Aplicações de Combinatória Infinitária em Análise e Topologia

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva
(IM – UFBA)

Departamento de Matemática – Instituto de Matemática
Universidade Federal da Bahia

João Pessoa – Paraíba

Outubro de 2010

Índice I

Índice II

Interior e Fecho. Abertos e Fechados.

Vamos dar algumas noções básicas de “topologia e análise na reta”.

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, definimos a noção de **ponto interior de** A e **ponto aderente a** A:

- Um ponto $a \in A$ é dito um **ponto interior de** A se existe algum $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subset A$.
- Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito um **ponto aderente a** A se para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

Interior e Fecho. Abertos e Fechados.

Vamos dar algumas noções básicas de "topologia e análise na reta".

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, definimos a noção de **ponto interior de** A e **ponto aderente a** A:

- Um ponto $a \in A$ é dito um **ponto interior de** A se existe algum $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subset A$.
- Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito um **ponto aderente a** A se para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

Interior e Fecho. Abertos e Fechados.

Com isso, definimos os conjuntos:

$int(A) = \{a \in A : a$ é ponto interior de $A\}$.

$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x$ é aderente a $A\}$.

Vale sempre $int(A) \subset A$ e $A \subset \overline{A}$. Quando valem as igualdades ?

Abertos e fechados na Reta

- Um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ é dito **aberto** se $U = int(U)$. Ou seja: U é aberto quando todos os seus pontos são interiores.
- Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ é dito **fechado** se $F = \overline{F}$. Ou seja: F é fechado quando todos pontos aderentes a F pertencem a F.

Interior e Fecho. Abertos e Fechados.

Com isso, definimos os conjuntos:

$int(A) = \{a \in A : a \text{ é ponto interior de } A\}$.

$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é aderente a } A\}$.

Vale sempre $int(A) \subset A$ e $A \subset \overline{A}$. Quando valem as igualdades ?

Abertos e fechados na Reta

- Um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ é dito **aberto** se $U = int(U)$. Ou seja: U é aberto quando todos os seus pontos são interiores.
- Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ é dito **fechado** se $F = \overline{F}$. Ou seja: F é fechado quando todos pontos aderentes a F pertencem a F.

Interior e Fecho. Abertos e Fechados.

Um fato importante (que poderia inclusive ser usado como definição...) é o seguinte:

Relação entre os abertos e os fechados

Um conjunto de números reais é fechado se, e somente se, o seu complementar é aberto.

Vamos agora relacionar esses conceitos topológicos com a noção de convergência (que é de análise).

Uma seqüência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **convergente**, com limite x_o (o que se denota "$x_n \to x_o$"), se: para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_o \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant n_0$, os pontos x_n pertencem a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

Seqüências e Fechados

Valem as seguintes propriedades envolvendo conjuntos fechados e seqüências:

Proposição

Um ponto $x \in \mathbb{R}$ pertence ao fecho de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma seqüência de pontos de A que converge para o ponto x.

A demonstração da Proposição acima necessita do **Axioma da Escolha** ! E vale ainda o seguinte

Corolário

Um conjunto de pontos $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, toda seqüência convergente de pontos de F tem o seu limite em F.

Pontos de acumulação

Outra noção muito importante, tanto para a análise como para a topologia, é a noção de **ponto de acumulação**.

Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito um **ponto de acumulação** de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ o intervalo aberto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ possui pontos de A que são **diferentes de** x.

Vamos listar as propriedades que envolvem pontos de acumulação e as noções já discutidas.

Pontos de acumulação

Pontos de acumulação, fechados e seqüências

- Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.
- Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma seqüência de **pontos distintos de** A que converge para x.

Uma outra preocupação importante para a topologia é se um conjunto "contém" pontos de acumulação.

Exercício. Mostre que o conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\}$ **possui** pontos de acumulação, mas **não contém** pontos de acumulação.

Pontos de acumulação

Pontos de acumulação, fechados e seqüências

- Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.
- Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma seqüência de **pontos distintos de** A que converge para x.

Uma outra preocupação importante para a topologia é se um conjunto "contém" pontos de acumulação.

Exercício. Mostre que o conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\}$ **possui** pontos de acumulação, mas **não contém** pontos de acumulação.

Continuidade de funções

A preocupação maior da topologia é: quais propriedades um espaço mantém (ou "preserva") após sofrer "deformações contínuas"(nas quais não existam, por exemplo, "quebras", "rasgos" ou "saltos").

Intuitivamente, uma deformação é contínua se "**pontos grudados permanecem grudados**".

Para um topólogo, **um quadrado e um círculo são objetos indistingüíveis !!!!** Por isso, às vezes a topologia é chamada de "a geometria da borracha".

A formalização dessas noções é feita com a noção de **funções contínuas** - as quais, intuitivamente, "**fazem com que pontos grudados permaneçam grudados**".

Continuidade de funções

Existe uma famosa definição de continuidade de funções, usando "epsilons e deltas", mas não vamos dá-la aqui ! A seguinte caracterização por seqüências (obtida via Axioma da Escolha) é mais intuitiva e basta para esta apresentação:

Funções contínuas e seqüências

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **contínua num ponto** x_o se, e somente se, para toda seqüência convergente $x_n \to x_o$ tem-se, também, $f(x_n) \to f(x_0)$.
- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **contínua** se for contínua em todo ponto.

Belo exemplo de "boa convivência" entre a topologia e a análise !!

Continuidade de funções

Existe uma famosa definição de continuidade de funções, usando "epsilons e deltas", mas não vamos dá-la aqui ! A seguinte caracterização por seqüências (obtida via Axioma da Escolha) é mais intuitiva e basta para esta apresentação:

Funções contínuas e seqüências

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **contínua num ponto** x_o se, e somente se, para toda seqüência convergente $x_n \to x_o$ tem-se, também, $f(x_n) \to f(x_0)$.
- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **contínua** se for contínua em todo ponto.

Belo exemplo de "boa convivência" entre a topologia e a análise !!

Cardinalidades

Neste minicurso, estamos interessados em aplicações de **combinatória infinitária** (i.e., combinatória envolvendo conjuntos infinitos) em topologia e análise (da reta).

Para usarmos esses argumentos combinatórios, temos que ter noções sobre os "tamanhos" dos conjuntos infinitos envolvidos.

Os objetos matemáticos, dentro da Teoria dos Conjuntos, que capturam a idéia de "tamanho" de um conjunto são os chamados **cardinais**.

A cardinalidade de um conjunto A

Todo conjunto A possui um cardinal associado, chamado de **cardinalidade de** A e denotado $|A|$.

Cardinalidades

No caso de conjuntos finitos, a cardinalidade é exatamente o número de elementos. Por exemplo, se A é o conjunto formado pelos números da semana, então $|A| = 7$.

E para conjuntos infinitos ? **Em geral, como podemos comparar o tamanho de conjuntos infinitos ?**

Conjuntos equipotentes

Dois conjuntos A e B são ditos **equipotentes** (o que se denota $A \approx B$) se existe uma função $f : A \to B$ bijetora.

Cardinalidades

Observamos que $A \approx B$ se, e somente se, $|A| = |B|$ (ou seja, **dois conjuntos possuem mesmo tamanho se, e somente se, existe alguma bijeção entre eles**; os objetos envolvidos são definidos para que isso seja verdade !!!). Esse fato, fundamental para a Teoria dos Conjuntos, vale tanto para os conjuntos finitos como para os infinitos.

Usamos funções bijetoras para dizer que "dois conjuntos têm mesmo tamanho". Já para dizer que um conjunto "é menor ou igual a outro", usamos funções **injetoras**.

Funções injetoras e dominação

Vamos definir agora a noção de **dominação** entre conjuntos.

A relação de dominação

Dizemos que um conjunto A é **dominado** por um conjunto B (o que se denota $A \preccurlyeq B$) se existe uma função $f : A \to B$ injetora.

Vale agora também que: $|A| \leqslant |B|$ se, e somente se, $A \preccurlyeq B$.

Exemplo: Um conjunto X é infinito, se e somente se, $\mathbb{N} \preccurlyeq X$.

No exemplo acima, usamos novamente o Axioma da Escolha !

O Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor

O resultado mais importante envolvendo a relação de dominação é o chamado **Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor**, cuja demonstração **não necessita do Axioma da Escolha**.

O Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor

Se $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq A$, então $A \approx B$.

O principal uso do teorema acima é: mostrar que dois conjuntos têm mesmo tamanho, sem precisar construir uma bijeção entre eles - basta mostrar que existem injeções nos dois sentidos ! Vamos fazer uso dessa técnica várias vezes durante o minicurso.

