representada da forma $a_n = t.r^n$, em que $t \in \mathbb{R}$, de fato estaríamos trabalhando com uma P.G de razão r, pois cada termo posterior (ou anterior) obtém-se multiplicando (ou dividindo) o termo pela razão. Se a recorrência vale teremos:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Leftrightarrow t.r^{n+2} = t.r^{n+1} + t.r^n \Leftrightarrow r^n(r^2 - r - 1) = 0$$

Vamos admitir que $t \neq 0$ e assim podemos "cancelá-lo", caso contrário trabalharemos com uma sequência nula. Teremos que a solução para essa equação é $r = 0$ ou r é solução da equação do segundo grau cujas soluções já abordamos e são: $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ ou $r = r = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$. A solução em que $r = 0$ não é objeto de estudo desse mini curso, pois, tem como solução uma sequência do tipo de Fibonacci em que todos os elementos são zero.

Teremos assim duas sequências do tipo de Fibonacci que se comportam como uma P.G, uma delas é representada por $a_n = \alpha\phi^n$ e a outra é representada por $b_n = \beta(-1)^n \cdot (\frac{1}{\phi})^n$. Por resultados anteriores teremos que a soma de sequência do tipo de Fibonacci continua sendo uma sequência do tipo de Fibonacci, daí teremos que:

$$c_n = a_n + b_n = \alpha\phi^n + \beta(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{\phi}\right)^n$$

Essa última nos da a fórmula geral para qualquer sequência do tipo de Fibonacci, ou seja, é a fórmula geral para gerar todas essas sequência inclusive a sequência de Fibonacci, basta manipular α e β, para que nos primeiros termos, c_0 e c_1, tomem a forma que seja desejado. De uma maneira geral teremos que:
$c_0 = \alpha + \beta$ e $c_1 = \alpha\phi - \frac{\beta}{\phi}$, e assim teremos as soluções para α e β como:

$$\alpha = \frac{c_0 + c_1\phi}{\phi^2 + 1} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{c_0\phi^2 - c_1\phi}{\phi^2 + 1}$$

E assim, teremos que o termo geral de qualquer sequência do tipo de Fibonacci será dado por:

$$c_n = \frac{c_0 + c_1\phi}{\phi^2 + 1}\phi^n + \frac{c_0\phi^2 - c_1\phi}{\phi^2 + 1}(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{\phi}\right)^n$$

Que é de um fato bastante surpreendente.

1. Encontre α e β no caso de $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$, encontre também a sua fórmula para o termo geral e mostre que teremos a sequência de Fibonacci original.

   Fica um pouco mais claro agora como a fórmula de Binet que parece possuir números tão irracionais ser apenas composta por números inteiros. Por fim, é importante salientar que essa fórmula preserva muitas das propriedades já mostradas nesse minicurso, vamos mostrar uma delas, as outras ficam a cargo do leitor curioso.

2. Assumindo o termo geral para uma sequência do tipo de Fibonacci, mostre que $\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $\alpha \neq 0$ e ainda mais, mostre que $-\frac{1}{\phi} = \lim_{n\to-\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $\beta \neq 0$.

5 Anexos

"Fi"com aproximação de algumas casas decimais

1, 61803398874989484820458683436563811772030917980572862135448622705260462818902449707207204189
391137484754088075386891752126633862223536931793180060766

Sequência de Fibonacci com 20 termos primeiros termos

1	1	2	3	5
8	13	21	34	55
89	144	233	377	610
987	1597	2584	4181	6765

Referências

[1] - *ÁRVORE GENEALOGICA DE UM ZANGÃO.*, Disponível em: <http://www.forumpcs.com.br/coluna.php?b=209172>. Acesso em: 20 ago. 2009.

[2] SAUTOY, M. - *A música dos números primos : A história de um problema não resolvido na matemática*, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

[3] LÍVIO, M. - *Razão áurea : A história de FI* , Rio de Janeiro: Editora Record, 2006.

[4] LIMA, E.L. - *Análise real volume 1.*, 10.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2009.

[5] LIMA, E.L. - *Funções de uma variável*

[6] STEWART, J. - *Cálculo, volume I.*, 4a.edição. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.