Exercício: Use o Teorema S.B.C. para mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis

Um conjunto X é dito **enumerável** se $X \preccurlyeq \mathbb{N}$. Assim, X é enumerável se ocorrer um entre os seguintes dois casos:

- X é finito; ou
- X é infinito e $X \approx \mathbb{N}$.

Um conjunto infinito é dito **não-enumerável** se não for enumerável.

Uma primeira pergunta que alguém pode ter é: **existem conjuntos não-enumeráveis ?** Ou, até mais geralmente: **existem conjuntos infinitos que são "maiores" que outros conjuntos infinitos ?**

Os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Com relação aos conjuntos numéricos, temos ("passando rapidamente, podemos voltar a isto no final"...):

- $\mathbb{N}$ é enumerável (obviamente !)
- $\mathbb{Z}$ é enumerável (o que pode ser visto com a alegoria do "Hotel de Hilbert";)
- $\mathbb{Q}$ é enumerável (o que é uma conseqüência de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ser enumerável;)
- $\mathbb{R}$ é **não-enumerável** ("argumento diagonal de Cantor".)

Os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Com relação aos conjuntos numéricos, temos ("passando rapidamente, podemos voltar a isto no final"...):

- $\mathbb{N}$ é enumerável (obviamente !)
- $\mathbb{Z}$ é enumerável (o que pode ser visto com a alegoria do "Hotel de Hilbert";)
- $\mathbb{Q}$ é enumerável (o que é uma conseqüência de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ser enumerável;)
- $\mathbb{R}$ é **não-enumerável** ("argumento diagonal de Cantor".)

Os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Com relação aos conjuntos numéricos, temos ("passando rapidamente, podemos voltar a isto no final"...):

- $\mathbb{N}$ é enumerável (obviamente !)
- $\mathbb{Z}$ é enumerável (o que pode ser visto com a alegoria do "Hotel de Hilbert";)
- $\mathbb{Q}$ é enumerável (o que é uma conseqüência de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ser enumerável;)
- $\mathbb{R}$ é **não-enumerável** ("argumento diagonal de Cantor".)

Os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Com relação aos conjuntos numéricos, temos ("passando rapidamente, podemos voltar a isto no final"...):

- $\mathbb{N}$ é enumerável (obviamente !)
- $\mathbb{Z}$ é enumerável (o que pode ser visto com a alegoria do "Hotel de Hilbert";)
- $\mathbb{Q}$ é enumerável (o que é uma conseqüência de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ser enumerável;)
- $\mathbb{R}$ é **não-enumerável** ("argumento diagonal de Cantor".)

Sobre os tamanhos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ é denotada $\aleph_0$ - lê-se "aleph-zero".

Com o auxílio do Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor, pode-se (facilmente, até !) mostrar que os seguintes três conjuntos possuem a mesma cardinalidade:

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que é a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$.
- ${}^{\mathbb{N}}2$, que é a família de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $2 = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.

  Devido à equipotência entre $\mathbb{R}$ e a família das funções de $\mathbb{N}$ em 2 ("seqüências binárias infinitas"), a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é denotada $2^{\aleph_0}$. Também escreve-se $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, pois $2^{\aleph_0}$ é tradicionalmente chamado de "a cardinalidade do **continuum**".

Sobre os tamanhos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ é denotada $\aleph_0$ - lê-se "aleph-zero".

Com o auxílio do Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor, pode-se (facilmente, até !) mostrar que os seguintes três conjuntos possuem a mesma cardinalidade:

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que é a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$.
- ${}^{\mathbb{N}}2$, que é a família de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $2 = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.

  Devido à equipotência entre $\mathbb{R}$ e a família das funções de $\mathbb{N}$ em 2 ("seqüências binárias infinitas"), a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é denotada $2^{\aleph_0}$. Também escreve-se $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, pois $2^{\aleph_0}$ é tradicionalmente chamado de "a cardinalidade do **continuum**".

Sobre os tamanhos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ é denotada $\aleph_0$ - lê-se "aleph-zero".

Com o auxílio do Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor, pode-se (facilmente, até !) mostrar que os seguintes três conjuntos possuem a mesma cardinalidade:

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que é a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$.
- ${}^{\mathbb{N}}2$, que é a família de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $2 = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{R}$.
  Devido à equipotência entre $\mathbb{R}$ e a família das funções de $\mathbb{N}$ em 2 ("seqüências binárias infinitas"), a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é denotada $2^{\aleph_0}$. Também escreve-se $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, pois $2^{\aleph_0}$ é tradicionalmente chamado de "a cardinalidade do **continuum**".

O Teorema de Cantor

Como $\mathbb{R}$ é não-enumerável, o que temos é $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Essa desigualdade estrita pode ser encarada como caso particular de:

O Teorema de Cantor

Para qualquer conjunto X vale que $|X| < |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Ou seja, para qualquer conjunto infinito, existe um conjunto infinito maior do que ele !

A demonstração do Teorema acima constitui o seguinte

Exercício: Seja $f : X \to \mathcal{P}(X)$ uma função. Mostre que, se $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$, então $Y \notin im(f)$. Conclua que não existe função sobrejetora de X em $\mathcal{P}(X)$.

O que é um princípio combinatório ?

Essencialmente, um “princípio combinatório” é uma asserção matemática que declara a validade de um determinado “fato combinatório” – ou seja, é uma afirmação matemática sobre um certo fenômeno que envolva algum tipo de “contagem”.

Princípios e argumentos combinatórios podem ser aplicados em todas as áreas da matemática (por exemplo, a resolução do chamado “Problema da Base Incondicional”, em Análise Funcional, utilizou fortemente a Teoria de Ramsey - ver RMU 40).

Por exemplo, o seguinte princípio combinatório é muito utilizado em análise:

Sobre a reunião enumerável de enumeráveis

Princípio Combinatório

Uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Ou seja: dada uma família de conjuntos $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto X_n é enumerável, então o conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

também é enumerável.

Exercício: Demonstre a afirmação acima !!! Tudo o que você precisa é do Axioma da Escolha e do fato que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

O Princípio da Casa dos Pombos

Um dos mais conhecidos princípios combinatórios, ainda em **Combinatória Finitária**, é o chamado "Princípio da Casa dos Pombos".

O Princípio da Casa dos Pombos

Se n objetos forem colocados em k gavetas, com $n > k$, então alguma gaveta deverá conter mais do que um objeto.

Vamos destacar, na seguinte transparência, algumas conseqüências (algumas óbvias, outras não tão óbvias assim...) do Princípio da Casa dos Pombos – ou de "pequenas variações" dele.

Conseqüências do Princípio da Casa dos Pombos

- Dadas 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
- Dadas 367 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia do ano;
- Se uma delicatessen tem 100 clientes para atender com bolos de aniversário num determinado mês, ela tem que ser capaz de, em algum dos dias desse mês, fazer pelo menos 4 bolos;
- Existem pelo menos quatro pessoas em João Pessoa que possuem exatamente a mesma quantidade de fios de cabelo; em Salvador, existem pelo menos treze...
- Dada qualquer lista de dez números entre 1 e 100, existem dois subconjuntos disjuntos de números dessa lista cuja soma é exatamente a mesma.

Conseqüências do Princípio da Casa dos Pombos

- Dadas 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
- Dadas 367 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia do ano;
- Se uma delicatessen tem 100 clientes para atender com bolos de aniversário num determinado mês, ela tem que ser capaz de, em algum dos dias desse mês, fazer pelo menos 4 bolos;
- Existem pelo menos quatro pessoas em João Pessoa que possuem exatamente a mesma quantidade de fios de cabelo; em Salvador, existem pelo menos treze...
- Dada qualquer lista de dez números entre 1 e 100, existem dois subconjuntos disjuntos de números dessa lista cuja soma é exatamente a mesma.

Conseqüências do Princípio da Casa dos Pombos

- Dadas 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
- Dadas 367 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia do ano;
- Se uma delicatessen tem 100 clientes para atender com bolos de aniversário num determinado mês, ela tem que ser capaz de, em algum dos dias desse mês, fazer pelo menos 4 bolos;
- Existem pelo menos quatro pessoas em João Pessoa que possuem exatamente a mesma quantidade de fios de cabelo; em Salvador, existem pelo menos treze...
- Dada qualquer lista de dez números entre 1 e 100, existem dois subconjuntos disjuntos de números dessa lista cuja soma é exatamente a mesma.

Conseqüências do Princípio da Casa dos Pombos

- Dadas 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
- Dadas 367 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia do ano;
- Se uma delicatessen tem 100 clientes para atender com bolos de aniversário num determinado mês, ela tem que ser capaz de, em algum dos dias desse mês, fazer pelo menos 4 bolos;
- Existem pelo menos quatro pessoas em João Pessoa que possuem exatamente a mesma quantidade de fios de cabelo; em Salvador, existem pelo menos treze...
- Dada qualquer lista de dez números entre 1 e 100, existem dois subconjuntos disjuntos de números dessa lista cuja soma é exatamente a mesma.

Conseqüências do Princípio da Casa dos Pombos

- Dadas 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
- Dadas 367 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia do ano;
- Se uma delicatessen tem 100 clientes para atender com bolos de aniversário num determinado mês, ela tem que ser capaz de, em algum dos dias desse mês, fazer pelo menos 4 bolos;
- Existem pelo menos quatro pessoas em João Pessoa que possuem exatamente a mesma quantidade de fios de cabelo; em Salvador, existem pelo menos treze...
- Dada qualquer lista de dez números entre 1 e 100, existem dois subconjuntos disjuntos de números dessa lista cuja soma é exatamente a mesma.

Existem versões infinitas do Princípio da Casa dos Pombos ?

Como estamos interessados em **Combinatória Infinitária**, podemos nos interessar em achar "versões infinitas do Princípio da Casa dos Pombos".

O interessante é que determinadas versões funcionam e determinadas versões não funcionam...

Mais precisamente: vamos listar algumas versões equivalentes do Princípio da Casa dos Pombos, para conjuntos finitos. Em seguida, vamos ver se as "versões para o infinito" funcionam ou não.

Uma lista de equivalências para o Princípio da Casa dos Pombos

Afirmações equivalentes ao Princípio da Casa dos Pombos

São equivalentes:

- O Princípio da Casa dos Pombos.
- Se A e B são conjuntos finitos e $|A| > |B|$, então dada uma função qualquer $f : A \to B$ tem-se que f não é injetora.
- Se A é um conjunto finito e $f : A \to A$ é uma função, então f é injetora se, e somente se, f é sobrejetora.
- Se A é um conjunto finito, então não existe uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A.

Note que a última equivalência acima diz que, para conjuntos finitos, "a parte é sempre menor que o todo"...

Uma lista de equivalências para o Princípio da Casa dos Pombos

Afirmações equivalentes ao Princípio da Casa dos Pombos

São equivalentes:

- O Princípio da Casa dos Pombos.
- Se A e B são conjuntos finitos e $|A| > |B|$, então dada uma função qualquer $f : A \to B$ tem-se que f não é injetora.
- Se A é um conjunto finito e $f : A \to A$ é uma função, então f é injetora se, e somente se, f é sobrejetora.
- Se A é um conjunto finito, então não existe uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A.

Note que a última equivalência acima diz que, para conjuntos finitos, "a parte é sempre menor que o todo"...

Uma lista de equivalências para o Princípio da Casa dos Pombos

Afirmações equivalentes ao Princípio da Casa dos Pombos

São equivalentes:

- O Princípio da Casa dos Pombos.
- Se A e B são conjuntos finitos e $|A| > |B|$, então dada uma função qualquer $f : A \to B$ tem-se que f não é injetora.
- Se A é um conjunto finito e $f : A \to A$ é uma função, então f é injetora se, e somente se, f é sobrejetora.
- Se A é um conjunto finito, então não existe uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A.

Note que a última equivalência acima diz que, para conjuntos finitos, "a parte é sempre menor que o todo"...

Uma lista de equivalências para o Princípio da Casa dos Pombos

Afirmações equivalentes ao Princípio da Casa dos Pombos

São equivalentes:

- O Princípio da Casa dos Pombos.
- Se A e B são conjuntos finitos e $|A| > |B|$, então dada uma função qualquer $f : A \to B$ tem-se que f não é injetora.
- Se A é um conjunto finito e $f : A \to A$ é uma função, então f é injetora se, e somente se, f é sobrejetora.
- Se A é um conjunto finito, então não existe uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A.

Note que a última equivalência acima diz que, para conjuntos finitos, "a parte é sempre menor que o todo"...

Versões infinitas valem ou não ?

A seguinte versão infinita ("versão da primeira equivalência") vale:

Princípio Combinatório – "Versão do P.C.P. que vale"

Se A e B são conjuntos quaisquer e $|A| > |B|$, então não pode existir uma função $f : A \to B$ que seja injetora.

Demonstração: Se existisse a função injetora, teríamos que ter $A \preccurlyeq B$ e conseqüentemente $|A| \leqslant |B|$, contradição.

Exemplo: Dada uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{Q}$, com certeza essa função não é injetora (por quê ?).

Versões infinitas valem ou não ?

Porém, se pensamos na terceira e na quarta equivalência do Princípio da Casa dos Pombos... A versão infinita não vale !

Princípio Combinatório – "Versão do P.C.P. não vale"

Um conjunto X é infinito, se, e somente se, possui bijeções com partes próprias.

Ou seja: para **todo** conjunto infinito X, é possível exibir uma função $f : X \to X$ que é injetora mas não é sobrejetora. Isso é muito fácil, se observarmos que para todo conjunto infinito X tem-se que $\mathbb{N} \preccurlyeq X$, e que o "shift para a direita" $n \mapsto n+1$ é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$...

Um parênteses: o papel do Axioma da Escolha no que estamos discutindo...

O Axioma da Escolha é necessário para a demonstração de várias das afirmações acima !

Por exemplo, sem o uso do Axioma da Escolha, não podemos garantir esse fato que usamos no dia-a-dia da matemática: "todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável", que é o que denotamos por "$\mathbb{N} \preccurlyeq$ se X é infinito" na página anterior.

Também não se pode provar, sem o Axioma da Escolha, que "se X é um conjunto infinito, entao $X^2 \approx X$. Na verdade, essa afirmação é **equivalente ao Axioma da Escolha** !

E para objetos e gavetas ?

Para quaisquer cardinais infinitos κ e λ, podemos nos perguntar:

Perguntinha capciosa !

Se colocarmos κ objetos em λ gavetas, com $\kappa > \lambda$, o que ocorre ?

Com certeza alguma gaveta terá mais do que um objeto - mas, alguma gaveta tem que ser infinita ? Alguma gaveta tem que ter tamanho κ ? Ou, pelo menos, maior do que λ ?

Não vamos discutir essa questão no geral, mas pelo menos um caso particular podemos demonstrar !

Versão infinita do Princípio da Casa dos Pombos

Princípio Combinatório – "Versão do P.C.P. que vale"

Se colocamos uma quantidade não-enumerável de objetos em uma quantidade enumerável de gavetas, então alguma gaveta deve conter uma quantidade não-enumerável de objetos.

... O prezado(a) colega já "fez a demonstração de cabeça"? É só usar um "outro princípio combinatório" que já comentamos...

Demonstração

Seja Y um conjunto não-enumerável, e decomponha Y numa união disjunta

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

(ou seja, os elementos de Y são os objetos, e cada X_n é uma gaveta...)

Então, algum dos X_n tem que ser não-enumerável – pois, se todos fossem enumeráveis, como "a reunião enumerável de enumeráveis é enumerável" teríamos que o próprio Y seria enumerável, contradição.

Como usamos a combinatória para obter informações topológicas ?

Finalmente, vamos começar a usar a combinatória infinitária para obter informações sobre espaços topológicos – inicialmente, sobre a reta real.

Vamos inicialmente estudar as seguintes perguntas:

- Todo subconjunto não-enumerável da reta **possui** algum ponto de acumulação ?
- Todo subconjunto não-enumerável da reta **contém** algum ponto de acumulação ?

Perceba o(a) colega que uma resposta positiva para a segunda pergunta é uma informação bem mais forte do que a primeira...

Mas, o que é "espaço topológico" mesmo ???

Como este é um minicurso sem pré-requisitos, talvez o(a) estudante não saiba ainda o que é um espaço topológico ! Digamos que um espaço topológico é um conjunto no qual podemos falar da noção de vizinhança (logo, de continuidade), mesmo que não exista uma distância bem definida...

Formalmente:

Uma **topologia** sobre um conjunto X é uma família de subconjuntos de X, em geral denotada por τ, cujos elementos são chamados de "abertos", que satisfazem a três propriedades: (I) $\emptyset$ e X são abertos; (II) União qualquer de abertos é um aberto; (III) Intersecção finita de abertos é um aberto.

Mas, o que é "espaço topológico" mesmo ???

Ou seja, "a primeira coisa que estamos interessados em topologia é dizer quais são os conjuntos abertos..."

Com isso, podemos definir o que é um espaço topológico:

Definiçao

Um **espaço topológico** é um par (X, τ), onde X é um conjunto e τ é uma topologia sobre X.

Mas, o que é "espaço topológico" mesmo ???

Os primeiros exemplos de espaços topológicos são sempre dados por **espaços métricos**, nos quais os conjuntos abertos são definidos de modo bastante similar à reta, com as "bolas abertas" no lugar dos intervalos abertos...

Neste minicurso, quando apresentarmos exemplos de espaços topológicos mais gerais, apenas descrever quem são os conjuntos abertos ! A verificação de que esses abertos cumprem as cláusulas descritas no slide anterior ficará sempre como exercício !!!

Subconjuntos não-enumeráveis da reta **possuem** ponto de acumulação

Para provar a afirmação do título desde slide, vamos usar o seguinte fato básico de Topologia:

Compacidade de intervalos fechados

Todo intervalo fechado da reta é um conjunto compacto.

A compacidade é uma das principais propriedades que a topologia estuda, e, para espaços métricos como a reta, tem várias equivalências interessantes. Primeiro, a definição:

Definição de compacidade

Um espaço topológico X é dito **compacto** se, para toda família de abertos $\mathcal{C}$ que cobre X (i.e., tal que $\bigcup \mathcal{C} = X$), existe uma subfamília finita $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ tal que $\bigcup \mathcal{C}' = X$.

Compacidade em espaços métricos

Equivalências para a compacidade em espaços métricos

Seja M um espaço métrico. São equivalentes:

- M é compacto.
- Todo subconjunto infinito de M possui ponto de acumulação.
- Toda seqüência em M possui subseqüência convergente.

Agora, ficou fácil usar um argumento combinatório para mostrar que **todo subconjunto não-enumerável da reta possui um ponto de acumulação...**

Argumento combinatório !

Seja Y um subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$.

Considere, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o intervalo fechado $[k, k+1]$ ("os intervalos serão as gavetas, e os elementos de Y os objetos").

Como vale que $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1]$, então Y pode ser decomposto na reunião enumerável

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Y \cap [k, k+1]$$

Argumento combinatório !

Como Y é não-enumerável e a reunião dada é enumerável, existe algum k_0 tal que $Y \cap [k_0, k_0 + 1]$ é não-enumerável – logo, em particular, **infinito** !

Como $[k_0, k_0 + 1]$ é compacto, o conjunto $Y \cap [k_0, k_0 + 1]$ possui um ponto de acumulação em $[k_0, k_0 + 1]$.

Tal ponto de acumulação será, também, ponto de acumulação de Y.

(Note que existem subconjuntos enumeráveis que não possuem ponto de acumulação, como $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. O detalhe é que "reunião enumerável de finitos é enumerável"...)

Um exercício só para os mais avançados...

Uma outra maneira de mostrar que todo subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$ possui ponto de acumulação seria usar o seguinte

Teorema

Se X é um espaço de Lindelöf, então X não possui subconjuntos não-enumeráveis que não possuam ponto de acumulação.

Um espaço topológico é dito **espaço de Lindelöf** se toda cobertura aberta possui subcobertura enumerável (comparar com a compacidade !).

Exercício: Demonstre o teorema acima.
(Dica: Subconjuntos que não possuem pontos de acumulação são **fechados e discretos**...)

Subconjuntos não-enumeráveis da reta **contém** ponto de acumulação

Vamos agora refinar um pouco nossos argumentos e mostrar que, na verdade, se $Y \subset \mathbb{R}$ é não-enumerável então **existe um elemento de Y que é ponto de acumulação de Y** - informação que, até o presente momento, ainda não verificamos !

O que vamos utilizar é a seguinte propriedade da reta:

Propriedade topológica de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ é um espaço topológico de base enumerável.

O que é uma base de abertos para um espaço topológico ?

Base de abertos

Uma família de abertos $\mathcal{B}$ é dita uma **base de abertos** do espaço topológico X se qualquer aberto de X pode ser escrito como uma união de uma subfamília de $\mathcal{B}$.

Trabalhando um pouco com Teoria dos Conjuntos elementar, o(a) colega pode verificar a seguinte equivalência:

Caracterização de uma base de abertos

Uma família de abertos $\mathcal{B}$ é uma base se, e somente se, para todo aberto U e para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Exemplo clássico

Um exemplo clássico de base de um espaço topológico: **as bolas abertas de um espaço métrico**.

Dado $x \in M$ e $\varepsilon > 0$, definimos a **bola aberta de centro** x **e raio** ε como sendo o conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$.

Para um espaço métrico qualquer, definimos as noções de **interior**, **fecho**, **abertos** e **fechados** como fizemos para $\mathbb{R}$, mas com bolas abertas no lugar dos intervalos abertos.

Dessa forma, as bolas abertas são conjuntos abertos e formam uma base de abertos (pois $U \subset M$ é aberto se, e só se, todo ponto de U é interior...).

Bases enumeráveis e densos enumeráveis

Um subconjunto D de um espaço topológico X é dito **denso** em X se $\overline{D} = X$ – ou seja, D é denso se todo ponto de X é aderente a D.

Num espaço métrico M, temos, por nossas equivalências usando seqüências, que: D é denso em M se, e somente se, todo ponto de M pode ser escrito como limite de uma seqüência de elementos de D.

Exemplo: $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Ou seja, "todo número real pode ser aproximado por racionais" – já que todo número real está na aderência de $\mathbb{Q}$, basta lembrarmos dos fatos envolvendo aderências e seqüências...

Bases enumeráveis e densos enumeráveis

Para espaços métricos, temos a seguinte equivalência (**que não é válida para espaços topológicos em geral**).

"Bases enumeráveis" = "Densos enumeráveis" para espaços métricos

Seja M um espaço métrico. São equivalentes:

1. M possui uma base enumerável de abertos.
2. M possui um subconjunto denso enumerável.

Bases enumeráveis e densos enumeráveis

Esboço da demonstração:

Para (1) $\Rightarrow$ (2), use o Axioma da Escolha e escolha um ponto em cada aberto da base enumerável: o conjunto que se obtém é denso (e enumerável).

Para (2) $\Rightarrow$ (1), em cada um dos pontos do denso enumerável considere as enumeráveis bolas abertas de centro $\frac{1}{n}$, para $n \geqslant 1$. A união dessa família de famílias de bolas é uma base de abertos, que é enumerável !

Então, $\mathbb{R}$ tem base enumerável !!!

Em vista do que acabamos de demonstrar, é imediato que $\mathbb{R}$ tem base enumerável - já que é um espaço métrico que possui denso enumerável, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável e é denso em $\mathbb{R}$!!!

E, a partir da informação de que $\mathbb{R}$ tem base enumerável, vamos concluir que **todo subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$ contém ponto de acumulação**. A informação crucial para nós é o seguinte teorema, **o qual segue de um argumento combinatório:**

Teorema

Sejam X um espaço topológico, $Y \subset X$ e $\mathcal{B}$ uma base de abertos do espaço. Então, se $|Y| > |\mathcal{B}|$, então Y tem que conter um ponto de acumulação, i.e., existe algum elemento de Y que é ponto de acumulação de Y.

Argumento combinatório !!!

Pois bem: suponha por absurdo que nenhum ponto de Y seja ponto de acumulação de Y. Então, para cada ponto y de Y podemos fixar um aberto O_y tal que $O_y \cap Y = \{y\}$ (ou seja, Y seria um subconjunto discreto).

Usando agora que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos do espaço, podemos fixar, para cada $y \in Y$, um aberto $B_y \in \mathcal{B}$ que satisfaz $y \in B_y \subset O_y$.

Considere então a função $f : Y \to \mathcal{B}$ dada por $f(y) = B_y$. Em vista do exposto, teríamos que f é injetora - o que é um absurdo, **pois $|Y| > |\mathcal{B}|$ e sabemos que, nessas condições, nenhuma função pode ser injetora !!!**.

$\therefore$ Algum ponto de Y tem que ser de acumulação !!!

Pensando em $\mathbb{R}$ agora...

Observe o(a) colega que usamos o Axioma da Escolha várias vezes nesta última demonstração... Segue imediatamente do Teorema o seguinte corolário:

Corolário

Se X é um espaço de base enumerável e $Y \subset X$ é não-enumerável, então Y contém ponto de acumulação.

E, como tínhamos verificado que a reta $\mathbb{R}$ é um espaço topológico de base enumerável, temos então:

Informação obtida por argumento combinatório !!!

Subconjuntos não-enumeráveis de $\mathbb{R}$ **contém** ponto de acumulação.

Um espaço topológico não-metrizável

Podemos usar argumentos bastante semelhantes aos utilizados agora para exibir um exemplo "elementar" de espaço topológico que **não é metrizável** – isto é, cuja topologia não pode ser gerada por uma métrica.

A Reta de Sorgenfrey

A Reta de Sorgenfrey é o espaço topológico $\mathbb{R}_S = (X, \tau)$ dado por:

- $X = \mathbb{R}$; ou seja, a Reta de Sorgenfrey é "uma topologia sobre a reta";
- Mas tal topologia **não é a usual**: definimos que $U \subset \mathbb{R}$ é um aberto da Reta de Sorgenfrey se, e somente se, para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que
$$x \in [x, x+\varepsilon[\subset U$$

Fatos interessantes sobre a Reta de Sorgenfrey

Demonstrar as fatos a seguir é um bom exercício para o estudante que goste de Topologia...

- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_S$ possuem exatamente os mesmos subconjuntos densos - em particular, $\mathbb{Q}$ é denso na reta de Sorgenfrey.
- $\mathbb{R}_S$ é um espaço **desconexo** - i.e., existem conjuntos, diferentes do vazio e do espaço todo, que são **abertos e fechados ao mesmo tempo** - tal fato não ocorre na reta usual, que é conexa !
- A topologia da Reta de Sorgenfrey é **estritamente mais fina** que a usual – isto é, os abertos da topologia usual são abertos na reta de Sorgenfrey, mas não vale a recíproca;

Fatos interessantes sobre a Reta de Sorgenfrey

Demonstrar as fatos a seguir é um bom exercício para o estudante que goste de Topologia...

- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_S$ possuem exatamente os mesmos subconjuntos densos - em particular, $\mathbb{Q}$ é denso na reta de Sorgenfrey.
- $\mathbb{R}_S$ é um espaço **desconexo** - i.e., existem conjuntos, diferentes do vazio e do espaço todo, que são **abertos e fechados ao mesmo tempo** - tal fato não ocorre na reta usual, que é conexa !
- A topologia da Reta de Sorgenfrey é **estritamente mais fina** que a usual – isto é, os abertos da topologia usual são abertos na reta de Sorgenfrey, mas não vale a recíproca;

Fatos interessantes sobre a Reta de Sorgenfrey

Demonstrar as fatos a seguir é um bom exercício para o estudante que goste de Topologia...

- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_S$ possuem exatamente os mesmos subconjuntos densos - em particular, $\mathbb{Q}$ é denso na reta de Sorgenfrey.
- $\mathbb{R}_S$ é um espaço **desconexo** - i.e., existem conjuntos, diferentes do vazio e do espaço todo, que são **abertos e fechados ao mesmo tempo** - tal fato não ocorre na reta usual, que é conexa !
- A topologia da Reta de Sorgenfrey é **estritamente mais fina** que a usual – isto é, os abertos da topologia usual são abertos na reta de Sorgenfrey, mas não vale a recíproca;

Fatos interessantes sobre a Reta de Sorgenfrey

- Com isso, certas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não eram contínuas passam a ser contínuas, se munirmos o domínio com a topologia da Reta de Sorgenfrey (i.e., consideramos $f : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$). O exemplo mais chocante é que **a função "parte inteira de x" é contínua**, nessas condições !
- $\mathbb{R}_S$ é um espaço **normal**, isto é, para cada par de fechados disjuntos F e G na reta de Sorgenfrey existem abertos disjuntos U e V que separam F e G – i.e., $F \subset U, G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. (Isto não é difícil de provar, tente !)

Fatos interessantes sobre a Reta de Sorgenfrey

- Com isso, certas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não eram contínuas passam a ser contínuas, se munirmos o domínio com a topologia da Reta de Sorgenfrey (i.e., consideramos $f : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$). O exemplo mais chocante é que **a função "parte inteira de x" é contínua**, nessas condições !
- $\mathbb{R}_S$ é um espaço **normal**, isto é, para cada par de fechados disjuntos F e G na reta de Sorgenfrey existem abertos disjuntos U e V que separam F e G
  – i.e., $F \subset U, G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.
  (Isto não é difícil de provar, tente !)

Fatos interessantes sobre a Reta de Sorgenfrey

- No entanto, **o quadrado da Reta de Sorgenfrey não é normal** !!! A demonstração desse fato **é feita usando um argumento combinatório**, baseado em "contagem de funções de Urysohn". Veremos isto dentro dos "Tópicos Avançados"...
- E pode-se mostrar facilmente o seguinte

Fato

A Reta de Sorgenfrey não é um espaço de base enumerável.

Exercício: Demonstre o Fato acima !

A Reta de Sorgenfrey não é metrizável

Como dica para fazer o exercício anterior, use que, para cada $x \in \mathbb{R}$, o intervalo $[x, x+1[$ é um aberto da reta de Sorgenfrey. Logo, se $\mathcal{B}$ é uma base qualquer da reta de Sorgenfrey, podemos fixar para cada $x \in \mathbb{R}$ um aberto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que ... ?

Bom, o(a) colega mais atento já fez "de cabeça" a demonstração para o seguinte teorema !

Teorema

A Reta de Sorgenfrey é um espaço topológico não-metrizável.

Qual é o argumento que resolve tudo ? O(a) colega tem que se lembrar de um dos comentários sobre espaços métricos...

A Reta de Sorgenfrey não é metrizável

Demonstração: Verificamos que, para espaços métricos, a existência de bases enumeráveis é equivalente à existência de densos enumeráveis.

No entanto, a reta de Sorgenfrey é um espaço que possui subconjuntos densos enumeráveis (por exemplo, $\mathbb{Q}$), mas não possui bases enumeráveis. Logo, não pode ser um espaço metrizável.

A Reta de Sorgenfrey não é metrizável

Demonstração: Verificamos que, para espaços métricos, a existência de bases enumeráveis é equivalente à existência de densos enumeráveis.

No entanto, a reta de Sorgenfrey é um espaço que possui subconjuntos densos enumeráveis (por exemplo, $\mathbb{Q}$), mas não possui bases enumeráveis. Logo, não pode ser um espaço metrizável.

...Bonito, não ?

Fim da parte básica do minicurso !!!

Antes de partirmos para discussões mais avançadas, façamos uma pequena pausa ! Espero que todos tenham compreendido a "mensagem básica" deste minicurso: que, de vez em quando, "saber contar" (no sentido de "saber o tamanho dos conjuntos") resolve problemas (mesmo no infinito...).

Como "aquecimento" para o último dia, proponho um último exercício por hoje !!!

Quantas são as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

Exercício. Demonstre o seguinte

Teorema

Existem tantas funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quantos são os números reais (i.e., $|\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$).

(**Dicas**:

- Use que $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (por quê ?).
- Em algum momento, use o seguinte fato de Topologia (ou seja, estamos agora em **aplicações de Topologia em Combinatória**): se M, N são espaços métricos, $D \subset M$ é um denso e f, g são funções contínuas de M em N que são tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, então $f = g$.)

$\mathbb{R}_S$ é um espaço normal

O estudante que seguiu nossas sugestões verificou que a Reta de Sorgenfrey é um espaço normal, i.e., fechados disjuntos são separados por abertos disjuntos (basta trabalhar com os abertos básicos e estudar as possíveis intersecções entre eles...).

Se o estudante, porém, tentar adaptar a prova para a topologia da reta usual, o argumento não funciona !!!

Para espaços métricos em geral, a maneira mais simples de verificar a normalidade é a partir de **funções de Urysohn**.

Funções de Urysohn

Se F e G são fechados disjuntos em um espaço X, uma **função de Urysohn para F e G** é uma função real contínua definida em X tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.

Exercícios:

- Mostre que, se para todo par de fechados disjuntos em X existe uma função de Urysohn para esse par, então X é normal.
- (Espaços métricos são normais) Mostre que se F e G são fechados disjuntos em um espaço métrico M então a função real definida por $\varphi(x) = d(x, F)/[d(x, F) + d(x, G)]$ é uma função de Urysohn para F e G.

Funções de Urysohn

Se F e G são fechados disjuntos em um espaço X, uma **função de Urysohn para F e G** é uma função real contínua definida em X tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.

Exercícios:

- Mostre que, se para todo par de fechados disjuntos em X existe uma função de Urysohn para esse par, então X é normal.
- (Espaços métricos são normais) Mostre que se F e G são fechados disjuntos em um espaço métrico M então a função real definida por $\varphi(x) = d(x, F)/[d(x, F) + d(x, G)]$ é uma função de Urysohn para F e G.

Lema de Urysohn

Temos então que: "se sempre existem funções de Urysohn, o espaço é normal". Vale a recíproca dessa afirmação !!!

Lema de Urysohn

Se X é um espaço normal, então para todo par de fechados disjuntos em X existe uma função de Urysohn para esse par.

O Lema de Urysohn é um resultado clássico de Topologia Geral, com aplicações importantíssimas em Análise (Teorema da Extensão de Tietze, Partições da Unidade), e mostra que $\mathbb{R}$ está intrinsecamente ligado aos espaços topólógicos em geral, mesmo os mais abstratos...

Lema de Urysohn

Vamos usar o Lema de Urysohn para mostrar que "o quadrado da reta de Sorgenfrey", $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, não é um espaço normal.

A idéia da prova é: verificar que existem "muitos" fechados disjuntos para se separar e não existem "tantas" funções reais contínuas o suficiente para separá-los !!! Ou seja, "a conta não fecha"...

Um fechado e discreto muito grande

Consideremos o subconjunto de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ dado por

$$H = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$$

ou seja, H é a "bissetriz do segundo e quarto quadrantes".

Exercício: Mostre que H é um subconjunto fechado e discreto de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

Subconjuntos fechados e discretos têm algumas propriedades interessantes, em qualquer espaço topológico...

Propriedades dos fechados e discretos

Se X é um espaço topológico qualquer, valem as seguintes afirmações:

- Um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado e discreto se, e somente se, A não possui pontos de acumulação. (exercício !)
- Todo subconjunto de um fechado e discreto é, também, fechado e discreto (por quê ?).

Propriedades dos fechados e discretos

Se X é um espaço topológico qualquer, valem as seguintes afirmações:

- Um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado e discreto se, e somente se, A não possui pontos de acumulação. (exercício !)
- Todo subconjunto de um fechado e discreto é, também, fechado e discreto (por quê ?).

Quantas funções de Urysohn seriam necessárias para $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ ser normal ?

Pois bem: vamos fazer nosso argumento de "contagem" !!!

Como H é fechado e discreto em $X = \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, para cada $A \subset H$ temos que A e $H \setminus A$ são fechados disjuntos em X. Supondo por absurdo que X seja normal, para cada $A \subset H$ poderíamos associar uma função real contínua f_A, que seria uma função de Urysohn para A e $H \setminus A$.

Como a associação $A \mapsto f_A$ é claramente injetora, teríamos então uma família $\mathcal{F} = \{f_A : A \subset H\}$ de funções reais contínuas definidas em X. Note que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(H)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R}|}$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

... A conta não fecha !!! Não existem tantas funções contínuas assim !!!

No entanto, com os mesmos argumentos que usamos para $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, podemos mostrar que

$$|\mathcal{C}(X, \mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$$

já que o quadrado da Reta de Sorgenfrey possui um subconjunto denso enumerável (a saber, os pontos do plano com duas coordenadas racionais).

Já perceberam a contradição ? Temos por um lado $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, logo $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{C}(X, \mathbb{R})|$, o que é um absurdo pois $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathbb{R}|} > |\mathbb{R}| = |\mathcal{C}(X, \mathbb{R})|$. $\therefore$ X não é normal.

Existe algum argumento sem usar funções contínuas ?

O estudante pode estar se perguntando agora: será que não existe uma maneira de verificar a não-normalidade do quadrado da Reta de Sorgenfrey **sem** usar o argumento de contagem de funções contínuas ?

A resposta é: **sim** !! Temos uma alternativa interessante a esse argumento que, num certo sentido, “dá mais informações”. Essa alternativa é o **Lema de Jones**.

Lema de Jones

F. B. Jones (1937), durante o estudo de um problema (hoje, um clássico) de Topologia Geral, o chamado "Problema do Espaço de Moore Normal", demonstrou o seguinte resultado, de caráter bastante combinatório:

Lema de Jones

Se X é um espaço normal com subconjuntos D e H tais que D é denso e H é fechado e discreto, então existe uma aplicação $\varphi : \mathcal{P}(H) \mapsto \mathcal{P}(D)$ que é injetora – donde $\mathcal{P}(H) \preccurlyeq \mathcal{P}(D)$.

Lema de Jones

Esboço da Demonstração: Se H é fechado e discreto, para todo $A \subset H$ tem-se que A e $H \setminus A$ são fechados disjuntos. Como X é normal, para cada $A \subset H$ podemos fixar um aberto U_A tal que $A \subset U_A$ e $(H \setminus A) \subset X \setminus \overline{U_A}$. Definimos φ pondo $\varphi(A) = U_A \cap D$ para todo $A \subset H$. Afirmamos que tal φ é injetora.

De fato: sejam $A \neq A' \subseteq H$, s.p.g. $A \setminus A' \neq \emptyset$. Então

$$\emptyset \neq A \setminus A' = A \cap (H \setminus A') \subset U_A \cap (X \setminus \overline{U_{A'}})$$

e portanto $U_A \cap (X \setminus \overline{U_{A'}})$ é um aberto não-vazio. Use agora a densidade de D !! ∎

Quais conclusões podemos tirar a partir do Lema de Jones ?

Segue do Lema de Jones que, se X é normal, então sempre se tem "$2^{|H|} \leqslant 2^{|H|}$", para H e D subconjuntos, respectivamente, fechado discreto e denso. Com isso, temos o seguinte

Fato (Corolário do Lema de Jones)

Se X é um espaço normal e separável, então X não possui fechados e discretos de cardinalidade $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

A verificação é imediata ! Se X é separável, então existe D denso tal que $|D| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Logo, se H é fechado e discreto, temos

$$|H| < 2^{|H|} \leqslant 2^{|D|} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|.$$

Quais conclusões podemos tirar a partir do Lema de Jones ?

Segue agora diretamente do Fato anterior que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é um espaço normal, por ser um espaço separável que possui um fechado e discreto de tamanho $\mathfrak{c}$ – a "bissetriz do segundo e quarto quadrantes".

... Será que existem mais informações que podemos concluir a partir do Lema de Jones ?

A resposta é **sim**, mas teremos que entrar no contexto dos chamados **resultados de consistência e independência** !!!

Consistência e Independência em Matemática

Vamos definir as noções de consistência e independência com relação a uma teoria T.

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação Φ sobre os objetos da teoria tal que T prova Φ e T prova a negação de Φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente – i.e., φ é consistente se podemos acrescentar φ sem levar a contradições.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.

Consistência e Independência em Matemática

Vamos definir as noções de consistência e independência com relação a uma teoria T.

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação Φ sobre os objetos da teoria tal que T prova Φ e T prova a negação de Φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente – i.e., φ é consistente se podemos acrescentar φ sem levar a contradições.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.

Consistência e Independência em Matemática

Vamos definir as noções de consistência e independência com relação a uma teoria T.

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação Φ sobre os objetos da teoria tal que T prova Φ e T prova a negação de Φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente – i.e., φ é consistente se podemos acrescentar φ sem levar a contradições.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.

Consistência e Independência em Matemática

Usualmente, para mostrarmos que uma asserção φ é consistente, usamos o chamado "Teorema da Correção", o qual nos garante que: **se existe um modelo de T no qual a afirmação φ é verdadeira, então φ é consistente** (com T).

Essencialmente, um **modelo** para uma teoria é uma estrutura na qual a teoria pode ser "interpretada". Por exemplo, o disco de Poincaré é um modelo para a geometria hiperbólica !

A Lógica de Primeira Ordem satisfaz a recíproca do Teorema da Correção, que é o chamado "Teorema da Completude": trabalhando apenas com os axiomas lógicos, é verdade que se uma afirmação é consistente então existe um modelo no qual essa afirmação é verdadeira.

Consistência e Independência em Matemática

É importante observarmos que o chamado Teorema da Completude possui um enunciado equivalente, bastante interessante:

Enunciados equivalentes do Teorema da Completude

As seguintes afirmações sobre teorias são equivalentes:
I - Se T é consistente, então T tem modelo.
II - Se φ é verdadeira em todos os modelos de T, então T prova φ.

Exercício (Difícil para quem nunca fez um curso de Lógica !): Assumindo que uma teoria T prova φ se, e somente se, $T \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, mostre as equivalências acima.

Consistência e Independência em Matemática

No entanto, Gödel, quando da demonstração do seu célebre "Primeiro Teorema da Incompletude", mostrou que qualquer teoria consistente T que contenha a aritmética possui uma afirmação aritmética φ que **é verdadeira mas que não pode ser demonstrada !!!**.

Segue disso que: **toda teoria consistente T que inclua a aritmética possui proposições indecidíveis**, i.e., existem asserções ζ tais que T não pode nem provar nem refutar ζ.

Exercício: Convença-se que a afirmação φ do primeiro parágrafo pode ser tomada como uma das $\zeta's$ do segundo parágrafo !!!

Consistência e Independência em Matemática

Entendendo-se como "Matemática" a Teoria dos Conjuntos ZFC, dizemos que uma afirmação φ é "consistente" se for consistente com ZFC, e será "independente" se for independente de ZFC.

Como ZFC inclui a aritmética, vale o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, portanto **existem proposições indecidíveis para a matemática !!!**

Talvez a mais célebre dessas proposições indecidíveis seja a chamada **Hipótese do Contínuo.**

A Hipótese do Contínuo

Cantor foi o responsável por desenvolver a Teoria dos Conjuntos (Infinitos), tal como a conhecemos hoje.

Com o seu "Teorema de Cantor", temos como caso particular que $|\mathbb{N}| = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Por não ter conseguido produzir "cardinais intermediários", Cantor conjecturou que a cardinalidade do contínuo seria, também, o primeiro cardinal não-enumerável, denotado por $\aleph_1$.

Hipótese do Contínuo

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Nosso primeiro princípio combinatório consistente: CH

A Hipótese do Contínuo (CH) foi demonstrada consistente nos anos 1930, por Gödel ("construção do modelo construtível"), e a consistência de sua negação foi obtida nos anos 1960 por Cohen ("invenção do método de forcing").

Por ser independente da Teoria dos Conjuntos, CH, é, portanto, uma proposição indecidível !!! (por quê ???)

De todo modo, CH será nosso primeiro **princípio combinatório consistente**.

Chamaremos de **princípio combinatório consistente** a qualquer afirmação combinatória φ que seja consistente com a Matemática (i.e., com ZFC).

Consequências de princípios combinatórios consistentes

Veremos nos próximos slides alguns princípios combinatórios consistentes, e algumas de suas consequências.

Em particular, poderemos retomar nossa discussão sobre "o tamanho dos fechados e discretos em espaços normais separáveis", utilizando o Lema de Jones para tal.

CH

Teorema

CH implica que espaços normais e separáveis não possuem fechados e discretos não enumeráveis.

Dem.: Vimos que o Lema de Jones implica que, se H é um fechado e discreto em um espaço normal e separável X, então

$$|H| < 2^{\aleph_0}$$

Porém, sob CH temos $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Logo, sob CH teremos $|H| < \aleph_1$, o que significa dizer que H é, no máximo, infinito enumerável. ■

Um princípio mais fraco que CH: $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$

A asserção $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ é um princípio combinatório consistente, pelo simples fato de ser uma consequência de CH.

Exercício: Mostre que CH $\Rightarrow 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

No entanto, é interessante observar que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ é "independente de CH", no sentido de ser consistente com a negação de CH.

$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$

Mesmo sendo mais fraco que CH, o princípio combinatório $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ é ainda assim capaz de provar o resultado que provamos anteriormente, assumindo CH !

Teorema

$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ implica que espaços normais e separáveis não possuem fechados e discretos não enumeráveis.

Dem.: Suponha que exista H fechado e discreto não-enumerável num espaço normal e separável X. Passando a um subconjunto se necessário, podemos supor s.p.g. que $|H| = \aleph_1$. Sendo D o enumerável denso, o Lema de Jones nos garante então que $2^{|H|} \leqslant 2^{|D|} \Longrightarrow 2^{\aleph_1} \leqslant 2^{\aleph_0}$, o que contradiz a hipótese $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. ■

Um princípio mais forte que CH: Princípio Diamante ($\diamondsuit$)

O Princípio Diamante (denotado por $\diamondsuit$) é um princípio combinatório que implica a Hipótese do Contínuo (por isso dizemos que é "mais forte").

Não iremos enunciar formalmente o Princípio Diamante por envolver noções avançadas de Teoria dos Conjuntos, mas podemos dizer que esse princípio é um "princípio de predição": ele postula a existência de uma família de $\aleph_1$ subconjuntos especiais de $\aleph_1$ que, de uma maneira bem específica, são capazes de "predizer" o comportamento de qualquer um dos $2^{\aleph_1}$ subconjuntos de $\aleph_1$ – com uma margem de erro bastante razoável.

Um princípio mais forte que CH: Princípio Diamante ($\diamondsuit$)

O Princípio Diamante vale no modelo construtível de Gödel, denotado por **L**.

O modelo construtível é um modelo muito "bem-comportado": nesse modelo vale inclusive GCH, a chamada **Hipótese Generalizada do Contínuo**, que é a asserção: para todo cardinal infinito κ, $\kappa^+ = 2^\kappa$ (onde κ^+ é o cardinal sucessor de κ, i.e., o menor cardinal estritamente maior que κ.).

Como $\diamondsuit \Rightarrow$ CH $\Rightarrow 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, é evidente que sob $\diamondsuit$ os fechados e discretos de espaços normais e separáveis também devem ser necessariamente enumeráveis !!!

Uma alternativa a CH: o Axioma de Martin

Uma espécie de "alternativa" à Hipótese do Contínuo é o chamado **Axioma de Martin**, denotado MA e que é um princípio combinatório consistente. O Axioma de Martin é uma asserção sobre ordens parciais, e postula a existência de certos "filtros genéricos", a partir dos quais podemos criar determinados objetos. MA é uma consequência imediata de CH, no entanto é consistente com a negação de CH.

Uma das principais consequências de MA é que MA implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, onde $\mathfrak{p}$ é um dos chamados **pequenos cardinais**.

A definição de $\mathfrak{p}$ envolve as noções de **propriedade forte da intersecção infinita** e **pseudo-intersecção infinita**.

O pequeno cardinal $\mathfrak{p}$

- Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos infinitos de ω satisfaz a **propriedade forte da intersecção finita** se toda subfamília finita e não-vazia de $\mathcal{F}$ tem intersecção infinita.
- Seja $\mathcal{F}$ uma famíla de subconjuntos infinitos de ω. Um conjunto infinito $A \subset \omega$ é dito **pseudo-intersecção de $\mathcal{F}$** se para todo $F \in \mathcal{F}$ tem-se que $A \setminus F$ é finito.

O pequeno cardinal $\mathfrak{p}$

$\mathfrak{p}$ é o menor cardinal infinito κ tal que existe uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos infinitos $\mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$, $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade forte da pseudo-intersecção infinita mas não possui pseudo-intersecção infinita.

O pequeno cardinal $\mathfrak{p}$

Note que, pela definição de p, se $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ que possui a propriedade forte da intersecção infinita com $|\mathcal{F}| < \mathfrak{p}$, então $\mathcal{F}$ **possui** pseudo-intersecção infinita.

Exercício: (só pra quem já fez um semestre de Topologia Geral, e talvez um de Teoria dos Conjuntos !!!)

Seja X um espaço topológico T_1 que seja tal que todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças de tamanho menor do que $\mathfrak{p}$. Mostre que X é **subsequencial**, i.e., se um dado ponto p é ponto de acumulação da imagem de uma sequência (x_n) então p é limite de uma subsequência de (x_n).

O cardinal $\mathfrak{p}$ e os fechados e discretos de normais separáveis

Com relação a espaços normais e separáveis, o seguinte resultado é "folklore" em Topologia Conjuntística:

Fato

Se $\kappa < \mathfrak{p}$, então existe um espaço normal e separável com um fechado e discreto de tamanho κ.

Segue então o

Teorema

MA + $\neg$CH implica que existem espaços normais e separáveis com fechados e discretos não-enumeráveis.

MA + ¬CH ⇒ Existem normais separáveis com fechados e discretos não-enumeráveis

O(a) colega já fez a "demonstração de cabeça" ??

Dem.: Como MA implica $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, então sob MA + ¬CH temos $\aleph_1 < \mathfrak{p}$!!!

Segue do fato de "folklore" do slide anterior que existe um espaço normal e separável com um fechado e discreto de tamanho $\aleph_1$, portanto não-enumerável.

Exercício: Mostre que MA implica $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

(Sugestão: Use Topologia !!!)

... E por quê deve se considerar tão interessante usar esses princípios combinatórios consistentes ?

Nosso interesse em utilizar esses princípios combinatórios consistentes se baseia no seguinte fato:

Resultados de Consistência

As conseqüências de um princípio combinatório consistente são, também, proposições consistentes.

Com isso, podemos "combinar" princípios combinatórios consistentes para obter resultados de independência em Matemática !!!

... E por quê deve se considerar tão interessante usar esses princípios combinatórios consistentes ?

Resultados de Independência

Podemos combinar o uso de vários princípios combinatórios consistentes para mostrar que uma determinada asserção é independente da Teoria dos Conjuntos, e assim podemos exibir **proposições indecidíveis para a Matemática !!!**

Vamos encerrar este minicurso fazendo exatamente isso, apresentando algumas proposições indecidíveis para a Matemática !! As indecidibilidades são todas demonstradas usando princípios combinatórios que discutimos no minicurso.

A existência de fechados e discretos não-enumeráveis em espaços normais e separáveis

Seja φ a seguinte asserção:

> $\varphi \equiv$ Existe um espaço normal e separável X que contém um subconjunto fechado e discreto não-enumerável.

Afirmamos que φ é indecidível para a Matemática !!!

Para tanto, mostraremos que φ é **independente** da Matemática, pois tanto φ como $\neg\varphi$ são afirmações consistentes...

φ é consistente com a Matemática

Vimos que MA $+ \neg$CH implica φ (pois $\aleph_1 < \mathfrak{p}$, etc.)

Mas, MA $+ \neg$CH é um princípio combinatório consistente !!!

Temos então o

Teorema

É consistente que existam espaços normais e separáveis com fechados discretos não-enumeráveis.

$\neg\varphi$ é consistente com a Matemática

Vimos que CH (ou mesmo o princípio mais fraco $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$) implicam que não existem espaços normais e separáveis com fechados e discretos não-enumeráveis (pois nesse caso o Lema de Jones implicaria em $2^{\aleph_1} \leqslant 2^{\aleph_0}$).

Mas, ambos princípios citados são consistentes !!! Temos então o

Teorema

É consistente que não existam espaços normais e separáveis com fechados discretos não-enumeráveis.

A proposição φ é indecidível para a Matemática !!!

Sendo φ e $\neg\varphi$ proposições consistentes, temos que φ é independente da Matemática, sendo portanto uma proposição indecidível !!!

Fato

A Matemática não é capaz de decidir se existem espaços normais e separáveis com fechados e discretos não-enumeráveis.

Exemplos mais simples de proposições indecidíveis

O estudante pode pensar que a asserção que apresentamos como exemplo de proposição indecidível é muito "complexa".

Vamos apresentar dois exemplos mais simples, que estão intrinsecamente relacionados com a Hipótese do Contínuo !!!

A primeira asserção é a seguinte:

$\xi \equiv$ Se X é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$, então ou $X \approx \mathbb{N}$ ou $X \approx \mathbb{R}$.

Trata-se de uma afirmação proveniente da Teoria dos Conjuntos. Por quê dizemos que ela é intrinsecamente relacionada à Hipótese do Contínuo ? O(a) colega já percebeu o que ocorre ?

... Este é o enunciado original de Cantor para CH !!!

Exercício: (fácil !!!) Mostre que $\xi \iff$ CH.

Na verdade, a asserção ξ do slide anterior é exatamente o enunciado original de Cantor para a sua conjectura. Ele acreditava que não poderiam existir "tamanhos intermediários de infinito" entre as cardinalidades de $\mathbb{N}$ e de $\mathbb{R}$.

$\therefore$ Como CH é independente da Matemática, também o é a asserção ξ.

Como ξ é uma asserção de "dentro" da Teoria dos Conjuntos, pode não parecer surpreendente que ela seja uma proposição indecidível. Nosso próximo exemplo vem da Topologia.

A asserção ζ

É um fato bastante conhecido que, se retirarmos do $\mathbb{R}^2$ um subconjunto A que seja enumerável, então o conjunto "remanescente" $\mathbb{R}^2 \setminus A$ é conexo por caminhos (veja, por exemplo, o livro de Elon Lages Lima de Espaços Métricos).

Vejamos o que acontece quando retiramos um conjunto A de tamanho $\aleph_1$!!! Seja ζ a asserção análoga à acima, substituindo $\aleph_0$ por $\aleph_1$ – i.e.,

$\zeta \equiv$ Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $|A| = \aleph_1$, o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus A$ é conexo por caminhos.

Esperamos que os(as) colegas já tenham percebido que a afirmação ζ é, claramente, "consistentemente falsa"... Por quê ?

$\neg\zeta$ é consistente

É fácil demonstrar a seguinte

Proposição

CH implica que ζ é falsa.

Dem.: Assumindo-se CH, então qualquer reta do $\mathbb{R}^2$ tem cardinalidade $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Tomando-se então como conjunto A qualquer reta do $\mathbb{R}^2$, teremos que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ **não é** conexo por caminhos. ■

$\therefore$ Como CH é consistente, segue que $\neg\zeta$ é consistente.

ζ é consistente

Adaptando a prova conhecida para o caso enumerável, teremos a seguinte

Proposição

$\neg$ CH implica que φ é verdadeira.

Ou seja: estamos afirmando que, supondo-se que a Hipótese do Contínuo falhe, então é verdade que sempre que se retirar um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ de tamanho $\aleph_1$, o "que sobra" é conexo por caminhos !!!

Acompanhemos a demonstração com calma...

Demonstração de "$\neg$ CH $\Longrightarrow \zeta$"

Dem.: Assuma que vale a negação da Hipótese do Contínuo. Então, estamos assumindo que $|\mathbb{R}| > \aleph_1$. Afirmamos que, dado qualquer $A \subseteq \mathbb{R}^2$ satisfazendo $|A| = \aleph_1$ temos que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ é conexo por caminhos.

Pois bem: fixe dois pontos distintos x, y quaisquer do $\mathbb{R}^2$, trace uma reta S em algum ponto do interior do segmento $[x, y]$. A cada ponto z de S justaponha os segmentos $[x, z]$ e $[z, y]$, e seja φ_z essa justaposição.

Afirmamos que **alguma dessas justaposições não intersecta** A **!**

Demonstração de "$\neg$ CH $\Longrightarrow \zeta$"

Suponha por absurdo que sempre existe intersecção entre as justaposições φ_z e o conjunto A.

Podemos então, usando o Axioma da Escolha, fixar um ponto $a_z \in A \cap \varphi_z$ para cada $z \in S$. Mas daí teríamos que a aplicação de S em A dada por $z \mapsto a_z$ é injetora, donde $|S| \leqslant |A|$ – o que é uma contradição pois, por hipótese, $|A| = \aleph_1 < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = |S|$.

$\therefore$ Alguma das justaposições φ_z não intersecta M, logo tal φ_z é um caminho entre x e y contido em $\mathbb{R}^2 \setminus A$, o que mostra que o mesmo é conexo por caminhos. Assim, é consistente que a asserção ζ seja verdadeira.

$\therefore$ A afirmação ζ é independente de **ZFC**.

... E tem mais uma coisa que podemos afirmar...

O colega percebeu que existe mais uma coisa que podemos afirmar, com relação à asserção ζ ?

... O que será ???

... E tem mais uma coisa que podemos afirmar...

Exercício: "Redija novamente" as duas demonstrações anteriores e prove o

Teorema

A asserção ζ é equivalente à Hipótese do Contínuo.

Ou seja, acabamos de exibir uma afirmação proveniente da Topologia e que é equivalente à Hipótese do Contínuo !!! Mais uma prova de que as disciplinas da Matemática sempre interagem umas com as outras !!!

E, como se trata de uma asserção de enunciado simples, esse exemplo mostra que não apenas questões muito "complexas" acabam se configurando em proposições indecidíveis para a Matemática...

Meus agradecimentos !!!

O minicurso está encerrado !! Agradeço a todos por terem acompanhado e espero que todos tenham aprendido algumas coisas – e lembrem-se sempre, **argumentos combinatórios** e **proposições indecidíveis** estarão sempre espalhados por todas as áreas da Matemática !!!

Vamos discutir Teoria dos Conjuntos ?

samuel@ufba.br

Referências bibliográficas

Os conteúdos mais avançados de Teoria dos Conjuntos e de Topologia Geral podem ser consultados nos seguintes livros:

Kenneth Kunen, **Set Theory - an introduction to the independence proofs**, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980. Vol. 102 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

Thomas Jech, **Set Theory – The Third Millennium Edition, Revised and Expanded**, Springer Monographs in Mathematics, 2003.

Ryszard Engelking, **General Topology**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989. Volume 6 of Sigma Series in Pure Mathematics.